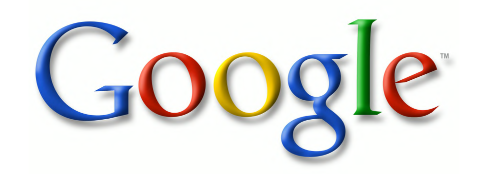
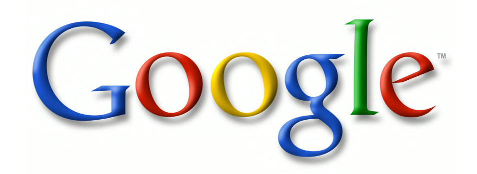








ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XLIX.



ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XLIX.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT FÜNFUNDACHTZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. UND E. WIEDEMANN.

NEBST VIER FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1893.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)

Druck von Metzger & Wittig, Leipzig.

Inhalt.

Neue Folge. Band XLIX.

Fünftes Heft.

Geschlossen am 15. April 1893.

Sechstes Heft.

Geschlossen am 15. Mai 1893.

Siebentes Heft.

Geschlossen am 10. Juni 1893.

Achtes Heft.

Geschlossen am 1. Juli 1893.

Nachweis zu den Figurentafeln.

1893. ANNALEN № 5.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 49.

1. *Ueber electrische Entladungen: Erzeugung electrischer Oscillationen und die Beziehung von Entladungsröhren zu denselben; von H. Ebert und E. Wiedemann.*

(Fortsetzung und Schluss von Wied. Ann. 48. p. 591).

Wir haben in der vorigen Abhandlung (vgl. diese Annalen 48. p. 591) zunächst die Lage der Knoten auf den Leitungsdrähten in ihrer Abhängigkeit von den geometrischen Eigenschaften des Drahtsystems untersucht und haben dabei die älteren Beobachtungen auf diesem Gebiete nach verschiedenen Richtungen ergänzen können. Die Theorie dieser Erscheinungen ergibt sich aus Betrachtungen über die geometrischen Eigenschaften des Leiterkreises ganz unabhängig von der angeregten Röhre.

Im folgenden Abschnitt wollen wir untersuchen, durch welche Eigenschaften des *Leiterkreises* die grössere oder kleinere Erregbarkeit einer gegebenen Entladungsröhre, sowie die Schärfe der in derselben auftretenden Lichterscheinungen bestimmt ist, falls die Röhre eine constante Lage dem Endcondensator gegenüber hat.

V. Specielle Bedingungen über das Zustandekommen wirksamer Resonanzschwingungen und das Leuchten von Entladungsröhren.

Einleitung.

Bei allen Betrachtungen über die Erregung eines Gases im Felde des Endcondensators haben wir zu unterscheiden zwischen *einer Entladung* im gewöhnlichen Sinne des Wortes — dieselbe umfasst alle Phänomene, welche durch *einen* primären Funken hervorgerufen werden — und *einer Oscillation*, von der eine um so grössere Anzahl auf *eine* Entladung geht, je geringer die Dämpfung im Leiterkreise ist.

Die Beziehungen des Leiterkreises zu der angeregten Röhre werden hauptsächlich durch zwei Grössen bestimmt, die fast unabhängig von einander die Leuchterscheinungen in dem Felde an dem Endcondensator bestimmen.

Einmal kommen in Betracht die maximalen Werthe, zwischen denen das Potential der Platten des Endcondensators schwankt, kurz die *Amplitude der Potentialschwankungen.* Sinkt diese unter einen bestimmten Werth, so hört das Leuchten auf, indess ist dieser Werth sehr klein.

Andererseits ist von Bedeutung die Schnelligkeit des Abklingens der Oscillationen, die sogenannte *Dämpfung.* Diese zweite Grösse, die Dämpfung ist, wie wir sehen werden, für die Deutlichkeit der Erscheinungen bei den Gasentladungen von principieller Wichtigkeit. Je kleiner die Dämpfung ist, d. h. je öfter sich die Potentialschwankungen an den Endcondensatorplatten für die durch jeden einzelnen Funken des primären Condensators angeregten Oscillationen wiederholen, um so heller und um so schärfer ausgeprägt sind alle Phänomene.

Eine wichtige Rolle spielt ferner auch die Zahl der erregenden primären Funken in der Zeiteinheit; darauf kommen wir am Schluss zu sprechen.

Da wir im Folgenden in Bezug auf die Dämpfung öfters auf die Theorie der Schwingungen in unserem resonirenden Drahtkreise zurückgreifen müssen, wollen wir hier das Nöthigste darüber kurz recapituliren. Wir legen dabei die Darstellung des Hrn. V. Bjerknes[1]) zu Grunde.

Das Potential φ, bis zu welchem zu den Zeiten t die Platten des Endcondensators geladen sind, wird dargestellt durch die Differentialgleichung eines gedämpften Pendels von der Periode b, welches durch eine periodische Kraft von der Periode a erregt wird; da b und a im allgemeinen nicht gleich und auch nicht einfache Multipla von einander sind (s. weiter u.), so haben wir es mit dem Vorgang einer „erzwungenen" Schwingung zu thun. Ist β das Dämpfungsverhältniss im secundären Kreis, sind $\mathfrak{A}$ und α Amplitude und Dämpfungsverhältniss der Schwingungen im primären Kreise, so ist die Gleichung der erzwungenen secundären Schwingungen

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 74. 1891.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + (b^2 + \beta^2)\varphi = \mathfrak{A}\, e^{-\alpha t}\cos a\, t\,,$$

zu der die Integralgleichung

$$\varphi = A\, e^{-\alpha t}\sin(a\, t + a') + B\, e^{-\beta t}\sin(b\, t + b')$$

gehört. (B Amplitude der Potentialschwankungen am Endcondensator, a' und b' die Phasen der dem primären, bezw. dem secundären Kreise entsprechenden Impulse am Endcondensator).

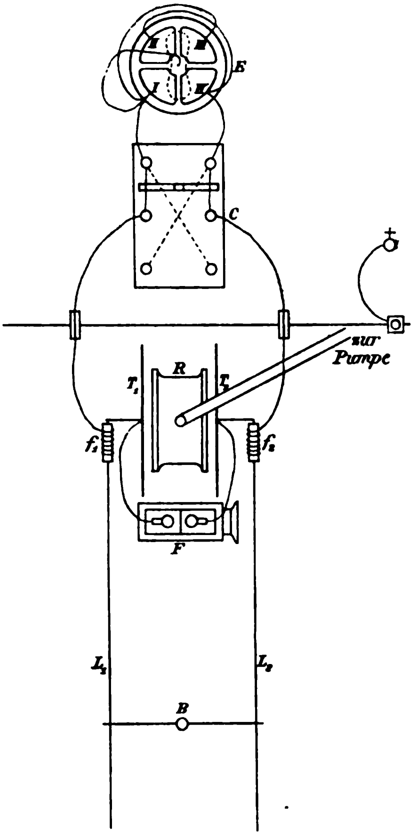


Fig. 1.

Die dem primären Kreise entsprechenden Schwingungen von der Periode a, welche dem secundären Kreise, dessen Eigenschwingung die Periode b hat, aufgezwungen werden, klingen relativ sehr rasch ab, da ihr Dämpfungsverhältniss α sehr gross ist im Vergleich zu β. Schon nach sehr kurzer Zeit werden daher die Potentialschwankungen an den Platten des Endcondensators durch den Ausdruck

$$\varphi = B\, e^{-\beta t}\sin(b\, t + b')$$

dargestellt. Die Amplitude B ist etwas vereinfacht

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 + 2\,\alpha^2(b^2 + a^2)}}$$

wobei α^2 neben a^2 oder b^2 als klein angesehen werden darf.

Zur Messung der Dämpfung war am Endcondensator ein Electrometer angebracht. Die Anordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich (vgl. Wied. Ann. 48. p. 562). Der Impuls J, den das Electrometer bei dem jeder Entladung zugehörigen Schwingungscomplexe erfährt, ist

$$J = \int_0^\infty \varphi^2\, d\, t = B^2 / 4\,\beta\,.$$

Erfolgen p Entladungen in der Secunde, so wird der Ausschlag

$$E = K . p J,$$

da die Entladungszahl p immer sehr gross ist im Vergleich zur Schwingungszahl der Electrometernadel. Um den Reductionsfactor K zu bestimmen, haben wir eine Seite des Endcondensators und damit den betreffenden Lecher'schen Draht zur Erde abgeleitet und das dem Endcondensator parallel geschaltete Funkenmikrometer soweit znsammengeschraubt, dass das Electrometer einen passenden Ausschlag E' gab. Das der gemessenen Schlagweite entsprechende Potential sei V. Dann kann man mit grosser Annäherung setzen:

$$E' = K . V^2.$$

Durch Division eliminirt man K und erhält:

$$E / E' = p J / V^2 \text{ oder } J = \frac{E}{E'} \frac{V^2}{p}$$

und da $\beta = B^2 / 4 J$ ist:

$$\beta = \frac{B^2}{4} \frac{E'}{V^2} \frac{p}{E}.$$

Das logarithmische Decrement ist, wenn T die Dauer einer ganzen Schwingung ist,

$$\delta = \beta T.$$

B wurde durch ein dem Endcondensator parallel geschaltetes Funkenmikrometer wenigstens angenähert genau bestimmt (vgl. p. 562); war Φ die aus der Paschen'schen Tafel entnommene Potentialdifferenz, so war $B = \frac{1}{2} \Phi$.

Zur Bestimmung der Zahl der Entladungen in der Secunde p wurde in 45 cm Entfernung von der primären Funkenstrecke ein rotirender Spiegel mit seiner Axe parallel der Funkenstrecke aufgestellt; der Spiegel war auf der Centrifugalmaschine befestigt und wurde nach dem Takt des Metronoms in constante Umdrehung versetzt. Aus dem Abstande der auf einer ebenfalls 45 cm von der Funkenstrecke entfernten Centimeterscala sich projicirenden Entladungsbilder wurde die Zeit zwischen zwei Entladungen und damit p bestimmt.

Die Production der Maschine war nicht gleich gross für beide Electricitäten; daher lud sich das ganze System allmählich bis auf ein bestimmtes Potential. Bei den Electrometerablesungen wurde daher in folgender Weise verfahren:

Zuerst wurden die Kugeln an der Maschine einander bis zur Berührung genähert, so dass keine Oscillationen zu Stande kamen. Das Electrometer zeigte eine gewisse Anfangslage i_0. Dann wurden für kurze Zeit die Kugeln auseinander gezogen; das Electrometer zeigte sehr bald einen constanten Ausschlag i_1. Hierauf wurden die Kugeln wieder zusammengeschoben, bei C Fig. 1 wurde commutirt; es ergab sich ein Ausschlag i_2. Die Kugeln wurden wieder auseinander gezogen und der Ausschlag i_3 abgelesen, sowie das Electrometer zur Ruhe gekommen war. Hierauf wurden die Kugeln wieder zusammengeschoben und das ganze Drahtsystem sammt dem Electrometer durch eine kurz dauernde Verbindung mit der Erde entladen. Die Messungen wurden möglichst schnell ausgeführt; bei längerer Wirkung der Schwingungen machen sich dauernde Ladungserscheinungen störend geltend. Die im folgenden mitgetheilten Werthe für E (bezw. E') sind die Mittel einer grösseren Anzahl zusammengehöriger Paare der Differenzen $i_3 - i_2$ und $i_1 - i_0$.

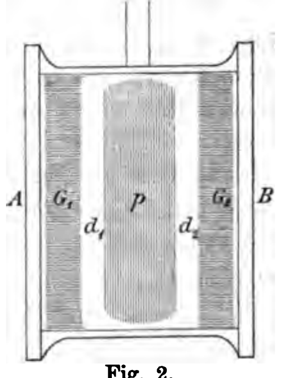


Fig. 2.

Bei allen Beobachtungen über die Leuchterscheinungen, die ein verdünntes Gas unter dem Einfluss der Oscillationen von nicht zu hohem Potential zeigt, tritt eine ganz besonders typische Erscheinung auf, die selbstverständlich je nach der Lage der Röhren eine verschiedene ist. Ist etwa ein an beiden Enden durch Glasplatten A und B (Fig. 2) geschlossener passend evacuirter Glascylinder zwischen die Platten T_1 und T_2 des Endcondensators so gestellt, dass A und B ihnen parallel und nahe stehen, sie aber nicht berühren, so gehen von ihnen blaue Glimmlichtstrahlen G_1 G_2 (nicht Kathodenstrahlen) aus, die durch dunkle Räume d_1 d_2 von dem in der Mitte des Rohres befindlichen rothen Lichte p, das man dem gewöhnlichen sogenannten positiven Lichte parallel stellen kann, getrennt sind.[1])

Für die Anregung der Röhre im Leiterkreise kommen nach den Versuchen folgende Punkte in Betracht:

1) Wir kommen auf die genaue Betrachtung des Phänomens später zurück.

A. *Einfluss der Vorgänge am primären Condensator*, dahin gehören: 1. Der Abstand der Platten des primären Condensators. 2. Die Höhe des Potentiales in der primären Funkenstrecke, d. h. deren Länge bei gegebener Grösse der Kugeln. 3. Die Beschaffenheit der primären Funkenstrecke. 4. Die Zahl der Entladungen in der primären Funkenstrecke.

B. *Einfluss der Art der Ueberbrückung*. Dahin gehört: 1. Der Einfluss einer metallischen Verbindung überhaupt in der Nähe des primären Condensators auf die Vorgänge in diesem selbst. 2. Die besonderen Eigenschaften des Systems mit *einem* Knoten. 3. Einfluss der Zahl und Lage der Brücken bei den mehrfachen Knotensystemen.

C. *Einfluss von Vorgängen am Endcondensator*, dahin gehört u. a.: 1. Das zum Anleuchten der Röhren erforderliche Potentialgefälle. 2. Einfluss der Gegenwart anderer leuchtender Röhren im Felde neben der untersuchten.

A. Einfluss der Vorgänge am primären Condensator.

1. Einfluss des Plattenabstandes am primären Condensator.

Eine Verringerung des Abstandes der Platten des primären Condensators erhöht die Deutlichkeit und Helligkeit der Erscheinungen; die Capacität wird vergrössert und demnach unter sonst gleichen Umständen auch die Zahl der bei jeder Einzelentladung des primären Condensators auftretenden Oscillationen. Bei den Bestimmungen der Dämpfung haben wir die primären Platten möglichst weit von den secundären (bis $\varepsilon_1 = 6{,}7$ cm) aufgestellt, weil sonst trotz der Isolierung der Plattenränder (Wied. Ann. 48. p. 556) und möglichster Fernhaltung aller Staubtheilchen und Feuchtigkeit auf den die Platten tragenden Glasplatten und den verbindenden Hartgummistäben nicht zu vermeiden war, dass Electricität von den primären Platten auf die secundären überging, wodurch das ganze System der Lecher'schen Drähte stark geladen wurde, was bei den Electrometermessungen sehr störend werden konnte.

2. Einfluss des Potentials der primären Funkenstrecke.

Unsere Versuche haben ergeben, dass die Höhe der Potentiale von relativ kleinerem Einfluss ist; ja im Gegentheil wurden bei Erhöhung der Entladungspotentiale bei Entfernung der

Kugeln des primären Condensators in vielen Fällen die Erscheinungen undeutlicher.

3. Einfluss der Natur der primären Funkenstrecke.

Um die Oscillationen in den secundären Leitern scharf ausgeprägt zu erhalten, ja um überhaupt Resonanzschwingungen beobachten zu können, müssen bekanntlich die Funken am primären Condensator knatternde, scharf abgebrochene sein.

Alles, was die Plötzlichkeit der Entladung vermindert, verschlechtert ihre Fähigkeit Entladungsröhren zum Leuchten zu bringen, bez. *Resonanzschwingungen* überhaupt hervorzurufen, was die Plötzlichkeit dagegen steigert, erhöht auch diese Fähigkeit.

Es galt zunächst diese Erscheinung aufzuklären, ihren Grund näher festzustellen und damit über den Mechanismus des ganzen Entladungsvorganges überhaupt mehr Licht zu verbreiten. Wir werden für eine Reihe von Fällen zeigen, *dass, sobald die Dämpfung der Schwingungen im secundären Kreise wächst, die Erscheinungen undeutlich werden, dass dagegen, sobald sie abnimmt, die Erscheinungen an Deutlichkeit zunehmen.*

Die Ursache für den Einfluss der Dauer des Funkens auf die Deutlichkeit ist folgende: In den knatternden Funken gibt die Gesammtentladung nur zu wenigen primären Oscillationen Veranlassung, während bei den nicht knatternden Funken jede einzelne Entladung lange anhält und viele Oscillationen hervorruft, über die sich noch Oscillationen höherer Ordnung lagern, die den einzelnen Theilen des Leitersystems entsprechen. Letztere haben andere Schwingungsdauer, wie die Hauptoscillationen, auch sind sie in den Phasen gegen die erste Oscillation verschoben. Jede einzelne dieser Oscillationen ruft Resonanzschwingungen hervor, deren Schwingungsdauer nur von dem Bau der secundären Kreise abhängt, aber es sind dies Resonanzschwingungen von Oscillationen verschiedener Phasen, die einander stören und die Dämpfung vergrössern.

Wir untersuchen nach einander den Einfluss verschiedener Bedingungen in dieser Richtung.

α) Einfluss der Electricitätsquelle.

Die Zufuhr der Electricität von dem Innern der *Influenzmaschine* zu den primären Platten erfolgt verhältnissmässig langsam im Vergleich zum Entladungsvorgange in der primären Funkenstrecke, falls dessen Dauer nicht durch losgerissene Theilchen etc. verlängert wird. In einer Entladung geht also fast nur die Electricitätsmenge über, welche auf den Platten des primären Condensators angehäuft ist: die Entladung dauert nur sehr kurze Zeit an, die Phänomene sind sehr deutlich.

Weit weniger als die Influenzmaschine eignet sich das *Inductorium* für diese Versuche.

Wir haben gelegentlich auch die Versuche mit einem Inductorium von mittlerer Grösse (12 cm Funkenweite) und einem sehr grossen Inductorium von Carpentier (45 cm Funkenweite) angestellt; dabei ergab sich, dass die Felderregungen zwischen den Platten des Endcondensators nicht diejenige Stetigkeit und Regelmässigkeit haben, welche zum Studium der Entladungsvorgänge in gasverdünnten Räumen unbedingt nothwendig ist. Es ist dadurch wiederum die schon früher von dem einen von uns vertretene Ansicht bestätigt worden, dass die Influenzmaschine vor dem Inductorium für Versuche auf dem Gebiete der Entladungen grosse Vorzüge hat.

Die Verwendung der Influenzmaschine dürfte für gewisse Fälle auch insofern den Vorzug verdienen, als man bei der Berechnung der Selbstinduction und der Capacität des primären Oscillators und damit seiner Schwingungsdauer nicht auf das theoretische Bedenken stösst, wie man beim Inductorium die mit den primären Leitern dauernd verbundenen Windungen des Inductoriums mit ihrer Selbstinduction und Capacität in Rechnung setzen soll. H. Poincaré bemüht sich zu zeigen, dass man das Inductorium gerade wegen seiner hohen Selbstinduction und grossen Capacität gegenüber dem Oscillator vernachlässigen kann. Uns scheint es, als ob man nicht ganz so, wie es H. Poincaré thut, hierbei schliessen dürfe. H. Poincaré's Betrachtungen (Poincaré, Electricité et Optique II p. 160 f. 1891) kommen darauf hinaus zu zeigen, dass der Spannungsausgleich durch die ganze Spirale hindurch während der Dauer der Os-

cillationen der primären Strecke verschwindend klein ist, diese sich zur Inductionsspirale also verhält wie ein kurzes Pendel von geringer Masse mit schnellen Schwingungen zu einem sehr langen Pendel mit grosser Masse, an welches es angehängt ist. Nun ist freilich richtig, dass man das Inductorium, nachdem der Ausgleich in Gestalt eines Funkens stattgefunden hat, für die folgende kurze Dauer der Oscillationen, als *Ganzes* betrachtet als stromlos ansehen kann, die Erfahrung lehrt aber, dass es gerade die den Enden nächsten Theile der Spirale sind, von denen fortwährend noch Electricität nachfliesst. So lange man also nicht weiss, aus welcher Tiefe der Inductionsspirale während der Oscillationen noch Electricität nach der primären Funkenstrecke hinfliesst, wie viele von den Windungen man also eigentlich noch zum Leitersystem der primären Strecke zu rechnen habe, scheint uns eine Berechnung der Capacität des primären Oscillators, welche nur die Plattengrösse, Drahtlänge und Kugelgrösse derselben in Betracht zieht, von theoretischen Bedenken nicht ganz frei zu sein.

Wenn trotzdem zahlreiche Forscher Resultate bei Anwendung des Inductoriums erhalten haben, so mussten sie sich durch besondere Maassnahmen knatternde Funken von kurzer Dauer erzeugen.

β) Einfluss des Rauhwerdens der Kugeln und der Zerstäubung derselben.

Verschlechtert wird das Auftreten des Leuchtens durch die Verunreinigung der Kugeln des primären Condensators durch Staub, das Rauhwerden derselben bei fortgesetztem Gebrauch, und die Anhäufung von losgerissenen Staubtheilchen in der Luft. Alle diese Factoren befördern mehr oder weniger das Auftreten von Nachentladungen und ein Ausströmen von Electricität bei niedrigeren Potentialen als dem Abstand der Kugeln entspricht, wenn einmal eine Entladung eingetreten ist, und zwar von Electricität, die bei dem Inductorium aus den tiefer gelegenen Theilen desselben nachströmt, bei der Influenzmaschine aber von den Platten kommt; nur dass bei letzterer die Menge der nachströmenden Electricität weit kleiner ist.

Bei der Discussion der Entladungserscheinungen in Luft von Atmosphärendruck, bei der Besprechung der Aureole etc. werden wir hierauf eingehender zurückzukommen haben.

Will man in diesem Falle scharfe Erscheinungen erhalten, so muss man mit Hrn. Töpler zwischen Maschine und den Kugeln des primären Condensators *feuchte Schnüre* einschalten. Wir brauchten dies nicht zu thun, wahrscheinlich weil seine Kugeln leichter corrodirt wurden, als unsere mit Platinhauben versehenen. Ebenso erklärt sich auch, warum man reinere Resultate bei der Anwendung des Inductoriums erhält, wenn man zur Zuleitung schlechte Leiter (feuchte Schnüre, mit verdünnter Schwefelsäure gefüllte Capillaren oder dergl. verwendet).[1] Dieselben verhindern das zu schnelle Nachströmen von Electricität und damit eine gegenseitige Störung der einzelnen Erregungen.

γ) Einfluss des Durchblasens eines Luftstromes zwischen den Kugeln.

Ebenso wie feuchte Schnüre wirkt nach Classen ein Durchblasen eines Luftstromes zwischen den beiden Kugeln; dadurch wird der losgerissene und zwischen den Kugeln befindliche Metallstaub fortgeführt. Dass in einzelnen Fällen hierbei von einigen Beobachtern eine Verschlechterung der Resonanz beobachtet worden ist, liegt wohl an der verschiedenen Art des Blasens; ein feuchter und ein trockener Luftstrom werden sich verschieden verhalten etc. Dieser Unterschied wird bei Betrachtung der Entladungen bei höheren Drucken genauer zu untersuchen sein.

δ) Einfluss des Mediums, in dem die primären Funken überspringen.

1. Dielectricum: Paraffinöl.

Während alles, was die Dauer der Funken in der primären Funkenstrecke verlängert, die Anregbarkeit von Röhren herabsetzt, so muss dadurch, dass die Plötzlichkeit der Entladung vermehrt wird, die Deutlichkeit der Erscheinungen gesteigert werden, so z. B. dadurch, dass man an Stelle der Luft ein anderes Dielectrium von grösserer dielectrischer Starrheit setzt. Dies bestätigt der Versuch. Wird an Stelle der primären Funkenstrecke ein Gefäss gesetzt, in welches die Kugeln des Hauptcondensators beiderseitig durch die Gefässwand eingeführt sind und füllt man das Gefäss mit einem gut isolirenden Mittel, etwa Paraffinöl, so erhält man sehr heftig knatternde, scharf

1) Vgl. z. B. Töpler, Wied. Ann. **46.** p. 306. 464 u. 642. 1892.

abreissende Funken. Die Leuchterscheinungen im secundären Kreise werden besonders schön.[1]) Die Maximalamplitude B (vergl. p. 3) der Spannungen am Ende der secundären Leitung ist bedeutend grösser und die Dämpfung ergibt sich im Resonanzkreise viel geringer, als wenn sich die Funken in Luft bilden. Hier tritt nach jeder Hauptentladung das Dielectricum zwischen die Kugeln und verhindert ein Nachströmen von Electricität und damit das Zustandekommen der störenden Nebeneregungen im secundären Kreise. Ein weiterer Vortheil dieser Anordnung besteht darin, dass das Kugelmaterial nicht so heftig angegriffen wird, als wenn die Entladung in der Luft vor sich geht.

Als Beispiel führen wir Zahlen an, welche mit den p. 22 gegebenen unmittelbar vergleichbar sind.

Eine Brücke ($k_0{}^0$): $E = 4{,}5$; $B = 4{,}4$, alles Andere nahezu wie unten. Das logarithmische Decrement δ ergibt sich hier etwa zwölfmal kleiner als dort, wo die Entladung in Luft erfolgte.

2. Dielectricum: Verdünntes Gas.

Vor allem interessant war es ein verdünntes leuchtendes Gas zu untersuchen, bei welchem, wie weiter unten noch genauer ausgeführt werden wird, die durch eine Oscillation angeregten Bewegungen andauern während Zeiten, die schon commensurabel werden mit der Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schwingungen (sie dauern also ca. 10^{-8} Sec.). Zu den Versuchen wurde folgende Anordnung getroffen. Die beiderseitig tubulirte Glaskugel A Fig. 3 (s. f. S.) enthielt eine Funkenstreke, welche durch mehr oder weniger weites Herausziehen der Zuführungsdrähte durch die Kautschuckstopfen S_1 und S_2 verschieden lang gemacht werden konnte. Da nicht bis zu sehr niedrigen Drucken evacuirt wurde, genügte der Verschluss durch die Stopfen. Dieser Raum stand mit einem Manometer und einer Luftpumpe in Verbindung. Ihm parallel war eine Funkenstrecke F geschaltet. Die Verbindungen einerseits nach der

1) Die Herren Ed. Sarasin und De la Rive haben (Arch. de Genève (3) **28.** p. 306. 1892) gezeigt, dass auch die Interferenzfähigkeit der Wellen, die von einem mit einer solchen Funkenstrecke versehenen Hauptcondensator geliefert werden, erheblich gesteigert ist.

Maschine hin, andererseits nach dem primären Condensator waren wie aus der Figur ersichtlich getroffen. Wurde bei höheren Drucken und ca. 2—3 cm langer Funkenstrecke in *A* Electricität zugeführt, so ging die Entladung nur zwischen *F* über, wo bei einer Funkenstrecke von 4 mm das Potential bis auf ca. 28 electrostatische Einheiten = 8400 Volt gesteigert wurde. Die Erscheinungen in einem ziemlich weit evacuirten, weiten, mit Metallplatten geschlossenen, an Stelle des Endcondensators angehängten Glascylinder waren die „typischen". Nun wurde *A* sucessive ausgepumt. In dem Momente, wo sich die Ladungen

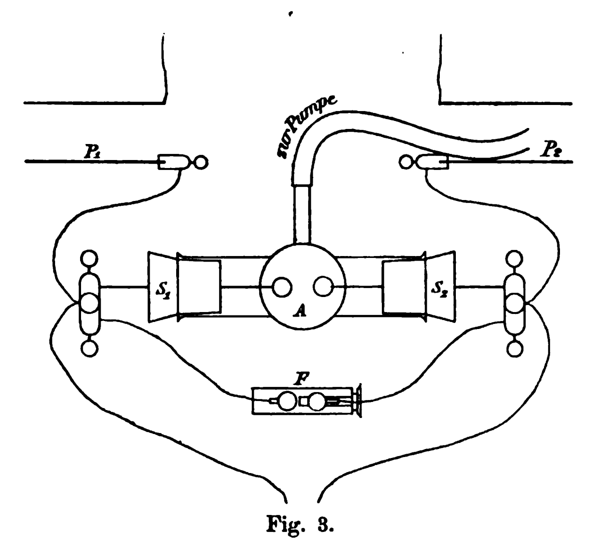


Fig. 3.

anstatt in *F* in *A* in Gestalt eines langen röthlich leuchtenden Fadens ausgleichen, verschwindet jede Spur von Leuchten in dem Endfelde. Bestimmungen der Dämpfungsverhältnisse lassen erkennen, dass fast keine Spur von Resonanz zu Stande kommt. δ ergab sich fast zu unendlich. Dabei ist das Potentialgefälle im primären Kreise dasselbe wie vorher. Das leuchtende Gas verhält sich also „wie ein Leiter". Damit soll durchaus nicht gesagt sein, dass es zu einem wirklichen Leiter geworden ist; die Erscheinung erklärt sich vielmehr vollkommen aus der Annahme, dass sich hier über die Wirkung des ersten Stadiums der Entladung sofort die in der Phase gegen sie verschobenen Wirkungen späterer Stadien lagern.

3. **Primäre Funkenstrecke durch eine Geissler'sche Röhre ersetzt.**

Schaltet man bei *A* eine Geissler'sche Röhre ein, so hört ebenfalls jede Resonanz auf, so wie die Entladung statt durch die Luftstrecke *F* durch diese hindurchgeht. Dabei ist offenbar der Potentialunterschied an den Enden der Röhre gerade so hoch wie vorher an den durch Luft von Atmosphärendruck getrennten Kugeln. Hier kommt zu der Wirkung des leuchtenden Gases noch die specifische Wirkung des Entladungsrohres hinzu, das sich selbst wieder wie ein Condensator verhält (vgl. spätere Abhandlungen). Zu der Grundschwingung des Hauptcondensators gesellen sich dann immer noch die Eigenschwingungen der Röhre, wodurch die Resonanzschwingungen vollkommen gestört werden.

ε) Einfluss der Belichtung der primären Funkenstrecke durch ultraviolettes Licht.

Zu den das Zustandekommen kräftiger Resonanzerscheinungen störenden Einflüssen gehört in ganz hervorragendem Maasse die Bestrahlung der primären Funkenstrecke mit ultraviolettem Lichte. Hr. H. Hertz wurde schon bei seinen ersten Versuchen auf den Umstand aufmerksam, dass er nur schwache Funken in einem resonirenden Drahtkreis erhielt, wenn die beiden Funkenstrecken von einander aus gesehen werden konnten; es zeigte sich, dass das bei der Entladung auftretende ultraviolette Licht die Ursache ist.

Wir haben näher untersucht, worauf diese eigenthümliche Wirkung des ultravioletten Lichtes beruht und gefunden, dass sie in einer ungeheuer vermehrten Dämpfung der Schwingungen im secundären Kreis ihren Grund hat. Die zahlreichen Versuche wurden nach folgendem Schema angestellt: Parallel zu der primären Funkenstrecke war durch möglichst kurze Verbindungsstücke (damit nicht die *mehrfachen* Hauptknoten störend auftraten, vgl. Wied. Ann. 48. p. 581) eine zweite Funkenstrecke mit nahe gleich grossen Kugeln geschaltet, deren Länge mikrometrisch gemessen werden konnte. Am Ende der secundären Leitung war eine lange, weite, mit Metallplatten verschlossene Glasröhre direct angeschlossen, die soweit evacuirt wurde, dass sie möglichst empfindlich war. Die Brücke wurde nahe der Mitte der Lecher'schen Drähte aufgelegt und zwar an die

Stelle, welche der „typischen Erscheinung“ (vgl. p. 5) entsprach. Durch Flaschen war, wie oben Wied. Ann. 48. p. 563 angegeben, das Electrometer angeschlossen.

Es wurde zunächst bei unbelichteter primärer Funkenstrecke die Brücke möglichst genau eingestellt und durch Verkleinern der Parallelfunkenstrecke bis zum Einsetzen der Funken das Potential mit Hülfe der Paschen'schen Tafel bestimmt. Nun wurde auf die Stelle der negativen Kugel, von der die Entladung ausging[1]), das Licht einer electrischen Bogenlampe mittels einer Quarzlinse concentrirt. Sofort ändert das Entladungsgeräusch seinen Charakter, die Röhre am Ende leuchtete nur noch sehr matt. Die Brücke lag noch immer an der Stelle grösster Resonanz, wovon man sich durch Hin- und Herschieben derselben leicht überzeugen konnte. Durch die Belichtung wird also nichts an der Periode der Schwingungen geändert (*b* blieb noch immer nahezu gleich *a*).

Durch Verkleinern der Parallelfunkenstrecke wurde auf's Neue das Potential bestimmt. Es ergaben sich Potentialerniedrigungen z. B. von 22 auf 16, also um 6 Electroden *E* (1800 Volt). Ferner wurde die Dämpfung im secundären Kreise bestimmt. Nun wurde das Licht abgesperrt und die primäre Funkenstrecke soweit verkleinert, dass jetzt ohne Licht die Funken in ihr bei *demselben* niedrigen Potential (in unserem Beispiele bei 16) übergingen. Da die Maschine immer die gleiche Electricitätsmenge lieferte, so war sowohl das Potential wie alles andere, z. B. auch die Zahl der Entladungen, dieselbe wie früher. Dennoch leuchtete die Röhre am Ende weit heller und eine Bestimmung der Dämpfung ergab jetzt ein etwa zehn- bis zwölfmal kleineres logarithmisches Decrement als vorher bei Belichtung der Funkenstrecke und demselben Potential. Dass also bei belichteter primärer Funkenstrecke weder ein deutliches Leuchten, noch überhaupt ein kräftiges Ansprechen eines auf Resonanz abgestimmten secundären Kreises eintritt, liegt vor allem an der Vermehrung der Dämpfung im secundären Kreis, die der Wirkung des ultravioletten Lichtes auf die empfindliche Kathodenstelle eigenthümlich ist.

Diese störende Wirkung des ultravioletten Lichtes ist

1) Vgl. E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. **33.** p. 241. 1888.

wohl hauptsächlich dadurch bedingt, dass durch das Licht das Material der Kugeln zerstäubt wird. Dann befinden sich in der Funkenstrecke einzelne leitende Theilchen, zwischen denen sich Partialentladungen ausbilden können, zu denen Entladungen von den Kugeln aus übergehen etc.

4. Einfluss der Zahl der Entladungen in der primären Funkenstrecke.

Je grösser die Zahl der Entladungen im primären Condensator ist, um so günstiger ist dies für das Leuchten. Erscheinungen, die bei grosser Funkenstrecke und kleiner Anzahl von Entladungen undeutlich waren, wurden deutlich, sobald man die Funkenstrecke verkleinerte, wodurch zugleich die Entladungszahl vergrössert wurde. Auch wurden bei vergrösserter Entladungszahl durch schnellere Umdrehung der Maschine bei constantem Potential die Erscheinungen immer deutlicher.

B. Einfluss der Art der Ueberbrückungen auf die Anregbarkeit der Röhren und die Klarheit der Erscheinungen.

1. Einfluss einer metallischen Verbindung in der Nähe des primären Condensators auf die Art der primären Entladung.

Der metallisch an die secundären Platten S_1 und S_2 des primären Condensators angeschlossen und durch diese dem primären Entladungskreis gegenübergestellte, durch die Lecher'schen Drähte gebildete und durch Brücken begrenzte, secundäre Kreis übt eine *Rückwirkung* auf den primären Kreis aus.

Dies zeigt sich, wenn auf die vorher unüberbrückten Drähte an irgend einer Stelle, gleichviel ob diese einem Bauch oder einem Knoten entspricht, eine Brücke übergelegt wird; alsdann wird das Geräusch der primären Funken viel lauter. War es vorher nur ein unregelmässiges Geräusch, so stellt sich ein intensives scharfes Geknatter ein; dabei wird der Glanz der Funken lebhafter, meistens weisslicher, wenn vorher die Farbe mehr röthlich war.

Diese verstärkende Wirkung ist um so auffallender, je näher dem primären Condensator die Brücke aufgelegt wird.

Dabei ist es gleichgültig, ob ausser der dem primären Condensator nächstliegenden Brücke noch andere aufliegen, ob die Drähte hinten in einen Condensator auslaufen, oder blind endigen oder endlich zur Erde abgeleitet sind oder nicht.

Die Wirkung der Ueberbrückung macht sich bis auf Entfernungen der Brücke vom primären Condensator von 3—4 m bemerklich[1]). An jeder Brücke und natürlich auch an der ersten, wird ein Theil der von den Platten des primären Condensators in das Drahtsystem tretenden Energie wie an jeder Erweiterung oder Verengerung des Drahtsystems zurückgeworfen; indessen dürfte hierdurch die Wirkung nur zum Theil erklärbar sein. Offenbar spielt die Dauer der Funken eine wesentliche Rolle und das Phänomen lässt sich wohl folgendermassen am einfachsten erklären: Von der Maschine her fliesst der einen Platte, etwa P_1, verhältnissmässig langsam $+E$ zu, welche die Platte auf ein gewisses Potential $+V$ ladet, der anderen die entsprechende Quantität $-E$, wodurch diese auf das Potential $-V$ geladen wird. Wir wollen annehmen, die Lecher'schen Drähte seien zur Erde abgeleitet, also auf dem Potentialniveau Null. Ist dann C die Capacität je eines Plattenpaares, so ist

$$\pm E = C.(\pm V).$$

Auf den P_1 und P_2 gegenüberstehenden secundären Platten des primären Condensators S_1 und S_2 sind die Electricitätsmengen $-(1/n)E$ und $+(1/n)E$ aufgehäuft, wenn n die Bindungszahl der Condensatoren ist. Sowie das zur primären Entladung nöthige Potential erreicht ist, setzt ein Funke ein, in dem sich die Electricitätsmengen $+E$ und $-E$ ausgleichen, indem sie von den Platten P_1 und P_2 ab und in die Funkenstrecke hineinfliessen. Der ganze Vorgang und die Dauer des Funkenstromes ist so kurz, dass, wenn keine Brücke übergelegt ist, die bisher auf den secundären Platten S_1 und S_2 gebundenen Electricitäten $-(1/n)E$ und $+(1/n)E$ einfach durch die langen Drähte zur Erde abfliessen. Leiten wir die Drähte nicht zur Erde ab, so findet der Ausgleich doch erst so spät statt, dass eine eventuelle Rückwirkung erst an den Platten S_1 und S_2 ankommt, wenn der Funken zwischen P_1 und P_2 schon aufgehört hat. Legen wir aber

1) Hr. Josef Ritter v. Geitler-Armingen macht auch neuerdings auf diese Erscheinung aufmerksam, ohne einen bestimmten Grund für dieselben anzugeben; er vermuthet Reflexionserscheinungen an der Brücke. Inaug. Diss. Bonn p. 22 u. 23. 1893.

in nicht zu grosser Entfernung von dem primären Condensator eine Brücke über die Lecher'schen Drähte, schliessen also die beiden secundären Platten metallisch kurz, so trifft die von S_1 kommende negative Electricität die von S_2 kommende positive, noch ehe der Funke aufgehört hat. In Folge der Selbstinduction des Schliessungskreises (S_1 — Brücke — S_2), welche der in ihr sich bewegenden Electricität eine Art Trägheit verleiht, wird sogar ein Theil der von S_2 kommenden Electricität bis S_1 vordringen und eine Umladung herbei führen. Wird aber die Platte S_1 positiv geladen, so stösst sie den auf P_1 noch vorhandenen Rest positiver Electricität ab und treibt ihn mit gesteigerter Geschwindigkeit in die Kugeln der Funkenstrecke hinein; diese nach sehr kurzer Zeit erfolgende Umladung der Platten S_1 und S_2 unterstützt also das Abfliessen der Electricität von den Platten P_1 und P_2: die Funken werden kräftiger, heller, aber auch kürzer, daher knatternder und weisser. Daher ist es auch zur Erhaltung scharfer Erscheinungen so wichtig, am Endcondensator die ersten, dem primären Condensator zunächst gelegenen, Brücken des betreffenden Knotensystems überzulegen (vgl. p. 21).

Nach kurzer Zeit kehrt die Schwingung in dem Kreise (S_1 — Brücke — S_2) zwar ihre Richtung um, aber es scheint, als ob der Funken schon nach der ersten Vollschwingung vollständig erloschen ist; daher schadet die nächste Umladung, die wieder etwas — Electricität nach S_1, etwas + nach S_2 führt, nichts mehr. Wegen der raschen Dämpfung der Bewegung im Kreise (S_1 — Brücke — S_2) würde überhaupt die Höhe der Ladung nur einen Bruchtheil des vorhergehenden betragen, den unterstützenden Einfluss dieser also nur zum kleinsten Theile aufheben können.

Aus der Entfernung der Brücke, bis zu der die Wirkung beobachtet werden konnte, ergibt sich, dass die Dauer der „wirksamen" primären Funken jedenfalls sehr kurz, vielleicht von der Ordnung 10^{-8} Sec. ist, wofür auch andere Anzeichen sprechen.

Die hier versuchte Erklärung wird auch durch die Beobachtung gestützt, dass weder die Zahl der Entladungen, noch das Potential V wesentlich geändert wird bei Auf- und Absetzen der Brücke innerhalb der wirksamen Entfernung. Ersteres

wurde mit Hülfe des rotirenden Spiegels, letzteres mit Hülfe einer parallel geschalteten Funkenstrecke festgestellt. Die Wirkung der Ueberbrückung kann also nur darin bestehen, dass der ganze Entladungsvorgang auf eine kürzere Zeit zusammengedrängt wird, dass der Ausgleich der aufgehäuften Electricitäten beschleunigt wird. In der That war der Einfluss der Brücke selbst ganz in der Nähe des primären Condensators weit kleiner, wenn die an sich sehr kurz dauernden Funken in Paraffinöl (vgl. p. 10) verwendet wurden.

Die Thatsache, dass eine weitere Verkürzung einer im Verhältniss zu allen Schallbewegungen so sehr kurzen Zeit, wie sie der Entladung entspricht, auf den Charakter des Schalles einen so grossen Einfluss hat, erklärt sich folgendermaassen: Die Stärke des Schalles ist einmal durch das Auseinandertreiben der Luft bei dem Auftreten des Funkens und zweitens durch das Wiederzusammenfallen derselben beim Aufhören des Funkens und die dadurch erzeugten Druckänderungen bedingt. Die Stärke des Schalles hängt also von der maximalen Temperatur in der Funkenstrecke ab. Dauert der Funke bei gegebener abfliessender Electricitätsmenge und gegebenem Potential eine verschieden lange, wenn auch nur kurze Zeit, so würde, falls keine Strahlung einträte, stets die Temperatur der Funkenbahn die gleiche sein und damit auch die Stärke des Knalles. Die Ausstrahlung der Gase ist aber bekanntlich ausnehmend gross; in Zeiten, die den Zeiten zwischen zwei Zusammenstössen[1]) der Molecüle vergleichbar sind, werden bereits sehr grosse Energiemengen abgegeben, also auch in Zeiten, die mit den Zeitdauern der Funken commensurabel sind. Infolgedessen können bei gleicher bewegter Electricitätsmenge länger andauernde Funken die Luft nicht so hoch erhitzen wie kürzere, selbst wenn die Dauer derselben etwa von der Ordnung 10^{-8} Sec. ist; dann wird aber die Stärke des Schalles wesentlich herabgesetzt.

Der Einfluss dieser Erscheinung auf die Entladungserscheinungen am Endcondensator ist der, dass bei den kurz dauernden Funken die Entladungsbilder heller und stetiger werden.

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **37.** p. 233. 1889.

Für alle weiteren Studien, bei denen es uns auf möglichst stetige und reine Entladungsbilder im Felde des Endcondensators ankam und Knotensysteme mit mehreren Brücken benutzt wurden, war diese Erscheinung von grosser Wichtigkeit; wir haben sie benutzt und ausser der letzten Ueberbrückung eines Knotensystems, welche das Endfeld scharf abgrenzte, immer auch eine Ueberbrückung möglichst nahe an dem Hauptcondensator vorgenommen. Erst wenn die ersten und die letzten Brücken auflagen, war das Entladungsbild hell, die mittleren Brücken konnten eventuell fehlen.

2. Besondere Eigenschaften des Systems mit einem Knoten.

Die von uns als „typisch" bezeichnete Erscheinung, die sich durch besondere Klarheit auszeichnet (vgl. p. 5), kommt immer nur dann deutlich zu Stande, wenn nur *eine* Brücke aufgelegt ist, und zwar auf einem bestimmten Punkt, den Knoten des Systems mit einem Knoten, der nahe der Mitte der Drahtbahn liegt.

In diesem Falle haben die zu beiden Seiten der Brücke liegenden Drahtkreise dieselbe Schwingungsdauer, sie schwingen Unisono. Die ausgesprochenste Wirkung tritt ein, wenn ausserdem die Schwingungsdauer des primären Kreises nahezu mit derjenigen des secundären übereinstimmt.

In der That ergibt die Theorie, dass alsdann die Amplitude der Potentialschwankungen B an den Platten des Endcondensators ein Maximum erreicht. Denn setzt man

$$b^2 = h a^2,$$

so wird der Ausdruck für B p. 3 ein Maximum, wenn

$$b^2 (1 - h)^2 + 2 a^2 (1 + h)$$

ein Minimum wird; dies tritt ein für $-2b^2 + 2b^2 h + 2a^2 = 0$ oder für

$$h = 1 - \frac{a^2}{b^2}.$$

Nun ist (vgl. p. 3) a^2 klein gegen b^2, also erreicht B wirklich ein Maximum für eine Brückenlage, für die $h = 1$, also b gleich a ist.

Auch directe Messungen der Potentiale am Endcondensator, sei es durch parallel geschaltete Funkenstrecken, sei

es mit Hülfe des Electrometers, ergaben, dass B in diesem Falle ein Maximum annimmt.

Die „typischen“ Erscheinungen treten also auf, wenn das maximale Potentialgefälle am Endcondensator von Platte zu Platte ein möglichst grosses ist.

Vor allem war aber in diesem Falle die Dämpfung ausserordentlich klein. So erhielten wir für ein Drahtsystem, für das war:

$f_1 = 30 \times 30\,\text{cm}^2$	$L = 440\,\text{cm}$	$r_2 = 10\,\text{cm}$
$\varepsilon_1 = 6{,}7\,\text{cm}$	$b = 30$ „	$\varepsilon_2 = 10$ „
$l = 13$ „	$a = 0{,}05$ „	

die folgenden zusammengehörigen Werthe

$B = 5$ *Elst. E.*	$E' = 100\,\text{cm}$
$p = 300$	$T = 556\,\text{cm}$
$E = 2\,\text{cm}$	$T = \text{ca.}\ 4 . 10^{-8}$
$V = 5$ *Elst. E.*	

woraus sich ergibt $\beta = 3750$ und $\delta = 1{,}5 \times 10^{-4}$, also noch kleiner als der von Hrn. Bjerknes für seinen secundären, allerdings vom primären Kreise völlig losgetrennten Kreis erhaltene Werth 2×10^{-3} (a. a. O. p. 88).

In dem Falle, in dem die „typische“ Erscheinung auftritt, sind die Resonanzschwingungen demnach ausserordentlich wenig gedämpft. Nach ca. 6700 Schwingungen sind die Amplituden erst auf den 2,7 ten Theil ihres Anfangswerthes, d. h. auf $1/e$ desselben herabgesunken.

3. Einfluss der Lage der Ueberbrückungen auf dem Lecher'schen Drahtsystem bei mehrknotigen Systemen.

In Betreff der *Art der Ueberbrückung* haben sich folgende allgemeine Resultate ergeben:

Eine Ueberbrückung lässt die Röhre viel heller erscheinen, als wenn keine solche vorhanden ist. Dies tritt besonders hervor, wenn man die Erscheinungen vergleicht, wenn keine Brücke überliegt und wenn man das System mit einem Knoten überbrückt. Auf die speciell hierbei eintretenden Erscheinungen werden wir bei der Beschreibung der Phänomene zurückkommen.

Beim Ueberbrücken der beiden Knoten des zweifachen Systemes findet stets ein weit helleres Leuchten statt, als wenn

nur eine Brücke übergelegt ist; dies liegt, wie schon erwähnt, an der geringeren Dämpfung der Schwingungen im letzteren Falle (vgl. w. u.).

Bei Ueberbrückung gewisser Knoten in der Mitte leuchtet das Rohr nur, wenn auch Knoten an den Enden überbrückt sind, so bei der Brückenlage k_3^1 nur, wenn auch k^3_3 überbrückt ist. Bei diesem System IV findet bei höheren Drucken ein Aufleuchten statt, wenn k_3^3 und k_3^0 überbrückt sind, sonst nicht.

Im System III leuchtet bei gewissen Drucken die Röhre, wenn alle drei Brücken aufliegen, sie leuchtet nicht, wenn eine Brücke an den Enden fehlt, wohl aber, wenn die in der Mitte fehlt.

Auch im System II unterstützen sich die beiden Brücken wesentlich.

Im Speciellen können sich natürlich diese Verhältnisse bei Anwendung verschiedener Röhren, Condensatoren, primärer Funkenstrecken etc. ändern; das Hauptresultat ist: *Je mehr zu einander zugehörige Knoten eines Systems im allgemeinen überbrückt sind, um so besser spricht ein Rohr am Endcondensator an und um so heller ist das Leuchten.*

Um tiefer in die Verhältnisse einzudringen, haben wir eine Reihe von Messungen der Potentiale und der Dämpfungen ausgeführt.

Durchweg ergab sich die Helligkeit und maximale Potentialhöhe kleiner und die Dämpfung grösser, wenn nicht alle, sondern nur einige der Brücken übergelegt wurden, welche zu einem Knotensystem gehören. Namentlich das Fehlen der vorderen, d. h. dem primären Condensator nächsten Brücken hat grossen Einfluss in dieser Richtung (vgl. o. p. 17).

Wurde z. B. bei dem oben (p. 20) angegebenen System nur der Knoten k_1^0 des zweifachen Systems überbrückt, so ergab sich $E = 1$, $B = 3$; wurde auch noch k_1^1 überbrückt, so war $E = 8$, $B = 3$ ($p = 280$, $T = 2{,}6 \, . \, 10^{-8}$); δ berechnet sich aus diesen Zahlen im zweiten Falle ca. 8mal kleiner, als im ersten Falle. Wir finden also: Die Schwingungen erfolgen regelmässiger und dauern länger, wenn beide Brücken bei dem System mit zwei Knoten aufliegen, als wenn eine fehlt.

Dagegen war bezüglich der Dämpfung kein sehr grosser

Unterschied zwischen den grossen resonirenden Drahtkreisen ($k_0{}^0$) und den kleineren ($k_1{}^0$ und $k_1{}^1$), wenigstens der Grössenordnung nach zu bemerken; die Schwingungen in beiden wurden etwa gleich stark gedämpft.

So ergaben sich z. B. bei dem genannten System

bei dem einfachen Knotensystem[1]): $E = 1{,}7$; $B = 9{,}5$; $E' = 50$; $V = 4$; $p = 280$; $T = 4 \,.\, 10^{-8}$;

bei dem doppelten Knotensystem: $E = 0{,}7$; $B = 6{,}6$; $T = 2{,}6 \,.\, 10^{-8}$, also das logarithmische Decrement für das einfache (δ_1) und das zweifache Knotensystem (δ_2): $\delta_1 = 4{,}6 \times 10^{-4}$, $\delta_2 = 3{,}5 \times 10^{-4}$. —

Wie eine Saite um so reinere Töne gibt, an je zahlreicheren correspondirenden Knoten sie unterstützt wird, um so einfacher ist auch der Complex von Oscillationen zusammengesetzt, welcher auf die Entladungsröhre wirkt, je zahlreichere Brücken aufgesetzt sind, und um so ungestörter findet die Anregung durch dieselben statt.

Will man ferner eine Saite in Unterabtheilungen möglichst rein schwingen lassen, so unterstützt man dieselbe in den Knoten am Ende; das Analogon hierzu haben wir oben (48. p. 569) für das Lecher'sche Drahtsystem kennen gelernt; auch sonst bestehen noch manche Analogien für die beiden Gruppen von Phänomenen.

C. Einfluss von Vorgängen am Endcondensator.

1. Das zum Anleuchten erforderliche Potentialgefälle.

Die Feldenergie pro Volumeneinheit braucht nur innerhalb sehr enger Grenzen zu schwanken, um ein verdünntes Gas noch zum Leuchten zu bringen. So leuchtete ein mit Luft gefülltes 8 cm langes, 5 cm weites mit Glasplatten geschlossenes bis auf ca. $p = 2$ mm Hg-Druck evacuirtes Rohr noch deutlich zwischen den kreisförmigen Platten ($r_2 = 10$ cm) des Endcondensators, als der mittlere Knoten überbrückt war und der Plattenabstand 45 cm betrug. Dabei war die maximale Potentiadifferenz B, auf welche die Platten geladen wurden gleich 4 electrostatische Einheiten (E. S. E.) (1200 Volt). Dies ergibt in dem homogenen Felde zwischen den Platten, in dem die Röhre sich

1) Eine etwas andere Endcapacität als oben p. 20 wurde verwendet, daher grösseres δ_1.

befand, einen Potentialgradienten von rund 0,1 E. S. E. oder 30 Volt pro Centimeter Länge.

Die Energie pro Volumeneinheit ergibt sich angenähert wie folgt: Aus r_2 und ε_2 ergibt sich die Capacität zu 0,55 cm, wenn wir die gewöhnliche electrostatische Formel zu Grunde legen. In Wirklichkeit ist die Capacität für die rasch wechselnden Ladungen freilich wohl etwas grösser. Mit Rücksicht auf die Potentialdifferenz von 4 E. S. E. ergibt sich hiernach eine Ladung von 2,2 E. S. E. Der grösste Theil dieser Ladung vertheilt sich auf die ca. 314 qcm grosse Innenfläche des Condensators. Wir wollen annehmen, dass sie ganz zwischen den Condensatorplatten enthalten sei. Dann kommen auf 1 cm^2: 0,007 E. S. E.

Jeder Kubikcentimeter enthält also im Maximum die Energie $^1/_2 \times 0{,}007 \times 0{,}1 = 0{,}00035$ Ergs. Hiervon wird aber selbst wieder nur ein geringer Bruchtheil zur Erregung der Molecüle verwendet. Durch directe Versuche haben wir uns davon erzeugt, dass es ohne wesentlichen Einfluss auf die Dämpfung ist, ob ein zwischen den Endcondensatorplatten befindliches Gas leuchtet oder nicht. Wenn wir also annehmen, dass die hier bei jeder Halbschwingung auftretende Feldenergie von $3{,}5 . 10^{-4}$ Ergs pro Volumeneinheit ganz zum Anregen des Gases und zur Unterhaltung seines Leuchtzustandes verwendet werde, so haben wir hierfür nur eine obere Grenze festgesetzt; in Wirklichkeit ist dieser Betrag jedenfalls noch viel kleiner. Eine andere im nächsten Abschnitt zu behandelnde sehr wichtige Frage ist, ob nicht schon die hier vom Gase aufgenommene und in eine andere Form von Energie umgewandelte geringe Feldenergie *einem leuchtenden Gase* die Eigenschaft verleiht, welche die Leiter im gewöhnlichen Sinne characterisirt, nämlich, dass sie die Feldenergie zu sich hinziehen und eben dadurch zu dem werden, was man mit dem Worte „Leiter“ kennzeichnen will.

Der oben ermittelte Maximalbetrag der Energie, welcher in einem Felde hinreichend oft wechselnd ein verdünntes Gas schon zum Leuchten bringt, gibt Veranlassung zu einigen interessanten Vergleichen. Da eine Dyne etwa dem Druck von 1 mgr auf seine Unterlage gleichkommt, so ist der Energievorrath, welcher 1 cbcm Gas zum Leuchten bringt, wenn er

nur genügend rasch sich ändert und häufig genug denselben Maximalwerth erreicht, noch kleiner als der Energievorrath, welcher in 1 mgr aufgehäuft ist, wenn es nur um 0,0035 mm über seine Unterlage erhoben ist. Mit einem einzigen Erg Energie könnten bei ca. 10^8 Zeichenwechseln in der Secunde caet. par. 2860 cbcm verdünnte Luft zum hellen Leuchten gebracht werden. Dies kann bei Verwendung leuchtender Gase unter dem Einflusse rascher Wechselströmungen für Beleuchtungszwecke von praktischer Bedeutung werden; jedenfalls haben wir hier bei weitem die ökonomischste Lichtquelle, die wir kennen.

Die Anzahl der Molecüle in 1 cbcm Gas bei 0^0 und $p = 760$ mm Druck ist etwa $21 . 10^{18}$, also bei unserem Drucke von $p = 2$ mm etwa $6 . 10^{16}$. Das einzelne Molecül braucht zu seiner Anregung also im Durchschnitt nicht mehr als $6 . 10^{-21}$ Ergs.

Andere Gase, so Kohlensäure, Wasserstoff, Leuchtgas verhalten sich analog.

Wir wollen noch die hier zum Anregen verwendeten Energiemengen vergleichen mit den zur Dissociation der Molecüle nöthigen Energiemengen. Um 1 gr H_2 zu dissociiren, sind mehr als 100 000 gr Cal. oder $4,2 . 10^{12}$ Ergs nöthig.[1]) Bei unseren Verdünnungen ist 1 gr H_2 in ca. $4,3 . 10^6$ cbcm enthalten. Um diese Menge zum Leuchten anzuregen, braucht man $1,5 . 10^3$ Ergs also ca. $3 . 10^9$ mal weniger als zu ihrer Dissociation. Würde die ganze Energie einer Entladung zur Dissociation des Gases verwendet werden, so würde doch erst 1/3 000 000 000 zersetzt werden.

2. Einfluss der Gegenwart anderer leuchtender Röhren als der untersuchten im Felde.

Ausser diesen durch die Vorgänge im primären und secundären Leiterkreise bedingten Einwirkungen ist für die Menge der Energie, welche einem im Felde des Endcondensators befindlichen Gase zuströmt, noch eine andere Erscheinung maassgebend. Es zeigt sich nämlich, dass *beim Eintritt des Leuchtens durch electrische Oscillationen in dem Felde um den Condensator herum eine Aenderung der Energievertheilung eintritt.*

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **18.** p. 509. 1883.

Man überzeugt sich hiervon leicht schon durch sehr einfache Versuche: Würde die Vertheilung der Oscillationen in dem Raume um den Condensator unabhängig sein von der Gegenwart leuchtender Gase, so dürfte die Intensität des Leuchtens eines Rohres nicht geändert werden, wenn an irgend einer Stelle ein anderes Gas zum Leuchten gebracht wird (abgesehen von den in der folgenden Arbeit zu besprechenden Schirmwirkungen. Dies ist aber nicht der Fall.

Neben dem Endcondensator wurde ein Rohr *R* mit inneren Belegen (p. 566) mit seiner Axe parallel der Axe des Condensators aufgestellt, und zwischen die Platten in ziemlicher Entfernung von dem Rohr *R* eine evacuirte Kugel *K* gebracht. Beim Verschieben der Brücke leuchtete stets zunächst *R* hell auf, gleich darnach aber *K* und zugleich blasste *R* stark ab. Es ist, als ob zunächst ein grosser Theil der im Condensator sich anhäufenden Energie sich durch *R* ausgliche, dann aber ein Theil derselben durch *K*, wodurch der auf *R* kommende Theil wesentlich herabgesetzt wird.

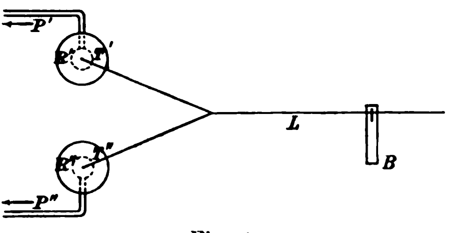


Fig. 4.

Wir haben die Erscheinung genauer verfolgt und wollen, da sie eine wesentliche Rolle bei der Anregbarkeit von gasverdünnten Räumen spielt, schon hier auf einige diesbezügliche Versuche eingehen, wiewohl wir erst später die Bedeutung der Erscheinung genauer ins Auge fassen wollen.

Um die Erscheinungen möglichst klar und einwandfrei zu erhalten, haben wir zwei vollkommen getrennte Felder, also *zwei Endcondensatoren*, verwendet. Um dieselben mit den primären Condensatoren zu verbinden, wurde jeder der beiden Lecher'schen Drähte *L* an einer bestimmten Stelle in zwei gegabelt (Fig. 4); jedes der beiden dadurch entstehenden Drahtsysteme wurde zu dem einen von zwei übereinanderstehenden Endcondensatoren *T'* und *T''* geführt. Die Gabelung fand in verschiedenen Abständen von den Endcondensatoren statt. Wir benutzten u. a. einen Schliessungskreis von folgenden Constanten:

Hauptcondensator:	Drähte:	Jeder der Endcondensatoren:
$f_1 = 30 \times 30\,cm^2$	$L = 440$ cm	$r_2 = 5$ cm
$\varepsilon_1 = 6{,}7$ cm	$b = 30$ „	$\varepsilon_2 = 10$ „
$l = 13$ „	$a = 0{,}05$ „	

Die Gabelung der Lecher'schen Drähte fand bei verschiedenen Versuchsreihen in 160, 55 und 18 cm Entfernung von der Axe der Endcondensatoren statt; benutzt wurde das einfache und zweifache Knotensystem ($k_1{}^0 = 28$, $k_1{}^1 = 384$ cm).

Zwischen die Platten der Endcondensatoren waren zwei gleiche 9 cm lange, 5 cm weite, an den Enden durch Glasplatten geschlossene Glascylinder R' und R'' axial gestellt, von denen jeder mit einer besonderen Quecksilberluftpumpe communicirte. Die Röhren standen so, dass die Platten den Endcondensator nicht berührten; die auftretenden Potentialschwankungen waren ferner immer so klein, dass ein directer Uebergang von Electricität durch die Zwischenräume zwischen Condensatorplatte und Rohr völlig ausgeschlossen war.

Die Versuche fanden in folgender Weise statt: Zunächst wurde das eine Rohr (R') so weit evacuirt, dass es bei richtiger Brückenstellung schön leuchtete und die typische Erscheinung zeigte. Dann wurde das andere (R'') bis zu demselben Drucke evacuirt. In dem Momente wo (R'') aufleuchtete, verminderte sich die Helligkeit in (R') bedeutend; sie wuchs sofort wieder wenn (R'') in irgend einer Weise (z. B. durch Berühren und Wiederloslassen der Condensatorplatten oder durch Erhöhung oder Erniedrigung des Druckes unter den unteren Grenzwerth, bei dem unter den obwaltenden Verhältnissen noch ein Leuchten stattfand) zum Erlöschen gebracht wurde. Wurde umgekehrt R') zum Erlöschen gebracht, so stieg die Helligkeit in (R''). Wir haben diese Wechselwirkung nach den verschiedensten Richtungen hin durch Aenderungen des Druckes in dem einen oder anderen Sinne untersucht. Da sich bei den hier vorkommenden Druckänderungen die Dielectricitätsconstante des verdünnten Gases nur unmerklich ändert (die Brückenlage war die gleiche, mochte nur eine oder beide Röhren leuchten), so kann diese durchgreifende Aenderung der Energievertheilung in den beiden Condensatoren nur mit dem *Leuchten* des Gases zusammenhängen. Wir sehen: ein zum Leuchten gebrachtes Gas

zieht die Feldenergie gewissermaassen in sich hinein. Die Schwingungen an den Platten des Endcondensators gleichen sich vornehmlich durch das leuchtende Gas hindurch aus. In diesem Sinne „*absorbirt*" ein leuchtendes Gas electrische Feldenergie.

Welche Bedeutung dies für den ganzen Process des Leuchtens eines Gases unter der Wirkung electrischer Entladungen hat, wollen wir, wie erwähnt, später ausführlicher erörtern. Hier möge nur noch die Bemerkung Platz finden, dass für alle theoretischen Berechnungen über die Feldenergie eines Condensators, bei dem sich zwischen den Platten nur leuchtendes Gas befindet, gerade dieses Resultat von hoher Bedeutung ist: *Befindet sich in einem Theile des Condensatorfeldes ein leuchtendes Gas, so ist die Energievertheilung eine ganz andere, als in einem homogenen Felde; die Energieröhren ziehen sich in grösserer Menge nach dem Gase hin und durch dieses hindurch, es hat für den electrischen Kraftfluss eine grössere Permeabilität, als die umgebenden nichtleuchtenden Gasmassen.*

VI. Schlussbetrachtungen.

Wir wollen zum Schluss dieses ersten Abschnittes unserer Mittheilungen versuchen, den Einfluss der Dämpfung etc. auf das Leuchten aus allgemeinen Anschauungen zu erklären.

Um die Vorstellungen bei den späteren Betrachtungen zu fixiren, möchten wir hier folgende Andeutungen über die Vorstellungen geben, die wir uns von den Vorgängen in einem von Oscillationen durchsetzten Gase gebildet haben. Eine genauere Ausführung derselben behalten wir weiteren Mittheilungen vor.

Einer von uns hat früher gezeigt[1]), dass sich die optischen Erscheinungen erklären lassen, wenn wir sie auf Bewegungen der electrischen Ladungen der Atome bezw. Molecüle zurückführen, die wir diesen zuschreiben müssen, um die Thatsachen der Electrolyse zu erklären, der sog. „Valenzladungen" (H. v. Helmholtz, Faraday-Rede), vgl. auch die Arbeiten von Richards[2]) und Stoney[3]). Ebert berechnete aus der Strahlung des Natrium-Molecüles, wie sie durch

1) H. Ebert, Arch. de Genève. **25.** p. 489, 1891

2) Richards, Verh. der physikal. Gesell. Berlin. **10.** p. 73. 1891.

3) G. J. Stoney, Phil. Trans. Dubl. Soc. (2) **4.** p. 563. 1891.

E. Wiedemann[1]) in absolutem Maasse der Grössenordnung nach ermittelt worden war, die Grösse dieser Ladung, das „Elementarquantum“ zu $1,4 . 10^{-11}$ $cm^{3/2}$ $gr^{1/2}$ sec^{-1}; Richards findet dieselbe Electricitätsmenge aus den Messungen des electrochemischen Aequivalentes von F. und W. Kohlrausch gleich $1,29 . 10^{-10}$ $cm^{3/2}$ $gr^{1/2}$ sec^{-1}; Stoney giebt sie (bei ihm „das Electron“ genannt) zu $3 \cdot 10^{-11}$ $cm^{3/2}$ $gr^{1/2}$ sec^{-1} an; wie man sieht, stimmen diese Zahlen in der Grössenordnung mit einander überein.

Nehmen wir an, dass den electrischen Ladungen in Bezug auf das materielle Molecül eine gewisse Bewegungsfreiheit (im Sinne der gewöhnlichen Mechanik) zukommt, so können wir die Wärme- und Lichtstrahlung auf Oscillationen der electrischen Valenzladungen zurückführen, Oscillationen, wie sie unter gewöhnlichen Bedingungen schon bei den Zusammenstössen zweier Molecüle erregt werden, und deren Ausbreitung für den Fall einer geradlinigen Bahn von Hertz experimentell und theoretisch studirt worden ist.

Halten wir an dem landläufigen Bilde, welches man sich von der Erscheinung der electrischen Ladung gemacht hat, fest, wonach diese darin besteht, dass auf der Oberfläche der Molecüle sich eine Schicht „Electricität“ befindet, so ist es am einfachsten sich die Oscillationen, welche sich dem umgebenden Felde mittheilen, durch „Verschiebungen“ der electrischen Molecülladungen hervorgebracht zu denken. In diesem Sinne können wir, wenn wir uns auf den alten Standpunkt stellen, was im vorliegenden Falle den Vortheil grösserer Anschaulichkeit bietet, von „verschobenen Valenzladungen“ reden. In der „Grösse der Verschiebung“ haben wir ein Maass für den Grad, um welchen der augenblickliche electrische Zustand des Molecüles von dem Gleichgewichtszustande entfernt ist.

Jedem Molecüle kommt je nach seinem Baue und den durch diesen bedingten in ihm wirksamen Kräften ein bestimmtes System von electrischen Eigenschwingungen seiner Valenzladungen zu, welche das Spectrum bestimmen. Die Schwingungszahlen der Grundschwingungen hängen von den Dimensionen des Molecüles ab, wie bei einem durch eine Bahn von geringem Widerstande sich entladenden Condensator.

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 5. p. 509. 1878.

Wenn wir, wie es bei den vorliegenden Versuchen geschieht, die Molecüle eines verdünnten Gases durch electrische Schwingungen von der Schwingungszahl 10^8 zum Leuchten anregen, so entspricht dieser Vorgang dem Spiel der primären Funkenstrecke, welches in dem durch den Condensator und den anliegenden Theilen des Drahtsystems gebildeten Schliessungskreise Schwingungen erregt, die dann in dem Gase solche von über millionen Mal grösserer Schwingungszahl hervorrufen. Die electrischen Oscillationen, die wir zur Lichterregung verwenden, repräsentiren gewissermassen nur die Bewegung des streichenden Bogens, unter dessen Einfluss die Eigenschwingungen einer Saite (hier der Valenzladungen der einzelnen Gasmolecüle) angeregt werden; es findet eine „Transformation" von Schwingungszahlen von der Ordnung 10^8 auf solche von der Ordnung 10^{14} und höher hinauf statt; der Mechanismus dieses Vorganges lässt sich durch die allgemeinen Gleichungen der reinen Mechanik darstellen; man geht dabei zweckmässig von derjenigen Form derselben aus, die ihnen H. von Helmholtz in seinen „Principien der Statik monocyklischer Systeme" gegeben hat; denn es lässt sich zeigen, dass die monocyklischen Gesetze auf die hier in Betracht kommenden Formen oscillatorischer Bewegungen Anwendung finden und namentlich über den Umsatz der Energie bei denselben wichtige Anhaltspunkte gewähren.

Hierbei ist nicht zu vergessen, dass die in den Drähten ankommenden den Endcondensator ladenden und entladenden Oscillationen zunächst Eigenschwingungen des als Condensator gedachten Entladungsrohres oder selbst einzelner Theile desselben anregen, wie schon die Schichtenbildung (vgl. die vorläufigen Mittheilungen und spätere Untersuchungen) zeigt, und in den meisten Fällen wohl erst diese, an sich schon hohen Schwingungen, in die die Lichtemission veranlassenden Molecülschwingungen transformirt werden.

Die Ursache für die Thatsache, dass wiederholte Potentialschwankungen in so hohem Grade die Leuchterscheinungen befördern, ergibt sich aus dieser Auffassung folgendermaassen.

Damit ein Leuchten eintritt ist es nöthig, dass eine oscillatorische Verschiebung in den Molecülen eintritt, die einen gewissen Betrag erreicht. Eine einmalige, wieder aufgehobene Verschiebung im Felde wird eine ebensolche in den Molecülen

erzeugen, die aber nur schwache Schwingungen innerhalb der Molecüle hervorrufen wird. Eine solche erste Verschiebung kann auch zu einer Polarisation der Gasmoleküle resp. der Wandungen der Gefässe führen. Folgt aber der ersten Verschiebung eine zweite, dritte u. s. f., so werden sie die Wirkung der ersten unterstützen. Diese Auffassung wird ausserdem durch die folgenden zwei experimentell festgestellten Thatsachen gestützt.

1. Infolge von Oscillationen üben leuchtende Gase eine Schirmwirkung auf ankommende Oscillationen aus (vgl. die nächste Abhandlung) wie eine leitende Metallmasse; sie absorbiren also die Energie der auftreffenden Oscillationen; während dies nicht leuchtende nicht oder doch nur in weit geringerem Maasse thun. Denn in dem Auftreten von Schwingungen in den Molecülen von gerade so grossen Amplituden und Schwingungsdauern, dass sie von uns als Licht wahrgenommen worden, kann an sich zunächst kein Grund gesehen werden, dass nur *leuchtende* Molecüle electrische Oscillationen absorbiren.

2. Polarisirte Molecüle, wie sie bei der statischen Ladung der Wandung der Glasgefässe vorhanden sind, befördern in hohem Grade die Erregung von Gasen durch Oscillationen, indem wohl zunächst diese Molecüle durch die ankommenden Oscillationen angeregt worden; ihre Erregung überträgt sich dann auf die anderen. Dies wird dadurch bewiesen, dass ein an sich schwer anregbares Rohr, das aber einmal angeregt war, eventuell noch nach Tagen anspricht, wenn man es ruhig liegen lässt; es verliert aber sogleich diese Eigenschaft, wenn man es der ganzen Länge nach mit dem Finger ableitend berührt, oder besser noch mit einer Flamme überfährt.

Betrachten wir nun ein Gas in einem electrischen Felde, wie in demjenigen zwischen den Platten unseres Endcondensators, in dem Potentialschwankungen vorhanden sind, und in dem der ersten Potentialschwankung eine zweite so schnell folgt, dass die von der ersten angeregten Oscillationen der Molecüle noch nicht vollkommen, sei es durch Strahlung, sei es durch innere Dämpfung verschwunden sind, oder dass einige Molecüle, die an den Wänden sich befinden, noch polarisirt sind; dann werden stets einige dieser Molecüle sich in solchen Lagen befinden, dass die neu ankommenden Oscillationen die

in ihnen vorhandenen Schwingungen steigern resp. die vorhandenen Polarisationen vergrössern. Da nun bereits in Oscillation befindliche Molecüle und bereits polarisirte in höherem Grade als nicht oscillirende und nicht polarisirte im Stande sind Oscillationen aufzunehmen, so wird durch jede neue ankommende Potentialschwankung die Intensität der Oscillationen der Molecüle bezw. ihre Polarisation vermehrt und eine Bewegung in ihnen hervorgerufen, die eventuell zu einem Leuchten führt. In einem solchen Zustande sind aber die Molecüle besonders geeignet, electrische Energie zu absorbiren und so in gewisser Hinsicht die Rolle von Leitern zu übernehmen.

Der ganze Vorgang lässt sich, falls wir von den an den Wänden haftenden polarisirten Molecülen absehen, mit dem an einem in einem Phosphoroskop befindlichen Körper vergleichen, der durch die Phosphorescenz selbst ein erhöhtes Absorptionsvermögen für das Licht und einen entsprechend grösseren Umwandlungscoefficienten der auffallenden Lichtstrahlen in emittirte erhält. Bei einem solchen Körper wird bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit des Apparates die Helligkeit sehr schnell wachsen.

Sehr gut kann man ein von Oscillationen durchsetztes Gas auch mit einem Körper vergleichen, der durch Strahlen von grosser Wellenlänge allmählich bis zur Weissgluth erhitzt werden kann; hier ist die Analogie mit der Absorption electrischer Oscillationen auch noch darin vorhanden, dass mit zunehmender Temperatur d. h. mit zunehmender Amplitude der Schwingungen des Körpers, auch die Absorption für die auffallenden Wellen wächst.

Je schneller aber die einzelnen Entladungen des primären Condensators aufeinanderfolgen, eine um so grössere Anzahl Molecüle wird bei einer bestimmten Entladung infolge der Erregung durch die vorhergehende noch in einem Zustande sein, der sie befähigt, die durch eine zweite Entladung zugeführte Energie zu absorbiren. Je geringer die Dämpfung ist, je grösser die Zahl der Oscillationen bei jeder einzelnen Entladung ist, um so intensiver muss also auch die Anregung sein.[1])

Erlangen, Physik. Inst. d. Univ., Februar 1893.

1) Eine weitere Abhandlung über diese Gegenstände folgt demnächst.

2. *Versuche über electrodynamische Schirmwirkungen und electrische Schatten; von H. Ebert und E. Wiedemann.*[1])

(Im Auszuge mitgetheilt in den Berichten der physikal.-med. Soc. zu Erlangen, Sitzung vom 8. Febr. 1892.)

Eine der überraschendsten Erscheinungen, welche rasche electrische Oscillationen darbieten, ist der fast unüberwindliche Widerstand, den gute Leiter ihrem Eindringen entgegensetzen. Denn hierdurch erscheinen die den anderen Gebieten electrischer Erscheinungen entnommenen Begriffe von Leiter und Nichtleiter vollkommen ihre Bedeutung vertauscht zu haben; jedenfalls zeigen diese Erscheinungen, dass jene Begriffe mit Rücksicht auf das neue, durch die Versuche des Hrn. H. Hertz eröffnete Gebiet zu erweitern sind.

Ausser der Undurchdringlichkeit für rasch wechselnde periodische electrische Zustände zeigen die Metalle aber auch noch Wirkungen, welche ihre Umgebung, wenn sie von solchen electrischen Schwingungen erfüllt ist, bis zu einer gewissen Entfernung hin ergreift; man hat diese Wirkungen passend „*Schirmwirkungen*" genannt. So fand Hr. Hertz[2]), dass eine Röhre von ca. 15 cm Durchmesser, deren Mantel aus 24 dünnen Kupferdrähten gebildet war, keine electrodynamische Wirkung von schnellen electrischen Oscillationen aus dem äusseren Felde in das innere übertreten lässt. Hier äusserte sich also die Schirmwirkung bis auf Entfernungen von mindestens 1 cm um jeden Draht herum.

J. Stefan[1]), der einer primären Funkenstrecke eine secundäre als Empfänger in 20 cm Entfernung parallel gegenüberstellte, fand weiter, dass eine 1 m lange, 10 cm hohe Metalltafel nicht nur dann die Wirkung der primären Oscillation auf den Empfänger aufhob, diesen also electrisch „be-

---

1) Die Untersuchung wurde mit Unterstützung des Elisabeth Thompson Fund in Boston ausgeführt.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 37. p. 401. 1889.

schattete", wenn sie zwischen, sondern auch dann, wenn sie knapp hinter der secundären Funkenstrecke stand. Ein Leiter übt also auch vor sich electrodynamische Schirmwirkungen aus. Hr. L. Boltzmann[2]), der den Fall, dass electrische Planwellen senkrecht auf eine ebene Metalloberfläche auffallen, genauer discutirt hat, zeigte, dass nur ein verschwindender Bruchtheil der kinetischen Energie der Planwelle überhaupt die Trennungsfläche überschreitet, dass die Welle vielmehr fast vollkommen total reflectirt wird. Die Schirmwirkung vor der Metalltafel Stefan's kommt also wohl dadurch zu Stande, dass die ankommenden und reflectirten electrischen Wellen eine stehende Welle bilden, für die an der Wand ein Knoten der electrischen Kraft gelegen ist. In einem zum Verhältniss zur Länge der Welle kleinen Abstande vom Knoten ist die Amplitude aber dann klein, wenn die Amplituden der ankommenden und reflectirten Welle nahe gleich sind. Dies ist nach den Boltzmann'schen Untersuchungen in der That für die electrischen an Metallen reflectirten Wellen der Fall, daher hier die Schirmwirkung.

Mit solchen Schirmwirkungen hängen eng zusammen die von Hrn. Holtz[3]) zuerst eingehend studirten, sonst so räthselhaften electrischen Schattenbilder. Eine eingehende Discussion derselben kann erst bei der Behandlung der Entladungserscheinungen bei höheren Drucken gegeben werden.

Wir haben dieses Erscheinungsgebiet der electrodynamischen Schirmwirkungen und der dadurch bedingten Schattenwirkungen für electrische Schwingungen eingehender untersucht. Dabei war zunächst die Methode für den vorliegenden Zweck zu vereinfachen und specieller auszubilden. Zunächst musste es günstiger sein, an Stelle der schnell gedämpften, verhältnissmässig unregelmässigen und vielen Zufälligkeiten ausgesetzten primären Oscillationen, wie sie Stefan verwendete, die langandauernden secundären eines resonirenden Drahtkreises zu verwenden. Wegen ihrer grossen Symmetrie und Klarheit haben wir die Lecher'sche Anordnung gewählt, und zwar

1) J. Stefan, Wied. Ann. **41.** p. 416. 1890.
2) L. Boltzmann, Wied. Ann. **48.** p. 63. 1893.
3) Holtz, Göttinger Nachr. 1880. p. 545.

mit einer Brücke, und die Versuche alle im Schwingungsfelde des Endcondensators angestellt. Ferner war die schwierig zu beobachtende secundäre Funkenstrecke, wie sie auch Hr. Hertz verwendete, durch ein bequemer zu handhabendes und empfindlicheres Hülfsmittel zu ersetzen. Ausgezeichnet haben sich auch hier die „empfindlichen" Röhren bewährt, die wir schon in der vorausgehenden Arbeit verwendet haben. Um möglichst einfache Versuchsbedingungen zu haben, verwendeten wir gewöhnlich nur einfache an beiden Enden zugeschmolzene Röhren (ohne die Bd. 48 p. 566 beschriebenen inneren Belege) von 0,2—2 cm Durchmesser und 10—50 cm Länge bei beliebiger Wandstärke. Ein solches Rohr leuchtet, genügend evacuirt, in der Nähe des Endcondensators meist ohne weiteres an (über die „Anregbarkeit" vgl. a. a. O. p. 565), durch sein Erlöschen ist es dann sehr geeignet, das Vorhandensein eines Schattens, d. h. eines Raumes im Felde zu constatiren, in dem keine Oscillationen oder doch nur solche von geringer Intensität vorhanden sind.

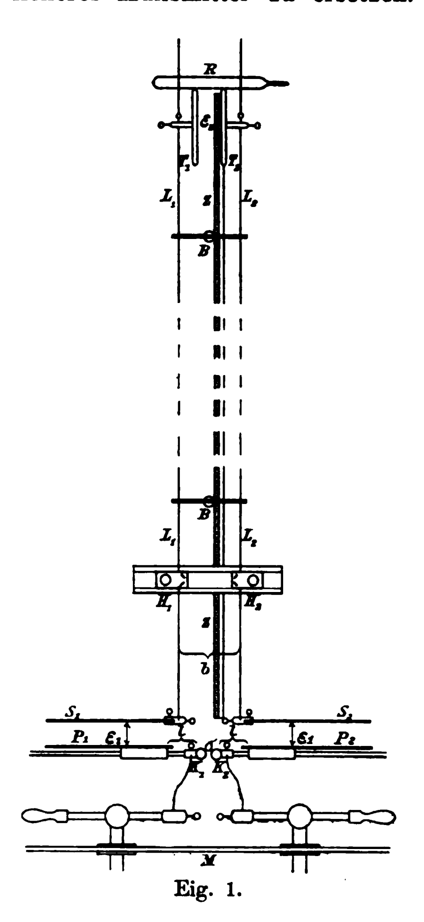


Fig. 1.

Alle die im Folgenden beschriebenen Versuche sind durch diese Anordnung so augenfällig geworden, dass sie leicht einem grossen Auditorium vorgeführt werden können.

Das wesentlich Neue, das sich aus diesen Versuchen ergeben hat, liegt in dem sicheren Nachweis, dass auch verdünnte Gase, wenn sie nur in irgend einer Weise in den Zu-

stand des Leuchtens versetzt werden, die Eigenschaft der Leiter annehmen, um sich herum einen electrodynamischen Schattenraum zu bilden. Auf die hieraus sich ergebende allgemeine Definition des Leiters kommen wir später zurück.

Apparat. Anregbarkeit electrodenloser Röhren.

Bezüglich der Beschreibung der einzelnen Theile des Apparates verweisen wir auf unsere frühere Arbeit (Bd. 48 p. 549).

Wie erwähnt, haben wir die sehr langsam abklingenden Schwingungen eines secundären Entladungskreises und zwar in der Lecher'schen Form benutzt (vgl. Fig. 1). Zum Experimentiren sehr bequem ist z. B. folgende Anordnung (wegen der Bezeichnungen vgl. die Tabelle in der früheren Arbeit Bd. 48 p. 564):

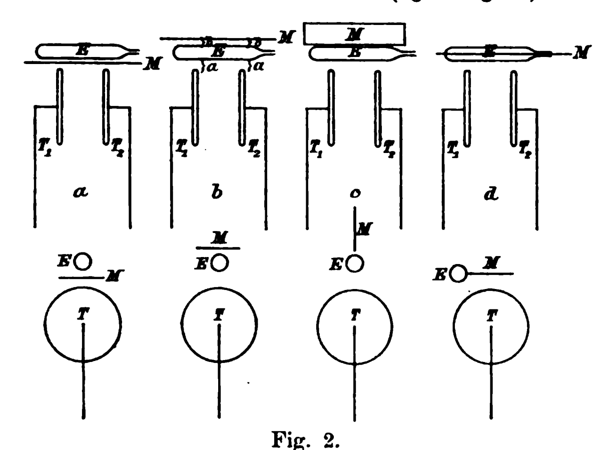


Fig. 2.

Hauptcondensator:	Drähte:	Endcondensator:
$f_1 = 30 \times 30\ \text{cm}^2$	$L = 400$ cm	$r_2 = 10$ cm
$\varepsilon_1 = 2$ cm	$b = 30$ „	$\varepsilon_2 = 6$ „
$l = 0$ „	$a = 0,05$ „	

Kugeldurchmesser: 3,5 cm.

Die Erscheinungen sind am deutlichsten bei einfacher Ueberbrückung.

Auf der von den Lecher'schen Drähten L_1 und L_2 abgewandten Seite werden in der Nähe der Endcondensatorplatten T_1 und T_2 (vgl. Fig. 2) die zu untersuchenden Röhren und die Schirme aufgestellt.

Die empfindliche Röhre *E*, welche zur Untersuchung des Feldes diente, stand stets parallel der Axe des Endcondensators und quer vor den Platten T_1, T_2 desselben. Lineare schirmende Körper lagen mit ihrer Längsrichtung gleichfalls parallel der Axe des Endcondensators. Die Figuren 2 *a* bis 2 *d* erläutern die bei einem rechteckigen Metallblech *M* benutzten Lagen und zwar gibt die obere Figurenreihe eine Ansicht von oben, die untere eine Ansicht von der Seite. Dabei liegt bei 2 *a*, 2 *b* und 2 *d* die Ebene des Schirmes in der Verticalebene, bei 2 *c* in der Horizontalebene.

Wir führen folgende Bezeichnungsweise ein, die zugleich bei allen anderen Schirmen angewendet werden soll:

Liegt der schirmende Körper *M* zwischen dem Condensator *T* und der leuchtenden Röhre *E* (Fig. *a*) und erlischt die Röhre, so sagen wir, der Körper schirmt hinter sich, liegt die leuchtende Röhre *E* (Fig. *b*) zwischen Condensator und schirmendem Körper und erlischt die Röhre, so schirmt letzterer vor sich; hat der Schirm die Lagen 2 *c* und 2 *d*, so sagen wir, er schirme neben sich; im ersteren Falle geht die Ebene des Schirmes durch die Condensatoraxe, im letzteren nicht.

Die empfindlichen Röhren waren meist bei einem geeigneten, mittels des Mac Leod-Manometers (vgl. p. 561) gemessenen, Drucke von der Pumpe abgeschmolzen, um alle Theile des Feldes bequem mit ihnen untersuchen zu können. Den Druck wollen wir im Folgenden immer mit *p* bezeichnen (Millimeter Quecksilber). Die Röhren fasst man mit isolirenden Holzklammern.

Ein solches Rohr zum Anleuchten zu bringen, bietet mitunter gewisse Schwierigkeiten. *Zunächst handelt es sich also darum, electrodenlose Röhren überhaupt zum Leuchten zu bringen.* Wir werden in einer späteren Abhandlung sehr eingehend die Anregbarkeit von Röhren behandeln. Hier sei nur das für diese Versuche Nothwendige erwähnt.

Zunächst verweisen wir auf p. 565 der vorigen Abhandlung. Dort ist zunächst gezeigt worden: Je weiter die Röhren sind, um so leichter sprechen sie an. Namentlich die dort erwähnten inneren Belege haben wir hier bei den anregenden Röhren vielfach verwendet.

Am leichtesten sprechen electrodenlose Röhren an, wenn

man sie erst mit den Condensatorplatten in Berührung bringt; sie leuchten dann fast immer auf; man kann sie dann auch von den Platten entfernen, ohne dass sie aufhören zu leuchten.

Röhren, welche für sich nicht oder doch nur schwer anregbar sind, sprechen in vielen Fällen leicht an, wenn man ihnen ein leuchtendes Rohr nähert, bez. auch nur an den Condensator ein solches Rohr legt. Eine Röhre E_1 von 2 mm Durchmesser sprach selbst, wenn sie an den Condensator angelegt wurde, nicht an. Sobald aber gleichzeitig eine Röhre E_2 mit inneren Belegen angelegt wurde und diese zu leuchten anfing, sprach das Rohr E_1 an; ebenso, wenn irgend eine andere Röhre, die von selbst anspricht, genähert wurde. Dies steht nicht mit dem p. 24 erhaltenen Resultate in Widerspruch, nach dem die Energie sich zwischen zwei im Felde befindlichen leuchtenden Röhren theilt. E_1 würde, wenn es für sich allein leuchtete, heller leuchten, als wenn E_2 gleichzeitig vorhanden ist; damit E_2 aber zum Leuchten kommt, muss es erst durch die Schwingungen in E_1 angeregt werden. Ja, leuchtet E_2 auch noch weiter, wenn E_1 wieder, nachdem es E_2 angeregt hat entfernt wird, so leuchtet es heller, als während E_1 in der Nähe des Endcondensators sich befindet.

Ein Beipiel für die Anregbarkeit gibt nachfolgender Versuch.

Röhren E_3 und E_4 von 8 und 3 mm Durchmesser waren so in der Nähe des Condensators aufgestellt, dass sie nicht von selbst ansprachen. Man näherte ihnen eine leuchtende Röhre E_5 von 1,2 cm Durchmesser, dann leuchteten sie auf. (Man darf letztere Röhre den Röhren E_3 und E_4 nicht zu weit nähern, da sie sonst die leuchtenden Röhren E_3 und E_4 infolge der eigenen Schirmwirkung wieder zum Erlöschen bringt (vgl. w. u.).

Es ist nicht einmal nöthig, dass das anregende Rohr E_2 resp. E_5 in der Nähe des Endcondensators zum Leuchten gebracht wird. Legt man ein leicht anregbares Rohr R an irgend einer Stelle über die einfach überbrückten Lecher'schen Drähte zwischen Brücke und Endcondensator, und kommt es dort zum Leuchten, so wird in vielen Fällen ein Rohr E in der Nähe des Endcondensators, welches an sich nicht anspricht, angeregt. Leuchtet das Rohr E auch noch nach Fortnahme

von *R* weiter, so ist die Helligkeit in demselben bei Gegenwart und Entfernung von *R* fast dieselbe, wenn auch in letzterem Falle etwas grösser infolge der in *R* abgegebenen Energie (vgl. p. 25).

So leuchtete ein Rohr *E* von 12 cm Länge und 1 cm innerer Weite, gefüllt mit Luft von 1,17 mm Druck, in der Entfernung von 1—2 cm vom Endcondensator aufgestellt, nicht; wurde an irgend einer Stelle zwischen der Brücke und dem Endcondensator ein 50 cm langes, 2 cm weites Rohr *R* mit Luft von 0,23 mm Druck über die Drähte gelegt, so leuchtete *E* in bläulichem Lichte hell auf, sobald *R* in dem ihm eigenen röthlichen Lichte leuchtete.

Diese Eigenschaft haben wir benutzt, um immer mit Sicherheit ein gutes Ansprechen unserer Röhren *E* herbeizuführen. Wir haben zu diesem Zwecke ein weites, gut ansprechendes Rohr mit oder ohne innere Belege — wir wollen es die „Anregeröhre" nennen und stets mit *R* bezeichnen — dauernd an den Endcondensator mittelst Gummibändern so gehängt, dass es beide Platten P_1 und P_2 berührte. Solange die Anregeröhre sich am Condensator befand, leuchteten die meisten Röhren, selbst recht enge und solche ohne Belege, leicht an und die Versuche gingen sehr sicher.

Röhren, die für sich nicht anregbar sind, sprechen oft, wenn auch nicht immer, an, wenn man über die beiden Endcondensatorplatten einen Metallbügel legt und diesen dann so abhebt, dass zwischen ihm und den Platten ein Funken überspringt.

Der Vorgang dürfte bei beiden Fällen der Anregung der sein, dass die Oscillationen von relativ kleiner Schwingungszahl in dem ursprünglichen Leitersystem, sei es in der anregenden Röhre, sei es in dem abgehobenen Metallbügel, in solche von grösserer Schwingungszahl transformirt werden. die dann die relativ unempfindlichen Röhren anregen. In einzelnen Röhren (vgl. unsere zweite Abhandl. in den Ber. der Phys. med. Soc. zu Erlangen p. 32) auftretende stehende Schwingungen haben es uns wahrscheinlich gemacht, dass hierbei in einem Beispiele etwa die 1200. Oberschwingung entsteht.

Resultate.

A. Schirmwirkung von Leitern erster und zweiter Klasse.

1. Schirme aus Metall und überhaupt aus allen Substanzen, die hinter sich schirmen, schirmen auch vor sich und neben sich. Hält man hinter ein leuchtendes Rohr, sodass also das Rohr zwischen Condensator und Schirm liegt, einen solchen Schirm, so erlischt es, wenn die Längen und Abstände beider passend gewählt werden.

Es schirmen: Metalle, selbst in sehr dünnen, vollkommen durchsichtigen Schichten, so z. B. Blattgold, Silber- und Aluminiumblatt; Röhren, die mit Lösungen von Electrolyten und zwar selbst sehr verdünnten gefüllt sind, Cylinder von festem Chlorblei etc.

Nicht schirmen Isolatoren: Glasplatten, Glimmerplatten etc.

2. Eine wachsende Schirmwirkung macht sich in einer allmählichen Verkürzung der Lichtsäule in der Entladungsröhre bemerkbar.

Nähert man dem leuchtenden Rohr E aus grossen Abständen allmählich einen Metallschirm, so verkürzt sich nach und nach die Lichtsäule, bis sie zuletzt auf einen kleinen zwischen den Condensatorplatten gelegenen Rest zusammengeschrumpft ist, der dann bei weiterer Annäheruug ganz plötzlich verschwindet.

3. Rechteckige Metallschirme von gleicher Ausdehnung in der Richtung der Längsaxe der Röhre schirmen vor sich gleich gut, fast unabhängig von ihrer Dimension senkrecht zu der Richtung der Axe der Röhre.

Drähte, die neben dem leuchtenden Rohre ausgespannt sind, schirmen nicht zu weite Röhren fast ebenso gut wie breite Metallbleche von gleicher Länge, ebenso verhalten sich Streifen aus Metalldrahtnetzen.

4. Das Dielectricum, in dem sich der schirmende Körper befindet, ist ohne merklichen Einfluss.

Blanke und mit Kautschuk überzogene Drähte z. B. schirmen gleich gut.

5. Die Länge L des Metallschirmes darf im Verhältnisse zur Länge l der Lichtsäule im leuchtenden Rohr E nicht zu klein sein, wenn noch von ihm Schirmwirkungen hervorgebracht werden sollen.

Bei einem Abstand von 1 cm des Schirmes von der Röhre muss $L = 1/2$ bis $1/3\ l$ sein. Je weiter der Schirm von der Röhre fortrückt, um so länger muss der Schirm sein. Ist der Schirm zu kurz, so wird die Röhre in den Theilen angeregt, welche von dem Schirme weiter entfernt sind. Von ihnen aus werden dann, wie später genauer gezeigt werden wird, auch diejenigen Theile erregt, welche noch der Schirmwirkung des Metalles ausgesetzt sind; aus dem Leuchten der Röhre kann man hier also nicht schliessen, dass die Schirmwirkung fehlt, sondern nur, dass sie nicht ausreicht, jene Anregung zu unterdrücken.

6. Ebene Metallbleche schirmen, sowohl wenn ihre Ebene senkrecht steht zu der Ebene, die durch die leuchtende Röhre und die Condensatoraxe gelegt ist, als auch wenn sie irgend einen beliebigen Winkel mit derselben bildet, ja selbst wenn sie in dieser Ebene liegt. Ihr, der leuchtenden Röhre zugewandter Theil reducirt sich dann auf eine Linie, sie verhält sich wie ein Draht.

Aus diesem Verhalten erklärt sich z. B. das Resultat von Ed. Hagenbach und Zehnder[1]), dass ein Metallschirm, den sie zwischen den primären und secundären Spiegel bei dem Hertz'schen Spiegelversuch stellten, ebenso gut schirmte, wenn seine Ebene parallel, wie wenn sie senkrecht zu der Verbindungslinie der beiden Spiegel stand. Der das Metallblech *rings* umgebende electrodynamische Schattenraum erklärt das Ausbleiben der secundären Funken vollkommen, wenn der im Vergleich zu dem Spiegelabstande grosse und mit der Wellenlänge commensurabele Schirm überhaupt in dem Ausbreitungsgebiete der electrischen Wellen stand.

7. Leiter schirmen auch neben sich, was man in derselben Weise wie ihre Schirmwirkung vor ihnen nachweisen kann.

8. Leiter erster und zweiter Klasse üben in weiten Grenzen gleich gute Schirmwirkungen auf die hier betrachteten Oscillationen aus.

Ein leuchtendes Rohr E von 0,55 cm äusserem und 0,4 cm inneren Durchmesser und 30 cm Länge wird vor den Con-

---

1) Hagenbach-Zehnder, Wied. Ann. **43.** p. 610. 1891.

densatorplatten parallel der Axe derselben aufgestellt und ihm von der dem Condensator abgewandten Seite der schirmende Körper genähert (Fig. 2 *b*). Derselbe bestand aus einer 0,95 cm weiten Glasröhre, die 1. mit Luft von Atmosphärendruck, 2. mit normaler K Cl - Lösung (Leitfähigkeit $\lambda = 911 . 10^{-8}$), 3. mit Wasserleitungswasser, 4. cylindrischen, gegossenen $Pb\,Cl_2$-Stücken (λ viel kleiner als $0{,}4 . 10^{-8}$), 5. Quecksilber $\lambda = 1$ gefüllt war.

In der folgenden Tabelle ist *a* der Abstand des leuchtenden Rohres vom Condensator, *b* der Abstand des Schirmes vom leuchtenden Rohr, in dem sich noch eine deutliche Schirmwirkung geltend macht.

Nimmt *a* zu, so nimmt die Stärke der Erregung ab, nimmt *b* zu, so nimmt die Stärke der Schirmwirkung ab (letztere hängt aber auch von *a* + *b* ab, d. h. von dem Abstand des Schirmes vom Condensator).

a = 0,5 cm	*b*
1. Glasrohr	ohne Wirkung
2. K Cl - Lösung normal	1,8 cm
3. Wasserleitungswasser	0,2 „
4. $Pb\,Cl_2$	—
5. Quecksilber	1,8 „

a = 2,0 cm	*b*
1. Glasrohr	ohne Wirkung
2. K Cl - Lösung normal	4,0 cm
3. Wasserleitungswasser	0,3 „
4. $Pb\,Cl_2$	1,0 „
5. Quecksilber	4,2 „
6. Metallschirm (7 cm × 25 cm, die Längsrichtung lag parallel zur leuchtenden Röhre	ca. 4,0 „

Dass das Wasserleitungswasser so geringe Schirmwirkung ausübt, erklärt sich aus der sehr grossen Reinheit desselben.

9. Je enger die leuchtende Röhre ist, in um so grösserer Entfernung macht sich die Schirmwirkung eines angenäherten Metallschirmes geltend.

Eine 1,2 cm weite Röhre E_1 und eine 0,3 cm weite E_2 wurden nach einander parallel zu der Condensatoraxe so aufgestellt, dass ihre Axen 2 cm von den Plattenrändern entfernt waren und die Entfernung bestimmt, in der ein 25 cm langer, 6 cm breiter hinter die Röhren gehaltener Zinkschirm *M* (die Röhren lagen zwischen Schirm und Condensator, wie in Fig. 2 *b* angegeben ist) dieselben auslöschte. Es geschah dies in einer

Entfernung von der äusseren Rohrwand bei Rohr E_1 von 0,2 cm, bei Rohr E_2 von 1,5 cm. Die entsprechenden Entfernungen des Schirmes von der Rohraxe sind also bei Rohr E_1 0,8 cm, bei Rohr E_2 1,7 cm.

10. Bei abnehmender Stärke der in einem Rohr erregten Oscillationen genügt eine geringere Schirmwirkung, um das Leuchten zum Erlöschen zu bringen; ebenso bei zunehmender Schwierigkeit der Erregung, also bei zunehmendem Druck.

Um wenigstens ein Urtheil über diese Verhältnisse zu gewinnen, wurde wieder die bei 8 benutzte Anordnung (Fig. 2 *b*) verwendet. Die Röhre lag also zwischen Condensator und Schirm.

Vergrösserte man den Abstand *a* zwischen Röhre und Condensator, indem man den Condensator fortrückte, wodurch die Anregung des Rohres *E* abnahm, und näherte dann aus grossem Abstand den Schirm, bis das Leuchten verschwand, so trat dies bei einem grösseren Abstand *b* ein, als wenn die Röhre *E* näher an dem Condensator lag. Die Schirmwirkung von *M* ist hier vergrössert, wie aus dem grösseren Abstand von Rohr und Schirm hervorgeht; und zwar trotzdem die Erregung auf *M* vermindert ist, weil der Schirm selbst weiter von dem Condensator entfernt steht. Bei einem so hohen Drucke, dass das Rohr eben aufleuchtete, ergab sich

$$a = 5 \quad b = 30 \text{ mm.}$$

Bei einem tieferen Drucken

$$a = 0,\ b = 8;\ a = 10,\ b = 10;\ a = 20,\ b = 16;$$
$$a = 30,\ b = 19;\ a = 40,\ b = 26 \text{ mm.}$$

Aus diesen und zahlreichen ähnlichen Versuchen geht hervor: Je schwächer ein Rohr angeregt wird, je weiter es sich z. B. von dem Condensator befindet, bez. je höher der Druck ist, um so weiter kann auch der auslöschende Schirm von dem Rohre entfernt sein, eine umso geringere schirmende Wirkung genügt zur Auslöschung. Während also für Oscillationen grösserer Intensität der Schirm noch keine vollkommene Schattenwirkung ausübt, ist dies für solche von geringerer Intensität bereits der Fall.

Durch solche Versuche kann man die Empfindlichkeit der Anregung unter den verschiedensten Verhältnissen studiren.

B. Schirmwirkung leuchtender Gase.

Ganz ähnlich wie im Vorhergehenden die Schirmwirkung von Leitern der ersten und zweiten Klassen durch ihre Wirkung auf empfindliche Röhren nachgewiesen wurde, lässt sich zeigen, dass auch ein Gas, sobald eine genügende Anzahl seiner Molecüle genügend intensive, durch electrische Oscillationen angeregte Leuchtbewegungen ausführten, solche Schirmwirkungen in seiner Umgebung hervorbringt.

Um die Erscheinungen möglichst rein zu erhalten wurde folgende Anordnung gewählt (Fig. 3).

11. An die 6 cm von einander entfernten Condensator-platten T_1 und T_2 wurde ein parallelpipedischer mit der Luftpumpe verbundener allerseits geschlossener Glastrog *K* mit quadratischer Basis (Seite 2 cm) und 8 cm Länge mit seiner Längsaxe parallel zu der Condensatoraxe angelegt. An der Berührungsstelle waren auf denselben Stanniolstreifen quer auf die Anlegefläche geklebt (in der Figur durch dickere Striche angedeutet), um die Oscillationen nicht nur an einem Punkte eintreten zu lassen. Hinter *K* wurde das empfindliche Rohr *E* (Länge 12 cm, Weite 2 cm, $p = 0{,}18$ mm) gehalten. *R* ist wieder das Anregrohr.

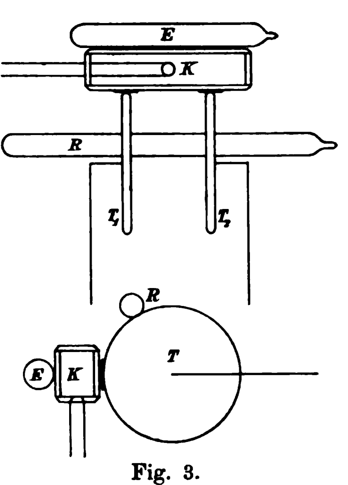


Fig. 3.

Bei dem Druck $p = 18{,}5$ mm im Troge *K* beginnt das Gas in demselben zu leuchten, und zwar spannt sich ein Bogen röthlichen Lichtes von der Berührungsstelle der einen Condensatorplatte zu der der anderen. Das Rohr *E* leuchtet, es wird also nicht von dem Gas in dem Troge geschirmt, der Trog nimmt nur verhältnissmässig wenig Energie auf. Die Erscheinung im Einzelnen wird in der nächsten Abhandlung beschrieben werden.

Es sei hier aber schon erwähnt, dass, wenn man das Rohr *E* entfernt und es dann dem Trog wieder nähert, dass dann das

röthliche Licht im Trog von der Lichtsäule in dem Rohr angezogen wird.

Bei $p = 11{,}8$ findet schon fast vollkommene Schirmwirkung statt, nur hin und wieder leuchtet noch das Rohr *E* auf.

Bei etwas niedrigerem Druck hört *E* ganz auf zu leuchten, die Schirmwirkung von *K* ist vollständig.

Bei $p = 0{,}30$ hört das Leuchten im Troge auf und damit auch die Schirmwirkung, das Rohr *E* leuchtet wieder hell.

Die Versuche lehren, dass eine wirksame Schirmwirkung nur dann ausgeübt wird, wenn eine hinreichende Anzahl von

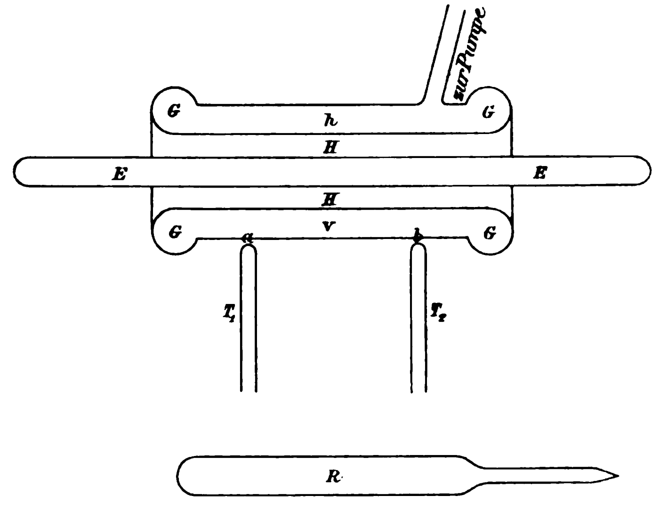


Fig. 4.

Molecülen in genügender Stärke Energie absorbirt; also weder bei zu hohen noch zu tiefen Drucken.

12. In etwas einfacherer, wenn auch theoretisch nicht so übersichtlicher Art lassen sich die Versuche folgendermaassen anstellen:

Ein engeres, 3 cm weites Gasrohr (Fig. 4) ist in ein weiteres 5,5 cm weites Glasrohr gesteckt, beide sind mit ihren Rändern so miteinander verblasen, dass ein doppelwandiger cylindrischer Mantelraum *G* entsteht. Derselbe communicirt durch ein seitlich angeschmolzenes Glasrohr mit der Pumpe. Die Länge des Mantels ist 11 cm. In den von dem Mantel *G* umgebenen

innersten, mit Zimmerluft erfüllten Hohlraum H wurden engere und weitere evacuirte Röhren E von verschiedenen Durchmessern und Längen oder auch Metallcylinder gelegt. Das Rohr G wird vor den Condensatorplatten T_1 und T_2 aufgestellt; an den Condensator ist eventuell noch eine anregende Röhre R mit ihrer Axe parallel der Condensatoraxe angelegt.

In dem doppelwandigen Rohr G lag z. B. ein 2 cm weites und 12 cm langes Rohr E mit Luft von dem Drucke 0,18 mm.

Bei hohen Drucken leuchtet nur E. Bei Drucken von etwa 2 mm leuchtet nur G. Hier wird also E durch G geschirmt.

Bei Drucken von $p = 0,47$ mm im Mantel G leuchteten die beiden Röhren gemeinschaftlich.

Bei dem Drucke $p = 0,034$ in G leuchtete das Rohr G nur an den von den Condensatorplatten abgewandten Theilen h. Zieht man das innere Rohr E heraus, so verbreitet sich das Licht auch nach den vorderen Theilen v, an den dem Condensator zunächst liegenden Stellen a, b sind dunkle Einschnitte in der Lichtsäule zu sehen. Beim Einschieben von E in H sieht man ausgezeichnet, wie das Licht in v ausgelöscht wird, es schirmt also E nach vorn. Offenbar sind in v nicht mehr genügend viele Molecüle vorhanden, um soviel Energie aus den ankommenden Oscillationen aufzunehmen, dass das Gas hier zum hinreichend kräftigen Leuchten kommen kann; vielmehr wird ein grosser Theil der Feldenergie zum Anregen des Rohres E verwendet, welches nun seinerseits eine genügend starke Schirmwirkung ausübt.

Ersetzt man das Rohr E durch einen Metallstab, so schirmt er in gleicher Weise wie das Gas, wie es nach den früher beschriebenen Versuchen zu erwarten war.

13. Die Erscheinung, dass mit abnehmendem Drucke die Anregbarkeit der Gase sich so sehr ändert, dass sie bei hohen Drucken fast Null ist und dann verhältnissmässig rasch steigt, lässt sich folgendermaassen erklären: Gasmolecüle können nur dann von Oscillationen zum Leuchten angeregt werden, wenn eine grössere Zahl der letzteren die Molecüle auf der freien Wegstrecke, d. h. zwischen zwei Zusammenstössen des Molecüls treffen, sonst wird die Energie der zwischen zwei Zusammenstössen erregten Oscillationen in andere Energieformen transformirt, ehe sie noch einen beträchtlichen Werth erreicht hat,

dadurch wird es unmöglich, dass die Amplitude der Oscillationen im Molecül eine merkliche Grösse erlangt.

Bei dem Atmosphärendruck ist die mittlere freie Weglänge der Sauerstoffmolecüle von der Ordnung 10^{-5} cm, die Geschwindigkeit derselben $5 . 10^4$ cm, die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen ist von der Ordnung 10^{-8} Sec., die Oscillationen im Resonanzkreise haben eine Schwingungsdauer von etwa 10^{-8} Sec. Zwischen zwei Zusammenstössen wird also nur *eine* Oscillation die Molecüle erregen. Evacuiren wir bis auf etwa $^1/_{100}$ Atmosphäre, also etwa auf 10 mm Druck, so werden die Molecüle zwischen zwei Zusammenstössen von 100 Oscillationen erregt, und in der That sind in diesem Bereich die Gase schon recht anregbar.

Legen wir ferner unser Anregerohr R an die Leitungsdrähte, so wird ein Theil der Oscillationen in solche von Schwingungsdauern von der Grössenordnung 10^{-11} Sec. umgewandelt (vgl. o. p. 38), von denen eine weit grössere Zahl auf das Intervall zwischen zwei Zusammenstössen kommt. Sie werden daher, wenn sie die Molecüle treffen, diese wesentlich geeigneter zur Aufnahme von Energie aus den Oscillationen des Resonanzkreises machen.

Dass andererseits ein Gas bei zu grosser Verdünnung nicht mehr schirmt, liegt wohl daran, dass hierzu überhaupt eine gewisse Energiemenge dem Felde entnommen werden muss, die dann in dem Gase in andere Energieformen als die der Feldenergie umgewandelt wird; sind zu wenig Molecüle da, so ist der aufgenommene, von ihnen transformirte Betrag zu gering, um in der Umgebung bemerklich zu werden.

14. Leuchtende Röhren üben auf andere leuchtende Röhren Schattenwirkungen vor sich aus. Die leichter erregbaren weiteren Röhren bringen die engeren schwerer erregbaren zum Erlöschen.

Von zahlreichen Messungen theilen wir die Folgenden mit. Untersucht wurden drei Röhren von der Länge 30 cm und den Durchmessern 1. $d_1 = 1{,}2$ cm, 2. $d_2 = 0{,}8$ cm, 3. $d_3 = 0{,}3$ cm, ihre Axen lagen parallel der Axe des Endcondensators.

Stellt man Rohr 2 und 3 etwa im Abstand von 1 cm von den Plattenrändern des Endcondensators auf und nähert ihnen Rohr 1, so erlöschen sie bei einem Abstand von b cm, und zwar Rohr 3 bei $b = 1{,}5$ cm, Rohr 2 bei $b = 0{,}5$ cm.

Dabei zieht sich wie beim Annähern von Metallschirmen die Lichtsäule in dem erlöschenden Rohr von aussen nach der Mitte zusammen. Das Licht erlischt zuletzt plötzlich; unmittelbar vor dem Erlöschen ist die Helligkeit noch ziemlich gross.

Auch ein mit einem leuchtenden Gase erfülltes Rohr übt also in seiner Umgebung eine Schirmwirkung aus.

Der Schatten liegt um das leuchtende Rohr rings herum.

Die leuchtenden Röhren verhalten sich also in dieser Hinsicht wie Metallschirme. Hieraus aber ohne weiteres schliessen zu wollen, dass den leuchtenden Gasen („phosphorescirender Luft") eine Leitfähigkeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes, der metallischen analog zukomme, würde ungerechtfertigt sein, da einmal, wie oben gezeigt, die Eigenschaft der Leitfähigkeit hier überhaupt eine untergeordnete Rolle spielt, und andererseits der ganze Vorgang der Schirmwirkung offenbar auf rein electrodynamische Erscheinungen zurückzuführen ist, die in gewissem Sinne bei den Leitern anders verlaufen, als bei den Dielectricis.

15. Eine erste leuchtende Röhre E' kann eine zweite E'' zum Leuchten anregen, diese kann dann aber durch die Schirmwirkung von E' selbst wieder ausgelöscht werden. In grösserer Entfernung erregt E' die Röhre E'', in kleinerer löscht E' die Röhre E'' aus.

Versuche, die dies z. B. beweisen, kann man mit den unter 13. beschriebenen Röhren anstellen.

16. Versuche, die sich hier anschliessen, kann man sehr schön innerhalb des Mantelrohres G (Fig. 4) anstellen; sie ergeben zugleich das am Ende dieses Abschnittes gegebene Resultat.

Legt man in den Hohlraum H eine evacuirte Röhre E_1 von 1,2 cm Durchmesser und von 10 cm Länge, die also vollkommen innerhalb des Hohlraumes liegt und die Gas von passendem Drucke enthält, so beobachtet man Folgendes:

Bei einem Drucke $p = 1$ mm bildet sich in dem Mantelraum G für sich zunächst den Condensatorplatten ein helles rothes Lichtband aus, welches fast bis in die von dem Condensator abgelegene Hälfte desselben reicht.

Legt man, während der Raum G leuchtet, die Röhre E_1 in den Raum H, so leuchtet sie nicht. Das leuchtende Gas

schirmt also E_1. Leitet man den Condensator mit den Fingern ab und bringt dadurch G zum Erlöschen, so leuchtet nach Aufheben der Ableitung zunächst E_1 auf, und zwar stets hell, dann G, und in demselben Moment erlischt E_1 wieder vollständig.

Das nicht leuchtende Gas in G schirmt also E_1 nicht, wohl aber das leuchtende.

Verschiebt man die Brücke von der einen oder anderen Seite nach der Stelle S hin, wo die Erregung von Entladungsröhren am Endcondensator am stärksten ist, also nach dem Knoten k_0^0, so spricht stets zuerst E_1 an, dann setzt aber fast momentan das Leuchten in G ein, wodurch E_1 sofort wieder ausgelöscht werden.

Ist $p = 0{,}33$ mm, so leuchten die Röhren E_1 und G abwechselnd auf; leuchtet die eine auf, so ist die andere dunkel.

Leitet man den Condensator mit der Hand ab und nimmt sie wieder fort, so leuchtet E_1 länger, als bei dem höheren Druck, ehe das Leuchten von G und das Erlöschen von E_1 eintritt. Nähert man die Brücke der Stelle S, so leuchtet zunächst nur die innere Röhre E_1 auf, bei weiterer Annäherung auch das äussere Rohr G, dann erlischt E_1.

Bei tieferen Drucken beginnen dunkle Schattenräume um die Condensatorplatten sich auszubilden, bei einem Druck $p = 0{,}01$ mm reichen sie bis in die vom Condensator abgewandte Hälfte des Mantelraumes.

Ist E_1 oder E_2 nicht eingeschoben, so ist G ganz dunkel. Beim Einschieben von E_1 leuchtet G an dem von dem Condensator abgewandten Stellen, E_1 leuchtet stets. Zwischen E_1 und dem Condensator liegen jetzt keine leuchtenden Gastheile, und da E_1 mit Gas von höherem Druck erfüllt ist, so erstrecken sich die Schattenräume nicht so weit in dieses hinein.

Ganz dieselben Resultate erhielt man mit einem Rohr E_2 von demselben Durchmesser wie E_1, in dem das Gas ebenso weit evacuirt war wie in E_1, das aber 30 cm lang war, also auf beiden Seiten über den Hohlraum hinausragte. In den nicht geschirmten herausragenden Stellen ist hier die Anregung zu schwach, um ein Leuchten hervorzurufen und damit eine Anregung der im Innern des Hohlraumes gelegenen Theile zu bewirken (vgl. p. 10).

Aus diesen Versuchen lässt sich der Satz ableiten: Die verdünnten Gase an sich schirmen nicht, sondern erst, wenn sie durch die Oscillation zum Leuchten gebracht sind.[1])

Das Gesammtergebniss vorstehender Versuche lässt sich dahin zusammenfassen:

Um die Leiter bildet sich unter dem Einflusse einfallender Oscillationen ein *Schattenraum* aus und zwar hinter denselben, neben denselben und vor denselben. Anregbare Körper, die sich in diesem Schattenraum befinden, werden in ihm nicht angeregt, wenn nicht ihre Erregungsfähigkeit zu gross ist im Verhältniss zu der Schattenwirkung an der Stelle, an der sie sich befinden. *Leuchtende* Gase nehmen an dieser Eigenschaft der Leiter Theil.

Erlangen, Physik. Inst. d. Univ., Febr. 1893.

---

1) Eine Reihe Beobachtungen nach dieser Richtung ist zwar bereits von J. Moser (Compt. rend. **110.** p. 397; Beibl. **14.** p. 409. 1890) und J. J. Thomson (Phil. Mag. [5] **32.** p. 321 u. 445. 1891; Beibl. **16.** p. 560. 1892) angestellt worden, da dieselben aber die schnell gedämpften und unregelmässig verlaufenden primären Schwingungen verwendeten, so stellen sich der sicheren Deutung ihrer Resultate Schwierigkeiten in den Weg. Ein Verschwinden von Leuchterscheinungen kann, wie wir später zeigen werden, bei niederen Drucken durch sehr verschiedene Umstände bedingt sein, sodass aus demselben an sich noch nicht auf eine Schirmwirkung geschlossen werden kann. Wir werden dort auch noch eingehender auf die Versuche von Moser und J. J. Thomson eingehen.

3. *Ueber die Gesammtemission glühenden Platins;*
von F. Paschen.

(Hierzu Taf. I Fig. 1 u. 2.)

Die Abhängigkeit der Strahlung fester Körper von der Temperatur ist seit geraumer Zeit Gegenstand vieler experimenteller und theoretischer Arbeiten gewesen, ohne dass irgend eine Beziehung sicher nachgewiesen ist. Die Versuche, welche vorliegen, haben keine übereinstimmenden Resultate ergeben. Theils waren die Versuchsbedingungen sehr complicirt, wie bei den Messungen der Abkühlungsgeschwindigkeit (Dulong und Petit[1]), de la Provostaye und Desains[2]), Narr[3]), Grätz[4])) und bei den Messungen der in Strahlung umgesetzten Stromenergie (Schleiermacher[5]), Bottomley[6])), theils mangelte es an einer genügenden Temperaturbestimmung, wie bei den Draper'schen[7]) und Tyndall'schen Versuchen. Die neuesten Messungen von den Hrn. Schleiermacher und Bottomley einerseits und andererseits von Hrn. Schneebeli[8]) stimmen nicht überein.

Als Formeln, welche den Zusammenhang zwischen der Strahlung und der Temperatur darstellen sollen, sind zu nennen: 1) die empirische Formel von Rossetti[9])

$$S = (a\,T_2^{\,2} - b)(T_2 - T_1);$$

in welcher bedeuten S die durch eine Thermosäule gemessene Strahlung, T_2 die absolute Temperatur des strahlenden Körpers (eines mit Wasser oder Quecksilber gefüllten Leslie'schen Würfels), T_1 die absolute Temperatur der Thermosäule; a und b

---

1) Dulong u. Petit, Ann. de chim. et de phys. **7.** 1817.
2) de la Prorostaye u. Desains, Pogg. Ann. **68** u. **69.**
3) Narr, Pogg. Ann. **142.**
4) Grätz, Wied. Ann. **11.**
5) Schleiermacher, Wied. Ann. **26.** p. 287. 1885; **34.** p. 623. 1888.
6) Bottomley, Phil. Trans. Roy. Soc. London. **42.** p. 357—359. 1887.
7) Draper, Phil. Mag. (3) **30.**
8) Schneebeli, Wied. Ann. **22.** p. 403. 1884.
9) Rossetti, Reale Acc. dei Lincei (3) **2.** p. 64. 1878.

sind zwei Constanten, $a = 3{,}351 \,.\, 10^{-6}$, $b = 0{,}0637$ sind ihre Werthe, welche aus den Versuchen abgeleitet wurden. Die Versuche erstrecken sich auf Temperaturen zwischen 0° und 300° C. Die Formel soll auch für höhere Temperaturen gelten. Doch können die hierzu von Rossetti angestellten Versuche wohl nur als sehr unvollkommen bezeichnet werden.

Zweitens stellte Hr. Stefan[1]) eine andere Formel auf, welche mit allen damals vorliegenden Messungen im Einklange stand:

$$S = c\,(T_2^4 - T_1^4).$$

c ist eine Constante, die anderen Bezeichnungen sind die gleichen, wie in der erwähnten Rosetti'schen Formel. Obwohl die Stefan'sche Formel ihrer Form nach vor der Rosetti'schen den Vorzug verdient, so ist sie von Stefan zunächst nur als eine empirische Beziehung aufgestellt, die vielen Messungen gerecht wird. Aber Boltzmann[2]) hat diese Formel dann auch aus der electromagnetischen Lichttheorie abgeleitet. Schneebeli's Messungen bestätigten diese Formel. Schleiermacher fand sie nicht gültig.

Die dritte Formel schliesslich ist von Hrn. H. F. Weber[3]) aufgestellt. Sie soll alle bisherigen Messungen innerhalb der Fehlergrenzen wiedergeben. Die Formel lautet für den Fall, dass die Umgebung des strahlenden Körpers die absolute Temperatur T_1 hat:

$$S = C\,.\,F(e^{a\,T_2}\,T_2 - e^{a\,T_1}\,T_1).$$

C ist eine Constante, F die Grösse der strahlenden Fläche und e die Basis der natürlichen Logarithmen, a eine Constante.

Besonders mit den Messungen von Schleiermacher stimmt diese Formel gut.[4]) Mit Schneebeli's Resultaten ist sie nicht verglichen. Da diese aber das Stefan'sche Gesetz befolgen und von den Schleiermacher'schen Werthen abweichen, kann die Weber'sche Formel Schneebeli's Messungen

1) Stefan, Wien. Ber. (1) **79.** p. 391. 1879.

2) Boltzmann, Wied. Ann. **32.** p. 31 u. 291. 1884.

3) H. F. Weber, Berl. Ak. Ber. **2.** p. 933. 1888.

4) Auch Hr. W. Leconte Stevens (Am. Journ. of Sc. (3) **44.** p. 431. 1892) findet mit der Thermosäule für die Strahlung von Eisen zwischen 15° C. und 110° C. eine bessere Uebereinstimmung mit der Weber'schen Formel, als mit einer anderen.

nicht wiedergeben. Schneebeli's Versuchsanordnung (die Strahlung einer Luftthermometerbirne auf ein Bolometer) war einfacher, als diejenige Schleiermacher's. Welche Messungen indess als richtiger anzusehen sind, dürfte schwer zu entscheiden sein, weil Schneebeli eine Fehlerquelle hatte, die er auch nennt, deren Wirkung aber unübersehbar ist. Auch Weber's Formel ist eine empirische, da ihre Begründung nur durch den Nachweis ihrer Uebereinstimmung mit gewissen Versuchen geschieht.

Um die Sache experimentell zu behandeln, ist es offenbar nöthig, die Temperatur zu kennen, welche die strahlende Oberfläche hat. Dies ist nun überhaupt zur Zeit unmöglich; aber man kann Verfahren anwenden, bei welchen man sehr nahe diese Temperatur misst. Versuche mit thermometerartigen Gefässen sind offenbar sehr ungünstig. Infolge ihrer Strahlung und durch Luftströmung wird die Oberfläche, zumal bei schlechten Wärmeleitern, eine niedere Temperatur haben, als die Füllung, auf deren Temperatur sich die Messung erstreckt. Bei den Abkühlungsversuchen wird z. B. sicher die Temperatur zu hoch gemessen. Dies ist der Einwand, dem auch Schneebeli's Messungen unterliegen, besonders, da er selbst schreibt, dass durch Aufziehen der Klappe zwischen dem Porzellangefäss des Luftthermometers und dem Bolometer der Druck im Manometer etwas sank. Gerade die strahlende Fläche wurde hierbei kälter. Wieviel, entzieht sich der Beurtheilung; aber man muss schliessen, dass Schneebeli zu kleine Strahlungen erhalten hat. Einwandfrei scheint dagegen Schleiermacher's Temperaturmessung. Der strahlende Körper ist hier ein im Vacuum glühender Platindraht. Seine Temperatur wird aus dem electrischen Widerstande gefolgert. Dies wird auch die Temperatur der strahlenden Oberfläche sein.

Eine Anordnung, welche gerade in dieser Beziehung ebenso wie die Schleiermacher'sche günstig ist, habe ich kürzlich beschrieben.[1]) Zwei übereinandergelegte Platinbleche werden

1) F. Paschen, Wied. Ann. **48.** p. 272. 1893. In dieser Abhandlung sind folgende Druckfehler zu verbessern: p. 277 Z. 5 v. o. lies „überragten" statt „überragte"; p. 281 Z. 4 v. u. lies „dicke" statt „Dicke"; p. 285 Z. 1 v. u. lies „empfindlichen" statt „empfindlicheren"; p. 286 Z. 6 v. u. lies „0,04 Amp." statt 0,004 Amp."

durch den electrischen Strom erhitzt. Sie stehen vertical in freier Luft und sind nur vor unregelmässigen Luftströmungen geschützt. Es stellt sich eine völlig stationäre Temperatur her. Zwischen den Blechen befindet sich die Löthstelle eines geeigneten Thermoelementes. Da alles gut Wärme leitendes Metall ist, und da die strahlende Oberfläche in gleicher Weise, wie das Innere, vom Erhitzungsstrome durchflossen wird, so muss die Oberfläche nahe dieselbe Temperatur wie das Innere haben. Nach einer Rechnung Edlund's[1]) kann der Temperaturunterschied zwischen der Oberfläche und dem Inneren höchstens hundertstel Celsiusgrade betragen.

Das vertical gestellte 4 cm lange Platinblech erscheint beim Glühen in seinen mittleren Theilen auf einer Strecke von etwa 2 cm gleich hell. In der Mitte dieser gleichmässig temperirten Strecke ist das Thermoelement eingeführt. Durch geeignete Blenden kann nur die nächste Umgebung der Einführungsstelle des Thermoelementes auf ein Bolometer strahlen.

Ist die Temperaturermittelung eine richtige, so lässt der Versuch in dieser Anordnung weiter keinen Einwand zu, als dass der Bolometerstreif ein selectives Absorptionsvermögen besitzen kann. Hierüber lässt sich allerdings zur Zeit nichts sagen. Diese Unsicherheit haftet an allen bolometrischen Messungen, welche Strahlungen miteinander vergleichen, die aus verschiedenen Wellenlängen in verschiedener Weise zusammengesetzt sind.[2]) Es schien mir aber trotzdem wichtig, den Versuch zu machen.

Als Bolometer diente das in meinem citirten Aufsatze eingehend beschriebene. Es bestand aus 0,001 mm dickem, mit Petroleumruss geschwärztem Platinblech. Das Galvanometer ist das ebenfalls l. c. eingehend beschriebene. Bei einer Scalenentfernung von 2 m wurden zehntel Millimeter geschätzt. Die gewöhnlich benutzte ganze Schwingungsdauer betrug 5″, für die niedersten Temperaturen 7″. Der erste Ausschlag, der nach 3″ resp. 4″ beendet war, galt als Maass der Strahlung. Die Temperaturempfindlichkeit des Bolometers war etwa $0{,}0_4 1$

1) Edlund, Pogg. Ann. **158.** p. 153. 1876.

2) Es wäre schliesslich noch an ein selectives Absorptionsvermögen der von der Strahlung durchsetzten Luftschicht zu erinnern, obwohl dies wohl kaum für meine Messungen von Belang ist.

resp. $0,0_{6}5^{0}$ C. pro 1 mm Ausschlag. Trotzdem die strahlende Fläche meistens nur wenige Quadratmillimeter gross war und vom Bolometer 70 cm entfernt stand, reichte diese Empfindlichkeit vollkommen aus. Für die höchsten Temperaturen musste sie durch Schwächung des Hauptstromes noch vermindert werden.

Die ersten Ausschläge des Galvanometers sind bei der beschriebenen Anordnung bis zu Ausschlägen von 400 mm proportional den Stromstärken, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht.

Ein Accumulator wurde durch einen grossen veränderlichen Widerstand *R* geschlossen. Von einem sehr kleinen Widerstande dieses Stromkreises zweigte man zum Galvanometer ab. Die Ströme, welche die Galvanometerrollen durchfliessen, sind dann umgekehrt proportional mit *R*. Eine Wippe liess den Ausschlag nach links (*l*) oder rechts (*r*) erfolgen.

R		10 000		5000		2500		1000		500		250	
		l	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*
Ausschläge	einzeln beob.	9,0	9,1	18,7	18,2	37,2	36,3	92,4	91,4	183,2	183,4	367,2	365,9
		9,0	8,8	18,4	18,1	37,1	36,6	92,3	91,6	183,5	183,0	367,1	366.2
	M.	9,0	9,0	18,6	18,2	37,2	36,5	92,4	91,5	183,4	183,2	367,2	366,1

Die Empfindlichkeit des bolometrischen Apparates wurde während jeder Versuchsreihe beständig controllirt. Dafür befand sich vor einem Bolometerzweige ein Nebenschluss von 10 000 Ohm, der sich entweder um 10, oder 20 oder 40 Ohm verändern liess.[1])

In einer Entfernung von 60 cm vor dem Streif des Bolometers befanden sich: 1. ein Spalt mit variirbarer Breite, und 2. je nach Bedürfniss Blenden verschiedener Oeffnung aus stark glänzendem Eisen-Zink-Blech; 3. unmittelbar vor diesen ein vom Fernrohr aus aufziehbares Fallbrett aus dickem blanken Metall. 8 cm vor diesem Schieber war der Platinstreif ausgespannt. Bei heruntergelassenem Schieber strahlten die blanken Blenden, deren Temperatur sich ausserordentlich wenig änderte, auf das Bolometer. Durch Aufziehen der Klappe

1) Vgl. K. Ångström, Oefversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. p. 379. 1888 und H. Rubens u. R. Ritter, Wied. Ann. **40.** p. 62. 1890

gelangte je nach Grösse der Blenden von einer 1—40 qmm grossen Fläche des Platinstreifs die Strahlung zum Bolometer.

Die Temperaturmessung ist durch weitere Aichungen mit siedendem Anilin, schmelzendem Blei und siedendem Schwefel für niedere und durch Berücksichtigung der von Holborn und Wien[1]) für Gold (1072° C.) und Silber (968°) gefundenen Schmelzpunkte für höhere Temperaturen verbessert. Ein weiterer Anschluss an die Arbeiten von Holborn und Wien war nicht möglich, da ich nicht chemisch reines Platin im Thermoelement hatte. Alles für die Temperaturmessung Wichtige findet sich in der folgenden Zusammenstellung. Es bedeuten: T_1 die Temperatur des Terpentinbades, in dem die zwei anderen Löthstellen liegen; T_2 die Aichungstemperatur in Celsiusgraden; n den Ausschlag des Galvanometers, welcher der Temperaturdifferenz ΔT entspricht. x bedeutet den Ausschlag in Millimetern pro 1° C. Temperaturdifferenz zwischen T_1 und T_2, wenn zwischen T_1 und 100° pro 1° C. Temperaturdifferenz 1 mm Ausschlag erfolgt: Beidemal vorausgesetzt, dass die Ausschläge proportional den Temperaturen sind. Die letzte Spalte stellt den Quotienten $n^{5/4} / \Delta T$ dar, der sich zwischen 400° und 1500° als constant erweist.[2]) Der unsichere Punkt für schmelzendes Platin fällt wieder heraus. Die Werthe dieser Quotienten wurden graphisch aufgetragen und durch einen im Anfange sich den Punkten anschmiegenden Curvenzug, von 427° an aber geradlinig verbunden. Diese Curve diente zur Ermittelung der Zwischenpunkte.

	T_1	T_2	ΔT	n	x	$n^{5/4} / \Delta T$
H_2O Sp.	25	100	75	17,58	1	0,11 447
Anilin Sp.	20	183	163	45,45	1,190	0,10 738
Pb Sm	22,2	326	303,8	99,42	1,396	0,10 363
S Sp.	19,9	447,5	427,6	154,5	1,542	0,10 249
Ag Sm	22	968	946	442,4	1,995	0,10 198
Au Sm	22	1072	1050	509,1	2,069	0,10 207
Pd. Sm	27	1500	1473	803,5	2,327	0,10 247
Pt. Sm	25	1775	1750	975,0	2,377	0,09 973

1) Holborn u. Wien, Wied. Ann. **47.** p. 107. 1892.

2) Diese empirische Beziehung, die natürlich nur für die von mir verwendete Platinsorte gültig ist, ist durch die von Holborn und Wien gefundenen Schmelzpunkte für Gold und Silber besser geworden (vgl. die ähnliche Zusammenstellung l. c. p. 289).

Bei der Messung der Temperatur des vom Strom durchflossenen Platinbleches trat die Schwierigkeit ein, dass immer ein Theil des Erhitzungsstromes durch den Kreis des Thermoelementes fliesst. Man kann dies durch Commutiren des Erhitzungsstromes zwar leicht eliminiren; aber wenn die in die Spalte zwischen den Blechen eintretenden Drähte nicht sehr nahe beisammenliegen, erhält man derartige Galvanometerablenkungen, dass eine Scala von 1 m Länge nicht ausreicht. Um mit einer solchen arbeiten zu können, habe ich früher viel Mühe auf das passende Einführen der Drähte in die Spalte verwenden müssen. Sie sollen so nahe wie möglich beisammenliegen, sich aber ausserhalb der Spalte nicht mehr berühren. Dies ist jetzt durch folgendes Verfahren sehr einfach geworden. Ehe die Drähte zusammengeschmolzen werden, klopft man jeden für sich am Ende in ein breites Bändchen aus: etwas bis zu einer Dicke von $^1/_{100}$ mm. Dann werden die zwei Bändchen aufeinandergelegt und am Ende zusammengeschmolzen. Die Schmelzstelle wird nochmals plattgeschlagen und durch geeignetes Beschneiden recht klein gemacht. Führt man sie nun in die Spalte zwischen den zwei Blechen ein, so ist es ein Leichtes, den vom Erhitzungsstrome herrührenden Zweigstrom durch geringes Verschieben eines der Drähte fast völlig zu vermeiden. Hat man solche Stellung des Thermoelementes gefunden, so steigert man die Temperatur des Platinbleches auf 1500° C. Dann schweisst die eingeführte Löthstelle an den Innenwänden so fest, dass sie sich nicht mehr, ohne zu zerreissen, herausziehen lässt. Darauf presst man die Blechwände noch gehörig an und achtet darauf, dass die Drähte sich bei ihrem Austritt aus der Spalte nicht berühren. Schliesslich vernichtet man durch Glühen der Drähte ihre Spannungen, damit sich die eingeführten Theile des Thermoelementes bei den Temperaturen, bei denen die an ihnen liegenden Plattenwände weicher werden, nicht verschieben.

Es ist mir der Einwand gemacht. dass die eingeführte Schmelzstelle des Thermoelementes die Temperatur der sie umgebenden Blechwände nicht ganz annehmen könnte. Die Schmelzstelle ist etwa $^1/_{50}$ bis $^1/_{100}$ mm dick und 0,2 mm breit. Zu beiden Seiten fest angepresst liegen zwei Platinwände von je $^1/_{10}$ mm Dicke und 4 mm Breite. Die eingeführte Platin-

masse wird mit vom Strom durchflossen. Es ist an dieser Stelle kein Helligkeitsunterschied zu sehen. Auch glühen die heraustretenden Drähte noch etwa $^1/_4$ mm weit mit derselben Helligkeit, wie das Blech.

Die Schmelzstelle kann aus zwei Gründen eine niedere Temperatur haben; 1. infolge der durch sie auf einer Länge von 0,2 mm herbeigeführten Querschnittsvergrösserung um etwa 10 Proc.; 2. infolge der Wärmeableitung durch die zwei herausragenden Drähte. Ich habe früher, soweit es die Genauigkeit meiner Messungen gestattete, gefunden, dass man für einen gleichen Erhitzungsstrom immer dieselbe Temperaturangabe des Thermoelementes erhält, ob man die Drähte mehr oder weniger platt schlägt, ob man sie tiefer (bis 3 mm) einführt, oder nur $^1/_2$ mm tief.

Ich habe nunmehr noch den folgenden Versuch gemacht: Statt zweier übereinandergepresster Platinstreifen habe ich deren vier genommen und zwischen die zwei mittleren das Thermoelement eingeführt, sodass also jetzt beiderseits eine Platinwand von doppelter Dicke an der Löthstelle lag. Es war vorher bei dem zweifachen Blech der einer bestimmten Temperatur entsprechende Ausschlag gemessen. Nun wurde das vierfache Blech möglichst an die gleiche Stelle gesetzt, wo vorher das Doppelte stand, zur selben Temperatur erhitzt, und seine Strahlung gemessen. Es war dafür gesorgt, dass die gleiche Oberfläche, welche vorher strahlte, auch jetzt wieder vorne war. Es liess sich aber nicht vermeiden, dass sie sich beim Andrücken und Plattstreichen änderte. Ich erhielt so grosse Abweichungen. Bei einer Temperatur von 1170° C. gab das Blech von doppelter Dicke den Ausschlag 229 mm, darauf ein Blech von vierfacher bei gleicher Temperatur den Ausschlag 199 mm. Zu einem Ausschlage von 229 mm würde die Temperatur von 1206° C. nöthig gewesen sein. Doch ist dies sicher eine obere Grenze; denn bei einer nachherigen Besichtigung stellte sich heraus, dass gerade an der Stelle, wo das Thermoelement sass, das Blech infolge ungleichmässigen Querschnittes eine höhere Temperatur gehabt haben musste. Bevor ich die richtige Temperatur traf, hatte ich eine höhere genommen. Es zeigten sich nun im Innern, dort, wo das Thermoelement sass, die Blechwände aneinandergeschweisst,

sodass das Thermoelement beim Herausschaben zerriss. Die übrigen Theile des Bleches waren noch nicht aneinandergeschweisst. Ein neues Blech von vierfacher Dicke und von gleichmässigerem Querschnitt ergab für die Temperatur 1170° C. den Ausschlag 239,3 mm. Hier würde das Thermoelement bei dem Ausschlage 229 mm die Temperatur 1155° C. angezeigt haben: also sogar eine zu niedrige.

Der Versuch ist in dieser Weise bei meiner Anordnung nicht exacter zu machen. Denn erstens kann die Oberflächenbeschaffenheit des Platins bei dem zum Einsetzen des Thermoelementes nöthigen Verfahren geändert sein. Zweitens ist es nicht möglich, das Blech wieder so vor die Blenden zu setzen, wie es vorher stand. Ganz ähnliche Differenzen traten schon auf, wenn man das Blech fortnahm und wieder hinsetzte. Als nach den beschriebenen Versuchen ein Blech von doppelter Platindicke wieder eingesetzt war, ergab sich für die Temperatur 1170° C., der Ausschlag 217,2 mm. Dem Ausschlage 229 mm würde dann eine Temperatur 1184° C. entsprechen.

Der folgende Weg scheint besser, die Sache zu prüfen: Wenn das Thermoelement infolge der localen Qerschnittsvermehrung nicht völlig die Temperatur annimmt, welche die Bleche haben, so muss dies bei dem Blech doppelter Dicke unvollkommener geschehen, als bei demjenigen vierfacher Dicke. Die Curve, welche für das letztere Blech die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur darstellt, muss der Wirklichkeit näher kommen, als bei demjenigen doppelter Dicke. Es zeigte sich nun, und wird weiter unten ausführlich belegt, dass beide Curven durchaus das gleiche Gesetz befolgen. Hiermit ist bewiesen, dass die locale Querschnittsvermehrung keine für meine Messungen merkbare Temperaturdifferenz erzeugt.

Es ist nun noch ein merkwürdiger Umstand zu erwähnen. Der Strahlungsausschlag zeigte sich abhängig von der Richtung des Erhitzungsstromes. Das Commutiren geschah in der Weise, dass dieselben zwei Kupferbügel in verschiedener Weise je zwei von vier Quecksilbernäpfen verbanden. Weiter wurde dabei nichts geändert. Der Widerstand des Stromkreises war also in beiden Fällen genau der gleiche. Bei einer Temperatur von 1150° C. ergab sich z. B. ein Ausschlag von 380 mm, wenn der positive Strom das Blech von unten nach

oben durchfloss, ein solcher von 370 mm für die umgekehrte Stromrichtung. Bei einer Temperatur von 810° waren diese Ausschläge 47,8 und 45,6 mm. Ich vermuthe, dass Thermoströme dies verursachen, die einmal den Accumulatorenstrom verstärken und ihn in der anderen Anordnung vermindern. Solche Thermoströme konnten z. B. durch folgenden Umstand eintreten: Die obere Klemme des Platinbleches befand sich in der heissen Luft, die vom Blech aus sie umströmte. Bei den ersten Versuchen kam es vor, dass sie rothglühend wurde, während man die untere Klemme noch anfassen konnte. Das obere Blech wurde deshalb nach hinten abwärts gebogen und durch einen Schirm vor der heissen Luft geschützt. Ferner umgab man die den Klemmen zunächst befindlichen Theile des Platinstreifs mit dickem Platinblech, sodass diese Theile sich durch den Strom weniger erhitzten. Auf diese Weise vermeidet man auch die Störungen, die durch Oxydation der mit *glühendem* Platin in Berührung stehenden Klemmentheile eintreten.

Die Verschiedenheit der Ausschläge wurde hierdurch wohl geringer, blieb aber immer noch bemerklich. Diese Verschiedenheit war ferner im Anfang einer Versuchsreihe geringer, sogar oft unmerklich, und trat erst nach längerem Glühen hervor. Man muss bedenken, dass die Strahlung mit einer hohen (> 8.) Potenz der Stromstärke proportional ist. Aus diesem Grunde war die Accumulatorenbatterie von grossem Werthe.

Ich habe nun nichts anderes thun können, als abwechselnd bei den verschiedenen Stromrichtungen die Strahlungen messen und das Mittel nehmen. Eine Beobachtung verlief dann z. B. folgendermaassen:

Lage der Kupferbügel	×	=	×
Ausschlag des Thermoelements	576,0	565,6	577,0
Strahlungs-Ausschläge	225,0 225,3	227,5 228,8	225,5 225,3
Mittel	225,2	228,2	225,4
Ausschlag des Thermoelements	577,5	566,5	577,0
Temp. d. Terpentins ° C·	19,5		19,8

Mittel: Thermoelement = 571,5 mm. Bolometer = 226,7 mm.

Die Ausschläge des Thermoelementes müssen natürlich auch, wenn auch weit weniger, durch die Verschiedenheit beeinflusst sein; dies entgeht aber infolge des vom Erhitzungsstrome herrührenden Zweigstromes, der überwiegt.

Das ganze durchmessene Temperaturintervall von 100° C. bis 1450° C. lässt sich nicht mit der gleichen Galvanometerempfindlichkeit durchmessen, wenn die Ausschläge 400 mm nicht übersteigen sollen. Demgemäss habe ich drei Gruppen von Messungen gemacht. Die eine Gruppe umfasst niedere Temperaturen von 100—600° C., die zweite mittlere von 350—950°, die dritte die höchsten Temperaturen von 600—1450° C. Aus einer Gruppe theile ich ausführliches Beobachtungsmaterial mit, aus den beiden anderen je die Resultate einer Messungsreihe.

Es bedeuten T' die Temperatur des Terpentins, n den reducirten Ausschlag des Thermoelementes. Die geringen Aenderungen im Kreise des Thermoelementes wurden mit einem zweiten Thermoelement mit Hülfe der Temperatur 100° ermittelt. Die Ausschläge wurden dann so reducirt, dass aus den oben p. 55 gegebenen Daten die Temperatur ermittelt werden konnte. ΔT ist die n entsprechende Temperaturdifferenz. T_2 ist die Temperatur des Platinbleches, T_1 die der Umgebung des Bolometers. S ist der Strahlungsausschlag. Die letzte Columne enthält den Ausdruck, der nach Stefan's Formel constant sein sollte.

Niedere Temperatur. Blech doppelter Dicke. Blendenöffnung horizontal = 2 mm, vertical = 2 cm.

T' ° C.	n	ΔT ° C.	T_2 ° C.	T_2 absol.	T_1 absol. = 273 +	S corr.	$(S / (T_2^4 - T_1^4))10^{10}$
17,2	23,0	92,9	110,1	383,1	16,0	2,63	1,809
17,3	32,4	122,5	139,8	412,8	16,3	4,63	2,099
17,5	43,3	156,4	173,9	446,9	16,4	8,06	2,452
17,7	72,8	237,1	254,8	527,8	16,4	21,14	2,998
17,8	110,9	330,8	348,6	621,6	16,5	55,65	3,911
18,0	147,3	412,2	430,2	703,2	16,6	114,2	4,810
18,2	174,2	468,2	486,4	759,4	16,7	181,1	5,566
18,3	193,4	506,5	524,8	797,8	16,9	246,7	6,200
18,5	230,2	577,4	595,9	868,9	16,6	399,7	7,105

Mittlere Temperatur. Blech vierfacher Dicke. Blendenöffnung horizontal = 2 mm, vertical = 9 mm.

T_1 absol.	T_2 absol.	S corr.	$[S/(T_2^4 - T_1^4)]\,10^{11}$
291,3	499,1	3,33	6,06
291,4	634,6	12,22	7,887
291,3	753,7	34,50	10,93
291,3	878,0	83,88	14,29
291,6	984,1	165,0	17,73
291,6	1058	244,4	19,61
291,6	1146	390,9	22,76
291,7	1054	239,6	19,53
291,8	908,1	101,3	15,05
291,8	797,0	47,27	11,93
291,9	618,3	10,75	7,745

Höchste Temperatur. Blech zweifacher Dicke. Blendenöffnung horizontal 2 mm, vertical 3 mm.

T_1 absol.	T_2 absol.	S corr.	$[S/(T_2^4 - T_1^4)]\,10^{11}$
288,9	871,4	8,83	1,55
289,0	986,5	18,27	1,94
289,2	1076	29,69	2,23
289,3	1227	61,22	2,710
289,3	1349	102,2	3,094
289,3	1493	173,2	3,487
289,3	1602	256,3	3,896
289,4	1066	28,80	2,243
289,7	1722	374,7	4,266
289,8	1072	29,43	2,240

Die verschiedenen Messungsreihen wurden nun zunächst innerhalb jeder Gruppe zur Berechnung einer mittleren Curve verwerthet. Alle Curven gehen durch Multiplication je mit einem gewissen Factor, in einander über. Dieser, für jede Reihe constante Factor ist graphisch ermittelt. Mit ihm sind die beobachteten Strahlungen jeder Reihe multiplicirt. Aus einer graphischen Darstellung entnahm man dann für gleiche Temperaturen die Ordinaten aus den verschiedenen Curven. Diese finden sich in der folgenden Zusammenstellung, in der also jede Verticalspalte eine Curve darstellt, die durch Multiplication mit einem constanten Zahlenfactor aus der beobachteten hervorgegangen ist. Dieser Zahlenfactor findet sich unter der Nummer der Reihe. Ebenso die mittlere Temperatur T_1 in ^{0} C.

Niedere Temperaturen.

Reihe Nr.	1	2	3	4	5	I	IV	V	VII	VIII	IX	Mittel
Factor	0,7167	1,000	1,067	2,478	5,705	2,78	5,286	32,99	1,329	5,115	2,727	
T_1 ° C.	16,5	16,5	17,0	16,3	15,5	17,3	17,0	17,5	17,7	18,6	17,8	
T_2 ° C.												
100	*4,3*	2,2	—	—	—	—	—	—	3,1	—	—	2,65
150	*6,7*	5,8	5,0	—	—	—	—	—	6,5	—	—	5,77
200	*11,3*	11,8	10,3	—	—	*25,8*	—	—	12,2	—	12,3	11,65
250	*17,8*	20,0	19,4	21,7	—	*35,0*	18,8	—	20,8	21,7	20,7	20,62
300	*29,7*	34,2	34,7	36,0	—	*46,5*	36,2	—	33,8	35,2	34,5	34,94
350	*46*	56,2	57,2	58,0	—	*60*	63,5	—	54,0	56,7	56,0	57,34
400	—	89,5	91,2	86,0	91,0	*85*	101,5	—	88,2	92,5	88,0	90,99
450	—	134	140,6	135,0	138	*120*	150,0	140,5	132	135,5	136	137,6
500	—	202	209,0	197,3	206	*176*	217	197	193,5	200	203	202,8
550	—	299	306,0	298,5	285	*251*	313	293	290	299	297	297,4
600	—	408	424	410,5	400	—	412	445	462	413,5	413	420,8

Mittlere Temperaturen.

Reihe Nr.	2	3	4	5	6	III	IV	VII	VIII	IX	Mittel
Factor	0,1925	0,2015	0,4864	1,095	2,101	0,9729	0,9834	0,2603	1,000	0,5343	
T_1 ° C.	16,5	17,0	16,3	15,5	16,4	15,9	17,0	17,7	18,6	17,8	
T_2 ° C.											
350	10,9	10,8	11,4	—	—	—	12,3	10,8	10,8	11,0	11,14
400	17,1	17,2	17,5	17,7	—	—	19,3	17,2	17,4	17,3	17,59
450	26,0	26,0	26,4	25,8	—	—	28,3	26,0	27,0	26,6	26,51
500	38,9	38,9	39,3	37,6	—	—	40,0	38,2	39,7	39,5	39,01
550	56,7	56,7	56,5	54,5	—	—	57,0	55,0	56,0	57,3	56,21
600	79,8	79,7	80,0	76,3	80,5	80,3	79,8	78,1	78,2	81,4	79,41
650	—	—	110,8	107,5	111	110,5	108,8	—	113	113	110,66
700	—	—	154,5	144	151	149	148	—	154	152	150,36
750	—	—	202	194,5	204	206	197	—	204	202	201,4
800	—	—	—	260	270	274	257	—	267	—	265,6
850	—	—	—	335	353	349	328	—	347	—	342,4
900	—	—	—	416	445	—	—	—	—	—	430,5
950	—	—	—	520	559	—	—	—	—	—	539,5

Hohe Temperaturen.

Reihe Nr.	8	5	4	6	7	III	IV	V	VIII	VI	II	Mittel
Factor	1,000	0,1224	0,05378	0,2314	2,188	0,1067	0,1111	0,6985	0,1096	1,042	0,5663	
T_1 ° C.	16,3	15,5	16,3	16,4	17,3	15,9	17,0	17,5	18,6	17,3	16,5	
T_2 ° C.												
600	9,0	8,7	8,6	9,0	—	9,0	9,0	9,2	8,4	—	*10,9*	8,86
650	12,2	12,0	12,2	12,3	—	12,0	12,3	12,3	12,0	—	*14*	12,16
700	17,0	16,2	16,8	17,0	—	16,4	16,4	16,6	16,4	—	*18,4*	16,6
750	22,0	21,2	22,5	22,6	—	22,0	22,1	22,3	21,7	--	*23,8*	22,05
800	29,0	28,2		29,6	—	29,2	29,3	28,9	28,5	29,6	*30,3*	29,04

e Nr.	8	5	4	6	7	III	IV	V	VIII	VI	II	
tor	1,000	0,1224	0,05378	0,2314	2,188	0,1067	0,1111	0,6985	0,1096	1,042	0,5663	Mittel
°C.	16,3	15,5	16,3	16,4	17,3	15,9	17,0	17,5	18,6	17,3	16,5	
50	38,5	36,3	—	38,0	—	37,8	37,6	36,7	36,6	36,8	*37,6*	37,26
00	48,5	46,1	—	48,2	—	—	—	47	—	47,5	*46,4*	47,46
50	59,5	56,8	—	60,0	—	—	—	58,3	—	60,0	*57,3*	58,92
00	74,5	—	—	74,5	77,8	—	—	73	—	74,8	*71 2*	74,92
50	91,5	—	—	—	95,4	—	—	89,7	—	92,4	*87*	92,25
.00	111,8	—	—	—	115,5	—	—	111,8	—	113,5	*105,3*	113,15
.50	135	—	—	—	136,5	—	—	136,8	—	137,0	*126*	136,3
00	162,5	—	—	—	161,4	—	—	163,5	—	165,5	*150,7*	163,2
50	195	—	—	—	191,3	—	—	192,5	—	198,5	*178,7*	194,3
00	234	—	—	—	227,2	—	—	228,5	—	236,5	*210*	231,6
50	273,5	—	—	—	273,2	—	—	277	—	282,0	—	276,4
00	322	—	—	—	323,2	—	—	327	—	332	—	326,1
50	375	—	—	—	372,6	—	—	377,8	—	391	—	379,1

In den Tabellen für niedere und hohe Temperaturen finden sich drei Reihen, welche etwas mehr von den anderen abweichen, als diese unter sich: die Reihen 1, I und II. Reihe 1 ist die erste mit doppeltem Blech beobachtete; bei der übrigens noch eine andere Störung vorhanden war. Reihe I und II stellen die zwei ersten Beobachtungen dar, die mit dem Blech vierfacher Dicke angestellt sind. Ich muss es unentschieden lassen, ob das Abweichen dieser Reihen daher rührt, dass die Oberfläche erst nach längerem Glühen bei hoher Temperatur eine constante Emissionsbeschaffenheit annimmt, obwohl es sehr plausibel scheint (nach längerem Glühen bei 1400° C. wird eine blanke Platinoberfläche matt). Alle anderen Reihen stimmen gut untereinander überein, und zwar war in den mit 1, 2, 3 . . . 8 bezeichneten Reihen das Blech von doppelter, in den mit I, II . . . IX bezeichneten Reihen von vierfacher Dicke. Beide Arten Reihen unterscheiden sich nicht (vgl. p. 58).

Mit Ausschluss der drei bezeichneten und in der Zusammenstellung mit *schrägliegenden Zahlen gedruckten* Reihen, über deren Abweichung ich keine sichere Rechenschaft geben kann, die aber doch ihrem Verhalten nach mit den anderen nicht vergleichbar scheinen, habe ich die übrigen zu mittleren Reihen vereinigt.[1]) Aus den drei mittleren Curven, welche

1) Diese mittleren Reihen beziehen sich also auf Platin, welches bereits vorher längere Zeit bei mindestens 1400° C. geglüht hat.

so für die drei Gruppen entstehen, lässt sich dann eine einzige Curve bilden, welche zwischen 100 und 1450° C. die Abhängigkeit der Strahlung S von der Temperatur T_2 darstellt. Diese Curve gebe ich hierunter. Die Temperatur des Bolometers schwankte bei den verschiedenen Messungen zwischen 15,5 und 18,6° C. Mit dem Mittel 17° C. oder 290° abs. Temp. habe ich die Constante der Stefan'schen Formel berechnet und mit angeführt. Man sieht, dass diese Grösse von $4 . 10^{-11}$ bis $39 . 10^{-11}$ in dem von mir untersuchten Temperaturintervall zunimmt.

Mittlere Curve der Strahlung von Platin als Function der Temperatur (T_1 = 290° abs.).

T_2 ° C.	100	150	200	250	300	350	400
T_2 abs. T.	373	423	473	523	573	623	673
S	0,508	1,106	2,234	3,954	6,696	11,07	17,52
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	4,15	4,43	5,21	5,84	6,65	7,67	8,85
T_2 ° C.	450	500	550	600	650	700	750
T_2 abs. T.	723	773	823	873	923	973	1023
S	26,45	38,95	56,62	80,25	110,7	150,8	201,1
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	9,94	11,11	12,53	13,99	15,40	16,96	18,48
T_2 ° C.	800	850	900	950	1000	1050	1100
T_2 abs. T.	1073	1123	1173	1223	1273	1323	1373
S	265,0	340,8	431,3	538,0	682,0	839,8	1031
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	20,10	21,53	22,87	24,10	26,05	27,47	29,05
T_2 ° C.	1150	1200	1250	1300	1350	1400	1450
T_2 abs. T.	1423	1473	1523	1573	1623	1673	1723
S	1241	1485	1769	2108	2516	2968	3451
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	30,18	31,56	32,92	34,49	36,31	37,92	39,17

Besser, als Stefan's Formel, schliesst sich die Weber'sche meinen Werthen an, aber sie ist doch nicht geeignet, meine Beobachtungen genau darzustellen. Bis zu einer Temperatur von 1050° wächst die Strahlung des Platins nach meinen Messungen schneller, von hier an aber langsamer, als Weber's Formel erfordert. Diese Formel lässt sich für meine Versuche passend so schreiben:

$$S = C . F . e^{a . T_1} . T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} e^{a(T_2 - T_1)} - 1 \right) .$$

a soll nach Weber für alle festen Körper den Werth 0,0043 haben. Da $T_1 = 290^0$ abs. ist, so kann man schreiben:

$$S = \mathfrak{C}\left(\frac{T_2}{290}\, e^{0{,}0043\,(T_2 - 290)} - 1\right),$$

wo $\mathfrak{C}$ eine neue Constante ist. In dieser Form habe ich sie benutzt und $\mathfrak{C}$ berechnet. Schliesslich habe ich noch die Constante a der Rossetti'schen Formel aus meinen Beobachtungen berechnet. Zum Vergleiche stelle ich die Resultate dieser Berechnungen in der folgenden Tabelle zusammen.

Berechnung der Constanten $\mathfrak{C}$ der Weber'schen und a der Rossetti'schen Formel.

T_1	$T_1 - 290$	S	$\frac{T}{290}\, e^{0{,}0043\,(T-290)} - 1$	$\mathfrak{C}$	$a \cdot 10^7$
423	133	1,106	1,590	0,6958	1,023
573	283	6.696	5,674	1,181	
723	433	26,45	15,05	1,757	3,662
873	583	80,25	35,95	2,233	
1023	733	201,1	81,50	2,467	6,50
1173	883	431,3	179,3	2,406	
1323	1033	839,8	386,5	2,172	10,61
1473	1183	1485	822,8	1,805	
1573	1283	2108	1349	1,563	15,48
1723	1433	3451	2817	1,222	

Auf Fig. 1, Taf. I, finden sich: 1. die beobachtete Curve, 2. eine nach Stefans, 3. eine nach Weber's und 4. eine nach Rossetti's Formel berechnete Curve. Die Curven sind nach zwei verschiedenen Maassstäben aufgetragen, um das Verhalten bei niederen Temperaturen hervortreten zu lassen.

Mit den Resultaten Schleiermacher's und Bottomley's stimmen meine Werthe nicht. Die Methode dieser Beobachter ergab ein langsameres Wachsen der Strahlung innerhalb des von ihnen untersuchten Temperaturintervalles etwa der Weber'schen Formel entsprechend. Den Grund hierfür weiss ich nicht.

Trägt man die Constante der Stefan'schen Formel als Function der Temperatur auf (Fig. 2, Taf. I, Curve 1), so erscheint diese Curve zwischen 400° C. und 1450° C. als gerade Linie; unterhalb 400° fällt diese Linie langsamer. In Curve 2 ist derselbe Ausdruck aufgetragen, wie er sich nach Schleiermacher's Messungen ergibt. Curve 3 stellt die Constante $\mathfrak{C}$ der Weber'schen Formel als Function der Temperatur dar.

Es wäre wichtig, diese Messungen mit einem schwarzen Körper anzustellen, da es möglich ist, dass sich das Emissionsvermögen der Metalloberfläche mit der Temperatur so stark ändert, dass infolgedessen die Abweichung von einem der Strahlungsgesetze entsteht.

Ich habe daher den Platinstreif auf der zum Bolometer strahlenden Fläche über der Petroleumlampe berusst, und zwar nur so stark, dass eben jeglicher metallischer Glanz verschwand, und die Fläche tief schwarz erschien. In dieser Anordnung konnte man das Platin über 500° C. erhitzen, ohne dass der Russ verbrannte. Die Messungen, welche mit ihm angestellt sind (2), sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Die letzten beiden Horizontalspalten derselben enthalten die aus den Beobachtungen berechneten Constanten der Formeln von Stefan und Weber.

Die Strahlung des Russes. T_1 = 288,3 abs. Blenden von 2 × 9 mm.

T_2	° C.	78,3	100	150	200	250	300	350	400	450	492,4
	abs. T.	351,3	373	423	473	523	573	623	673	723	765,4
S		8,23	12,7	26,9	48,4	81,3	126	186	269	389	506,2
$(S/(T_2^4 - T_1^4))^{10^{10}}$		9,82	10,23	10,72	11,21	11,97	12,49	12,94	13,58	14,61	15,06
$\mathfrak{C}$		13,76	14,73	16,64	18,39	20,44	21,88	22,93	24,00	25,50	25,78

Es ergibt sich auch hier ein schnelleres Steigen (für niedere Temperaturen), als nach einer der beiden Formeln zu erwarten ist. Aber die Zunahme der Strahlungsintensität mit der Temperatur ist langsamer, als beim Platin, liegt also dem Stefan'schen oder Weber'schen Gesetz näher. In Fig. 2, Curve 4 und 5 ist die Stefan'sche, bez. Weber'sche Constante als Function der Temperatur gezeichnet. Das Gesagte geht aus dieser Zeichnung hervor.

Bei dieser Anordnung ist nun Folgendes zu bemerken. Da die strahlende Russschicht nicht selber mit vom Strome durchflossen wird und dazu ein schlechter Wärmeleiter ist, aber ein etwa zehnmal grösseres Emissionsvermögen als Platin hat (wenigstens bei den untersuchten Temperaturen), so ist zu schliessen, dass die Temperatur der strahlenden Fläche sicher niedriger ist, als die des Platins: um welchen Betrag, ist schwer zu sagen. Die Differenz wird aber mit steigender Temperatur grösser werden; folglich muss ein zu langsames Wachsen der Strahlung beobachtet werden. Ich schliesse

hieraus, dass auch Petroleumruss weder dem Stefan'schen, noch dem Weber'schen Gesetze folgen kann, sondern ein ähnliches Gesetz befolgt, wie Platin.

Bemerkenswerth ist noch folgende Erscheinung. Die Temperatur des einseitig berussten Platinstreifs war bis etwa 650° C. gesteigert, und der Strahlungsausschlag betrug über 300 mm Scalentheile. Da trat ein Schwanken und eine schnelle Abnahme in der Strahlung ein, bis der Ausschlag nur mehr 125 mm betrug. Zugleich stieg aber die Temperatur des Bleches auf ca. 700° C. Es zeigte sich, dass der Russ vom Platinblech fortgebrannt war. Trotz höherer Temperatur gab die Platinoberfläche dreimal kleinere Platinausschläge. Bei gleicher Temperatur und gleichen Blenden gab Russ ca. zehnmal grössere Ausschläge, als Platin. Wenn aber die Strahlung des Platins schneller mit der Temperatur zunimmt, als die des Russes, wie es nach meinen Versuchen immerhin wahrscheinlich ist, so müssen diese Unterschiede bei höherer Temperatur kleiner werden.

Ich füge noch eine Zusammenstellung über die Zunahme der Intensität homogener, vom Platin ausgesandter Strahlungen hinzu, die ich in meiner früheren Arbeit nur graphisch wiedergegeben habe. Diese Messungen sind mit Rücksicht auf die verbesserte Aichung des Thermoelementes p. 55 neu berechnet. Die Gestalt der früher gegebenen Curven ist dadurch nicht erheblich geändert. An diesen Curven (Fig. 9, Taf. I l. c.) kann man sehen, dass die Intensität derjenigen Wellenlängen, bei denen das Maximum der Energie liegt, noch schneller zunimmt, als die für die Gesammtemission, also für höhere Temperaturen mehr dem Weber'schen Gesetz entsprechend. Die Intensität der Wellenlängen 6083, 29 316 und 19 206 A. E. andererseits nimmt langsamer zu und entspricht mehr dem Stefan'schen Gesetz. Ich muss aber ausdrücklich hervorheben, dass die Genauigkeit dieser Messungen geringer war, als bei denjenigen der vorliegenden Arbeit. Ich sehe daher von einer Berechnung dieser Spectralmessungen nach einer der Formeln ab, zumal ich beabsichtige, sie bald mit grösserer Genauigkeit und besserer Spectralanordnung zu wiederholen.

Die Intensität der Wellenlänge λ eines Gitterspectrum als Function der Temperatur. $T_1 = 20$ bis 21^0 C.

$T_2{}^0$ C. $= \lambda$ A. E.	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1450
6 083	—	3	6	10	16	24	43	76	135	182
8 409	1	2,5	4	11	27	61	183	300	566	748
12 730	3	6	17	44	95	189	407	730	1142	1380
14 562	1,5	6	12	27	52	95	148	228	353	444
15 629	4	12	28	61	114	198	311	494	731	923
19 206	3	6	12	27	46	77	121	203	322	—
29 316	1	3	6	11	20	35	55	88	132	161

Nur die Zahlen jeder Horizontalreihe stehen zu einander in den richtigen Grössenverhältnissen.

An die Beziehung zwischen Wärmestrahlung und Temperatur haben sich vielfach Schlussfolgerungen über die Temperatur der Sonne geknüpft. So extrapolirte Rossetti eine Sonnentemperatur von 10 000°, Stefan aus seinem Gesetze eine solche von 5300 bis 5600° C. Diese Zahlen stellen untere Grenzwerthe dar, da die Absorption in der Sonnenatmosphäre nicht berücksichtigt werden kann. Man kann wohl annehmen, dass sich alle festen Körper ähnlich wie Platin verhalten werden. Dann würde unter der Voraussetzung, dass die Strahlung auch über 1450° C. ähnlich zunimmt, wie unter dieser Temperatur, der Schluss zu ziehen sein, dass die Temperatur der Sonne sogar noch unter 5000° C. liegen muss, wenn die Sonne ein fester Körper ist und ein ähnliches Gesetz der Emission befolgt, wie ein solcher.

Hannover, März 1893.

4. *Ueber die Beugung des Lichtes an einem geraden, scharfen Schirmrande; von Eugen Maey.*

(Hierzu Taf. I. Fig. 3–6.)

Den Anlass zu der vorliegenden Arbeit gab eine Beugungserscheinung, die von W. Wien [1]) beschrieben ist, und die, wie er sagt, sich aus der bisherigen Beugungstheorie nicht erklären lässt. Dieselbe besteht darin, dass der Rand scharf geschliffener Metalle von intensivem, weissen Licht getroffen als feine Lichtlinie bis weit in den geometrischen Schatten sichtbar ist.

Bei natürlichem auffallenden Lichte zeigt das gebeugte Licht theilweise Polarisation parallel zum Schirmrande, Phasenverzögerung der zu dem Schirmrande parallelen Componente gegen die senkrechte und verschiedene Färbung der ersteren bei Anwendung verschiedener Metalle. Dieselbe Erscheinung ist von Gouy [2]) mit mannigfaltiger Abänderung der mitwirkenden Bedingungen untersucht worden.

Mehrere Eigenschaften der Erscheinung, insbesondere die verschiedene Färbung bei Anwendung verschiedener Metalle zeigen deutlich einen Einfluss des Materials des benutzten Beugungsschirmes auf die Erscheinung, ein Einfluss, der ausserhalb der Betrachtungen der bisherigen Beugungstheorie liegt.

Im Folgenden soll versucht werden, ob nicht die Erscheinung im wesentlichen, d. h. die Thatsache, dass der von Licht getroffene gerade Rand bis weit in den geometrischen Schatten als Lichtlinie überhaupt sichtbar ist, sich aus der bisherigen Beugungstheorie ergibt. Erst dann wären die Eigenschaften der aus der Theorie sich ergebenden Erscheinung mit den wirklichen zu vergleichen und festzustellen, in welcher Weise das Material des Schirmes dieselbe beeinflusst.

---

1) W. Wien, Wied. Ann. 28. p. 117. 1886.

2) Gouy, Ann. de chim. et de phys. VI série. 8. p. 145. 1886.

Zu den oben erwähnten Beobachtungen sei bemerkt, dass die genannten Forscher das von einer intensiven Lichtquelle ausgehende Licht durch Linsen auf dem Schirmrande zu einem Bilde der Lichtquelle vereinigten. Die Erscheinung ist aber, wenn auch weniger intensiv, ebenfalls sichtbar, wenn helles, divergentes Licht auf den Schirmrand auffällt. In der folgenden theoretischen Behandlung soll der Einfachheit wegen angenommen werden, dass eine von einem leuchtenden Punkte ausgehende Kugelwelle homogenen Lichtes auf einen geradlinig begrenzten Schirm falle. Dann sind alle Bedingungen erfüllt, um auf das Licht in der Beugungsöffnung die von Kirchhoff gegebene Theorie anwenden zu können.

Theoretischer Theil.

§ 1. Ausgangspunkt der theoretischen Untersuchung.

Kirchhoff[1]) leitet den Werth $\varphi_0(t)$ einer Function φ des Raumes und der Zeit, welche die partielle Differentialgleichung $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = a^2 \Delta \varphi$ befriedigt, für einen Punkt 0 und die Zeit t ab aus den Werthen derselben auf einer geschlossenen Fläche, welche einen fest gegebenen Punkt 1 einschliesst. Es ist nach Kirchhoff

$$4 \pi \varphi_0(t) = \int \Omega \, d s ,$$

wobei ds das Flächenelement der oben erwähnten Fläche ist, über die das Integral ganz zu erstrecken ist, und Ω eine aus φ abgeleitete Function ist.

Bei der Anwendung dieses Satzes in der Theorie des Lichtes ist Punkt 1 die Lichtquelle, Punkt 0 derjenige, für den man die Lichtbewegung bestimmen will, und φ kann nach Kirchhoff irgend eine der Verrückungscomponenten u, v, w oder auch eine der Wellenfunctionen U, V, W sein, aus denen die Verrückungen sich durch folgenden Differentiationsprocess ergeben [2]):

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

1) Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitzungsberichte der Berl. Akademie, 22. Juni 1882. Wied. Ann. **18.** p. 663. 1883.

2) Clebsch: Borchard's Journal **59.** p. 115. 1882.

In jedem Falle müssen φ und die Differentialquotienten $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$, $\partial \varphi / \partial z$ in dem Integrationsgebiete endlich und stetig sein. Es sind so im allgemeinen zur Bestimmung des Bewegungszustandes im Punkte 0 zwei Wege vorhanden:

1) Man leitet aus den Verrückungen in der Fläche die des Punktes 0 ab.

2) Man leitet aus den Wellenfunctionen in der Fläche die des Punktes 0 ab und findet dann durch Differentiation die Verrückungen.

Eine Entscheidung, welcher Weg für diesen Fall einzuschlagen ist, muss umsomehr getroffen werden, da beide Wege in der bisherigen Beugungstheorie zu verschiedenen Resultaten führen. Wendet man nämlich auf dem ersten Wege nach bekannten Ueberlegungen das $\int \Omega\, d s$ auf eine beliebig gestaltete Beugungsöffnung an, so müsste die von jedem Flächenelemente herrührende Verrückung im Punkte 0 die Incompressibilitätsbedingung für den Aether

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

befriedigen; dass dieses nicht der Fall ist, lässt sich aber durch längere Rechnung in aller Strenge nachweisen. Hier möge folgende Betrachtung genügen. Lässt man auf eine sehr kleine Beugungsöffnung von einem weit entfernten Punkte 1 linearpolarisirtes Licht auffallen, so existirt in der Oeffnung nur eine Art von Verrückungscomponenten, z. B. u; die Anwendung des obigen Satzes ergibt dann auch für alle Punkte 0 immer nur Verrückungen u_0. Dass aber dann die Bedingung der Incompressibilität $\partial u_0 / \partial x_0 = 0$ nicht erfüllt ist, ist klar, da im geometrischen Schatten die Verrückungen auch in der X-Richtung schnell abnehmen. Bei dem zweiten Wege aber bürgt allein schon die Ableitung der Verrückungen aus den Wellenfunctionen für die Erfüllung der Gleichung

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = 0.$$

Es ist hierzu zu bemerken, dass Kirchhoff bei der Ableitung des obigen Satzes die Bedingung der Incompressibilität des

Aethers nicht benutzt, und dass es demnach fraglich erscheint, ob in der Theorie des Lichtes die Function φ eine der Verrückungen u, v, w bedeuten darf. Indessen kann der Grund dieses Unterschiedes bei Benutzung beider Wege auch im Folgenden gefunden werden.

Die von Kirchhoff gegebene Theorie verlangt, dass die Function φ nebst ihren ersten Differentialquotienten stetige Functionen im Integrationsgebiete sind. Wenn nun das $\int \Omega\, d s$ in der Beugungstheorie über eine berandete Oeffnung erstreckt wird, so schliesst dieses Verfahren die Annahme ein, dass am Rande die Verrückungen unstetig von endlichen Werthen zu Null springen. Es müsste daher jedes auszuwerthende $\int \Omega\, d s$ aus zwei Theilen bestehen: aus dem $\int_0 \Omega\, d s$ über die Beugungsöffnung, soweit in ihr die Verrückungen durch Einführung des Schirmes keine merkliche Störung erleiden — dieses ist auch bisher stets allein ausgewerthet worden — und zweitens aus dem $\int_R \Omega\, d s$ über die dem Rande benachbarten Flächenstücke, in denen ein stetiger, wenn auch sehr schneller Uebergang von Licht zu Dunkelheit stattfindet. Das letzte Integral ist bisher stets vernachlässigt worden, worin zum Theil der Grund zu sehen ist, dass die bei Beugungserscheinungen angestellten Intensitätsmessungen zu Resultaten führten, die mit der Theorie nicht übereinstimmten. [1])

Auch ich sehe mich im Folgenden genöthigt, dieses Integral unberücksichtigt zu lassen, da der stetige Uebergang von Licht zu Dunkelheit am Rande des Schirmes vorläufig noch unbekannt ist. Ich beschränke mich daher darauf zu zeigen, inwieweit das $\int_0 \Omega\, d s$ geeignet ist, die oben besprochene Erscheinung zu beschreiben, und zwar unter Benutzung des zweiten oben angegebenen Weges, da dieser allein zu einer an und für sich möglichen Lichtbewegung führt.

---

1) Fröhlich, Wied. Ann. **15.** p. 591. 1882.

§ 2. **Auswerthung des $\int\limits_0 \Omega\, d s$ für einen im geometrischen Schatten gelegenen Diffractionspunkt.**

Die angenäherte Berechnung des $\int\limits_0 \Omega\, d s$ gelingt durch Anwendung eines Hülfssatzes, der auch von Kirchhoff in seiner Theorie der Strahlung und Beugung benutzt ist.

Ist $\Phi(\zeta)$ in dem Intervalle ζ_0 bis ζ' endlich und stetig, so ist

$$(1)\quad \begin{cases} k\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \Phi(\zeta)\sin(k\,\zeta+\delta)\,d\,\zeta = -\Big[\,\Phi(\zeta)\cos(k\,\zeta+\delta)\Big]_{\zeta_0}^{\zeta'} \\ \qquad\qquad + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \dfrac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta}\cos(k\,\zeta+\delta)\,d\,\zeta. \end{cases}$$

Wenn $d\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ nur eine endliche Zahl von Malen vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht und eine endliche Zahl von Malen sein Vorzeichen wechselt, so wird

$$\lim_{k=\infty}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta}\cos(k\,\zeta+\delta)\,d\,\zeta = 0\,,$$

was sich am einfachsten mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes von P. du Bois-Reymond[1]) erweisen lässt, sodass man erhält:

$$(2)\quad \lim_{k=\infty} k\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \Phi(\zeta)\sin(k\,\zeta+\delta)\,d\,\zeta = -\Big[\Phi(\zeta)\cos(k\,\zeta+\delta)\Big]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

Kirchhoff hat nun das $\int\limits_0 \Omega\, d s$ auf die Gestalt der linken Seite dieser Gleichung gebracht und gezeigt, dass, falls der Diffractionspunkt im geometrischen Schatten liegt, abgesehen von einigen Ausnahmefällen, die auf gewisse Beugungserscheinungen führen, $\Phi(\zeta_0)$ und $\Phi(\zeta')$ Null sind. Er folgerte daraus, dass im allgemeinen im geometrischen Schatten kein Licht vorhanden ist.

Da jedoch in dieser Anwendung der Gleichung (2) die Wellenlänge des Lichtes $\lambda = 2\,\pi\,/\,k$ gesetzt wurde und λ zwar

1) P. du Bois-Reymond, Crelle's Journ. **69.** und **79.**

sehr klein, aber nicht Null ist, ist jene Folgerung nur angenähert richtig, und für Diffractionspunkte im geometrischen Schatten ist daher bei dieser Anwendung des Hülfssatzes die Lichtbewegung allein durch das vernachlässigte Integral

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta$$

bestimmt.

Im Folgenden wird die Gleichung (2) nur auf einen Theil des Intervalles angewendet werden, auf welches Kirchhoff sie angewendet hat, sodass für die neue untere Grenze ζ_0 $\Phi(\zeta)$ nicht wie bei Kirchhoff Null ist. Da die als Resultat sich ergebende Grösse von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$ ist, bleibt zu zeigen, dass die des vernachlässigten Integrals

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta$$

von einer höheren Ordnung klein ist.

Sind $d\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ und $d^2\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta^2$ endlich und stetig, so ist nach wiederholter partieller Integration

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta = \frac{1}{k}\left[\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta}\sin(k\,\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} \\ &+ \frac{1}{k^2}\left[\frac{d^2\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta^2}\cos(k\,\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} - \frac{1}{k^2}\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^3\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta^3}\cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta. \end{aligned} \right.$$

Wenn $d^3\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta^3$ dieselben Eigenschaften hat, die oben für $d\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ vorausgesetzt wurden, so folgt auch, dass

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^3\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta^3} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta$$

für $k = \infty$ Null wird.

Da in den folgenden Anwendungen $\zeta' = \infty$ ist und deshalb der Nachweis dieser Eigenschaften in einigen Fällen für das Intervall ζ_0 bis ∞ wohl schwer zu erbringen ist, so möge bemerkt werden, dass

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{d^3 \Phi(\zeta)}{d\zeta^3} \cos(k\zeta + \delta)\, d\zeta$$

jedenfalls endlich bleibt, falls nur

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \text{abs} \left| \frac{d^3 \Phi(\zeta)}{d\zeta^3} \right| d\zeta$$

endlich ist, eine Bedingung, die in jenen Fällen immer erfüllt ist.

Ist ferner

$$\frac{d\Phi(\zeta')}{d\zeta'} = 0 \text{ und } \sin(k\zeta_0 + \delta) = 0,$$

so besteht

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\, d\zeta$$

nur aus Gliedern, die den Factor $1 / k^2 = \lambda^2 / 4\pi^2$ enthalten.

Es soll jetzt im Folgenden als Beugungsöffnung eine unendliche Halbebene, als Beugungsschirm die andere Halbebene gedacht werden. Der Rand des Schirmes sei die Y-Axe eines rechtwinkligen Coordinatenkreuzes, die positive X-Axe liege in der Beugungsöffnung. Die Coordinaten des leuchtenden Punktes seien x_1, y_1, z_1, die des Diffractionspunktes x_0, y_0, z_0; z_0 sei positiv, dann ist z_1 negativ. Es sei ferner

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \quad \varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad \varrho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Der Anfangspunkt des Coordinatenkreuzes auf dem Schirmrande wird so gewählt, dass $\varrho_1 + \varrho_0$ das Minimum von $r_1 + r_0$ ist.

Es sei nun

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

bis auf einen constanten Factor eine der Wellenfunctionen U, V, W des auffallenden Lichtes; dann ist nach Vernach-

lässigung eines kleinen Gliedes in bekannter Weise nach Kirchhoff[1])

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right) \sin 2\pi \left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$(4) \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi}\int_0 \Omega\, ds = \frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_0}\right) \sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) dx\, dy.$$

Ich setze nun einmal ähnlich wie Kirchhoff

$$r_1 + r_0 - \varrho_1 - \varrho_0 = \zeta$$

und

$$F(\zeta) = \int_0^{\zeta} \left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0}\, ds,$$

wobei die Integration über den Theil der Beugungsöffnung zu erstrecken ist, der zwischen dem Schirmrande und der Curve $r_1 + r_0 + \varrho_1 - \varrho_0 = \zeta$ liegt, dann ist

$$(5) \qquad \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\, d\zeta = \int_{\zeta}^{\zeta + d\zeta} \left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0}\, ds.$$

Die Gleichung (4) erhält jetzt folgende Gestalt:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2\lambda}\int_0^{\infty} \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \sin 2\pi \left(\frac{\zeta + \varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) d\zeta.$$

Entwickelt man nun ζ in der Beugungsöffnung, für die $z = 0$ ist, nach Potenzen von x und y bis zu den Gliedern zweiten Grades, von denen im vorliegenden Falle keines vernachlässigt werden darf, da x_0 und y_0 bei der hier behandelten Erscheinung nicht wie bei der Fresnel'schen Beugungserscheinung an einem geraden Schirmrande kleine Grössen sind, und setzt den erhaltenen Ausdruck gleich σ, so hat man:

$$\begin{aligned}\sigma &= x(\alpha_1 + \alpha_0) + y(\beta_1 + \beta_0) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1 - \alpha_1^2}{\varrho_1} + \frac{1 - \alpha_0^2}{\varrho_0}\right) \\ &\quad - xy\left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{\varrho_1} + \frac{\alpha_0 \beta_0}{\varrho_0}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1 - \beta_1^2}{\varrho_1} + \frac{1 - \beta_0^2}{\varrho_0}\right) \\ &= 2 b_{13} x + 2 b_{23} y + b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2\end{aligned}$$

1) Kirchhoff, Wied. Ann. 18. p. 688. 1883.

$$\alpha_1 = -\frac{x_1}{\varrho_1}, \quad \beta_1 = -\frac{y_1}{\varrho_1}, \quad \gamma_1 = -\frac{z_1}{\varrho_1},$$

$$\alpha_0 = -\frac{x_0}{\varrho_0}, \quad \beta_0 = -\frac{y_0}{\varrho_0}, \quad \gamma_0 = -\frac{z_0}{\varrho_0}.$$

Es ist dann $2\,b_{23} = \beta_1 + \beta_0 = 0$, weil $\varrho_1 + \varrho_0$ das Minimum von $r_1 + r_0$ ist.

Ferner setze ich ähnlich wie oben

$$G(\sigma) = \int_0^\sigma \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1\,r_0}\,d\,s$$

(6)
$$\frac{d\,G(\sigma)}{d\,\sigma}\cdot d\,\sigma = \int_\sigma^{\sigma + d\,\sigma} \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1\,r_0}\,d\,s.$$

Dann ist für kleine Werthe von x und y, für welche obige Entwickelung gilt, also auch für kleine Werthe von ζ und σ

$$F(\zeta) = G(\sigma), \quad \frac{d\,F(\zeta)}{d\,\zeta} = \frac{d\,G(\sigma)}{d\,\sigma}.$$

Ist ζ_0 ein solcher Werth, für den die Entwickelung σ_0 ausreicht, dann ist auch

(7)
$$\frac{1}{2\,\lambda}\int_0^{\zeta_0} \frac{d\,F(\zeta)}{d\,\zeta}\sin\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,\zeta + \vartheta\right)d\,\zeta = \frac{1}{2\,\lambda}\int_0^{\sigma_0} \frac{d\,G(\sigma)}{d\,\sigma}\sin\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,\sigma + \vartheta\right)d\,\sigma,$$

worin

$$\vartheta = 2\,\pi\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

ist. Unterwerfe ich nun noch ζ_0 der Beschränkung, dass

$$\sin\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,\zeta_0 + \vartheta\right) = 0$$

ist und nehme an, was später bewiesen werden soll, dass die im Anfange dieses Paragraphen für $\Phi(\zeta)$ und dessen Differentialquotienten verlangten Eigenschaften auch für $d\,F(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ und $d\,G(\sigma)\,/\,d\,\sigma$ und deren Differentialquotienten erfüllt sind, dann gelten, entsprechend der Gleichung (2), folgende Gleichungen (8), in denen nur Glieder mit dem Factor λ^2 vernachlässigt sind:

$$(8)\begin{cases} \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{\zeta_0}^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)d\zeta = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)\right]_{\zeta_0}^{\infty}, \\ \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)\right]_{\sigma_0}^{\infty}. \end{cases}$$

Vergleicht man nun in den Gleichungen (5) und (6) auf beiden Seiten die Grössenordnungen für $\zeta = \infty$, bez. $\sigma = \infty$, so ergibt sich, dass $dF(\zeta)/d\zeta$ und $dG(\sigma)/d\sigma$ für unendlich grosse Argumente Null sind. Daraus folgt dann weiter, dass die rechten Seiten der Gleichungen (8) gleich sind, und somit auch die linken:

$$(9)\quad \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{\zeta_0}^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)d\sigma.$$

Durch Addition der Gleichungen (7) und (9) erhält man dann:

$$\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)d\sigma.$$

Es ist nun nachträglich noch der Beweis zu erbringen, dass die für die Gleichung (3) nothwendigen Bedingungen in den vorliegenden Anwendungen erfüllt sind, und dass zweitens die vernachlässigten Glieder mit dem Factor λ^2 sonst keine Factoren enthalten, die deren Vernachlässigung unstatthaft machen würden.

Es soll zuerst bewiesen werden, dass $dF(\zeta)/d\zeta$ und die höheren Differentialquotienten für das Intervall ζ_0 bis ∞ endlich sind.

Dazu führe ich in der X-Y-Ebene statt der Variabelen x, y die neuen ζ, y ein. Die infolge der Transformation auftretende Functionaldeterminante ist in diesem Falle $\Delta = \partial x/\partial\zeta$; es wird dann

$$\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{d\zeta}\int\limits_{\zeta}^{\zeta+d\zeta}d\zeta\int\limits_{y_1}^{y_2}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_0}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial\zeta}dy.$$

Hierin sind y_1 und y_2, die beiden Werthe von y auf dem

Schirmrande $x = 0$ für ein bestimmtes ζ, als Functionen der Integrationsvariablen ζ zu denken. Setzt man noch

$$\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \cdot \varDelta = \varphi(\zeta, y),$$

so wird

$$\frac{d F'(\zeta)}{d \zeta} = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(\zeta, y)\, d y,$$

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d \zeta^2} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, y)\, d y + \varphi(\zeta, y_2) \frac{d y_2}{d \zeta} - \varphi(\zeta, y_1) \frac{d y_1}{d \zeta},$$

$$\frac{d^3 F(\zeta)}{d \zeta^3} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \varphi(\zeta, y)\, d y + 2\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, y_2) \frac{d y_2}{d \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, y_1) \frac{d y_1}{d \zeta}\right]$$
$$+ \varphi(\zeta, y_2) \frac{d^2 y_2}{d \zeta^2} - \varphi(\zeta, y_1) \frac{d^2 y_1}{d \zeta^2}.$$

Die Function $\varphi(\zeta, y)$, sowie alle ihre partiellen Differentialquotienten nach ζ sind in der Beugungsöffnung überall endlich, denn es ist:

$$\varphi(\zeta, y) = \left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_0}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \frac{\partial x}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{1}{\frac{x - x_1}{r_1} + \frac{x - x_0}{r_0}},$$

und letzterer Ausdruck ist endlich, falls $x_1 \leqq 0$ und $x_0 < 0$ ist, was stets so eingerichtet werden kann. Die Differentialquotienten von $\varphi(\zeta, y)$ sind endlich, weil bei den partiellen Differentiationen nach x keine neuen Nenner auftreten.

Es bleibt jetzt nur noch die Endlichkeit der Differentialquotienten von y_1 und y_2 zu erweisen. Letztere werden als Functionen von ζ bestimmt, wenn man in der Gleichung $r_1 + r_0 = \zeta + \varrho_1 + \varrho_0 = c$, $x = 0$ setzt. Bringt man diese Gleichung auf eine rationale Form in x und y, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(10) \begin{cases} (r_0^2 - r_1^2)^2 - 2 c^2 (r_0^2 + r_1^2) + c^4 = \\ a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0, \end{cases}$$

wobei bedeutet:

$$a_{11} = 4[(x_0 - x_1)^2 - c^2] \quad a_{13} = -2[(x_0 - x_1)(\varrho_0^2 - \varrho_1^2) - (x_0 + x_1)c^2]$$
$$a_{22} = 4[(y_0 - y_1)^2 - c^2] \quad a_{23} = -2[(y_0 - y_1)(\varrho_0^2 - \varrho_1^2) - (y_0 + y_1)c^2]$$
$$a_{12} = 4(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) \quad a_{33} = (\varrho_0^2 - \varrho_1^2)^2 - 2c^2(\varrho_0^2 + \varrho_1^2) + c^4.$$

Setzt man in obige Gleichung (10) $x = 0$, so wird

$$y_1 = -\frac{a_{23} - \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{22}}, \quad y_2 = -\frac{a_{23} + \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{22}}$$

Da die Grössen a_{ik} ganze Functionen von c, also auch von ζ sind, so treten auch bei wiederholten Differentiationen von y_1 und y_2 nach ζ nur a_{22} und $\sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}$ als Nenner auf. a_{22} kann nie Null werden, sondern ist stets negativ. Nur $a_{23}^2 - a_{22}a_{33}$ kann verschwinden. Letzteres tritt aber, wie aus der Geometrie der Kegelschnitte bekannt ist, nur für die Ellipse der durch die Gleichung (10) definirten Schaar ein, welche die Linie $x = 0$ berührt, also für $\varrho_1 + \varrho_0 = c$ oder $\zeta = 0$. Diese Stelle ist aber bei obiger Anwendung der Gleichung (2) ausgeschlossen worden, was bei Kirchhoff nicht geschehen ist.

Analog dem oben geführten Beweise lässt sich auch für $dG/d\sigma$ und seine Differentialquotienten in dem Intervalle σ_0 bis ∞ die Endlichkeit nachweisen. Zu dem Zwecke führe ich für die Variablen x, y die neuen Variablen σ und y' ein durch die Gleichungen

$$\sigma = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x$$
$$y' = b_{12}x + b_{22}y.$$

Es ist dann

$$\varphi(\sigma, y') = \left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\cdot\varDelta,$$

$$\varDelta = \frac{\partial x}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{1}{\frac{\partial \sigma}{\partial x}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}} = \frac{1}{2[B_{33}x + b_{13}b_{22}]}.$$

$\varDelta$ wird in der Beugungsöffnung nirgends unendlich, da x, $B_{33} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$, b_{13} und b_{22} stets positiv sind. Die Differentialquotienten von $\varphi(\sigma, y')$ nach σ werden auch nirgends unendlich, da bei den partiellen Differentationen nach x und y keine neuen Nenner auftreten, und ferner

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{y'=\text{const.}}} = \frac{b_{22}}{2(x B_{33} + b_{13} b_{22})}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_{y'=\text{const.}}} = \frac{-b_{12}}{2(x B_{33} + b_{13} b_{22})}$$

auch nicht unendlich werden.

Dagegen werden die Differentialquotienten von

$$y_1' = -\sqrt{b_{22}\,\sigma}, \quad y_2' = +\sqrt{b_{22}\,\sigma}$$

zwar unendlich, aber nur für $\sigma = 0$, welche Stelle ebenfalls bei der Anwendung der Gleichung (2) ausgeschlossen ist.

Dass $d^2 F(\zeta) / d\zeta^2$ und $d^2 G(\sigma) / d\sigma^2$ für unendlich grosse Argumente Null sind, ergibt sich aus der oben gegebenen Darstellung derselben, da in ihr r_1 und r_0 im dritten Grade im Nenner auftreten, und dieselben für $\zeta = \infty$ und $\sigma = \infty$ auch unendlich sind.

Es bleibt nur noch übrig die Grösse der vernachlässigten Glieder abzuschätzen im Verhältniss zu der als Resultat sich ergebenden Grösse. Letztere enthält, wie sich später zeigen wird, den Factor $\sqrt{\lambda}$. Die beiden grössten in den Gleichungen (8) unterdrückten Glieder waren

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{d^3 F(\zeta_0)}{d\zeta^3}$$

und

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{d^3 G(\sigma_0)}{d\sigma^3}.$$

Diese Grössen setzen sich, wie bei der Untersuchung von $d^3 F(\zeta) / d\zeta^3$ und $d^3 G(\sigma) / d\sigma^3$ gezeigt wurde, aus einer Summe von Gliedern zusammen, von denen ein Theil für jedes ζ, bez. σ endlich ist. Diese können jetzt wegen des Factors λ^2 ohne Weiteres vernachlässigt werden. Andere dagegen wurden für $\zeta = 0$, bez. $\sigma = 0$ wie $1 / \sqrt{\zeta^3}$, bez. $1 / \sqrt{\sigma^3}$ unendlich. Nun sind zwar ζ_0 und σ_0 klein, können aber noch gross gegen λ, z. B. gleich $N.\lambda$ gewählt werden, wobei N ungefähr $= 1 / \sqrt{\lambda}$ ist. Dann enthalten die vernachlässigten Grössen ausser dem Factor $\sqrt{\lambda}$ noch den Factor $1 / \sqrt{N^3}$. Ausserdem tritt bei $d^3 F(\zeta) / d\zeta^3$ in diesen Gliedern infolge von Differentiationen die

Grösse $c = r_1 + r_0$ im Nenner in einem höheren Grade auf als in den übrigen Gliedern, während in den entsprechenden Gliedern von $d^3 G(\sigma) / d\sigma^3$ die kleine Grösse

$$\sqrt{b_{22}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta_1^2}{\varrho_1} + \frac{1-\beta_0^2}{\varrho_0}\right)}$$

als Factor hinzutritt.

Also wird unter Vernachlässigung nur kleiner Grössen:

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta + \vartheta\right)d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma + \vartheta\right)d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma + \vartheta\right)dx\,dy.$$

Setzt man jetzt:

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{B_{33}}{b_{22}}}\cdot x + \xi_1, \\ \xi_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{b_{22}}{B_{33}}}\cdot b_{13}, \\ \eta = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{b_{22}}}\cdot x + \sqrt{b_{22}}\cdot y\right), \end{cases}$$

wobei die Wurzeln im Folgenden als positiv gedacht werden, so wird

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\sigma = \xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2,$$

$$dx\,.\,dy = \frac{\lambda\,.\,d\xi\,d\eta}{2\pi\sqrt{B_{33}}},$$

$$4B_{33} = \frac{\gamma_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma_0^2}{\varrho_0^2} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_0^2}{\varrho_1\varrho_0} + \frac{(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2}{\varrho_1\varrho_0}.$$

Das Integral, welches $\varphi_0(t)$ angibt, kann nun als folgende Summe dargestellt werden:

$$\frac{\sin\vartheta}{4\pi\sqrt{B_{33}}}\cdot\int_{\xi_1}^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\cos(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)\,d\xi\,d\eta$$

$$+ \frac{\cos\vartheta}{4\pi\sqrt{B_{33}}}\cdot\int_{\xi_1}^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\sin(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)\,d\xi\,d\eta.$$

Da sich $\cos(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)$ und $\sin(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)$ wiederum zerlegen lassen, so bleiben zuerst folgende Quadraturen auszuführen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\, d\eta.$$

Ist η_0 ein solcher Werth, dass für das Intervall 0 bis η_0 $(z_0 / r_0 - z_1 / r_1) 1 / r_1 r_0$ als constant zu betrachten ist, so ist:

$$(12) \quad \int_0^{\eta_0} \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\, d\eta = \left[\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0} \int_0^{\eta_0} \frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\, d\eta.$$

η^2 ist nun eine Function von x und y, in deren Coefficienten der Factor $1 / \lambda$ auftritt (vgl. Gleichung (11)); es wird daher gesetzt $\eta^2 = v / \lambda$, $\eta_0^2 = v_0 / \lambda$. Dagegen ist

$$\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} = \chi(v, \xi)$$

eine Function von x und y, die nicht von λ abhängt. Da $\chi(v, \xi)$ und $d\chi(v, \xi) / dv$ für $v = \infty$ Null sind, so ist, falls v_0 der Beschränkung unterworfen wird, dass $\sin(v_0 / \lambda + \delta) = 0$ ist, entsprechend der Gleichung (2) dieses Paragraphen:

$$\frac{1}{\lambda} \int_{v_0}^{\infty} \chi(v, \xi) \sin\left(\frac{v}{\lambda} + \delta\right) dv = \chi(v_0, \xi) \cos\left(\frac{v_0}{\lambda} + \delta\right).$$

Da nun der Voraussetzung nach für das Intervall 0 bis η_0 $(z_0 / r_0 - z_1 / r_1) 1 / r_1 r_0$ als constant zu betrachten ist, so ist

$$\chi(v_0, \xi) = \left[\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_0}}.$$

Der Gleichung (2) entsprechend ist ferner

$$\frac{1}{\lambda} \int_{v_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \sin\left(\frac{v}{\lambda} + \delta\right) dv = \frac{1}{\sqrt{r_0}} \cos\left(\frac{r_0}{\lambda} + \delta\right).$$

Man hat demnach:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{v_0}^{\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_0}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}}\sin\left(\frac{r_0}{\lambda}+\delta\right)dv \\ &=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\int_{v_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{v}}\sin\left(\frac{v}{\lambda}+\delta\right)dv. \end{aligned}\right.$$

Da

$$\frac{d\frac{1}{\sqrt{v}}}{dv},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{4\pi\sqrt{b_{22}}\,v},\quad \frac{\partial\chi}{\partial v}=\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{d\frac{1}{\sqrt{v}}}{dv}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{v}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]\frac{\partial y}{\partial v}$$

und ebenso die höheren Differentialquotienten nur für $v=0$ unendlich werden, so sind auch in der Gleichung (13) nur Glieder mit dem Factor λ^2 unterdrückt. Zwar ist v_0, welches in dem Nenner dieser Glieder auftritt, klein, es kann jedoch gegen λ noch gross gewählt werden.

Multiplicirt man die Gleichung (13) mit $1/2\sqrt{\lambda}$, führt wieder η statt v ein und setzt das eine Mal $\delta=0$, das andere Mal $\delta=\pi/2$, so erhält man

$$(14)\quad \int_{\eta_0}^{\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\cdot\int_{\eta_0}^{\infty}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta$$

und durch Addition der Gleichungen (12) und (14)

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\int_0^{\infty}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta.$$

Das Entsprechende gilt für das $\int_{-\infty}^{0}$, sodass man erhält:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_0 r_1}\right]_{\eta=0}$$

Es ergibt sich also:

$$4 . \sqrt{2 \pi B_{33}} \cdot \varphi_0 (t) = (\sin \vartheta + \cos \vartheta) \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{\eta = 0} \cos (\xi^2 - \xi_1^2)\, d \xi$$

$$- (\sin \vartheta - \cos \vartheta) \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{x_1} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{\eta = 0} \sin (\xi^2 - \xi_1^2)\, d \xi .$$

Durch die entsprechende Ueberlegung, wie bei den Integralen mit der Variablen η, lässt sich zeigen, dass auch bei diesen der Factor

$$\left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1} \right) \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{\eta = 0,\ \xi = \xi_1} = \left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{x = 0,\ y = 0} = \left(\frac{x_0}{\varrho_0} - \frac{x_1}{\varrho_1} \right) \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1}$$

vor das Integral gezogen werden kann.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\int\limits_{\xi_1}^{\infty} \cos (\xi^2 - \xi_1^2)\, d \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} K, \quad \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \sin (\xi^2 - \xi_1^2)\, d \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} S,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (S - K) = f \sin \frac{2 \pi s}{\lambda}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (S + K) = f \cos \frac{2 \pi s}{\lambda},$$

$$(15) \qquad \operatorname{tg} \frac{2 \pi s}{\lambda} = \frac{S - K}{S + K}, \quad f^2 = K^2 + S^2,$$

so erhält man

$$\varphi_0 (t) = \frac{f}{4 \sqrt{2 \pi B_{33}}} \frac{1}{\varrho_1 \varrho_0} \left(\frac{x_0}{\varrho_0} - \frac{x_1}{\varrho_1} \right) \cos 2 \pi \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0 + s}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

als Werth der Wellenfunction im Diffractionspunkt.

Für die oben eingeführten Integrale K und S sind von Cauchy folgende semiconvergenten Reihenentwickelungen aufgestellt, in denen hier $u_1 = \xi_1 \sqrt{2}$ ist:

$$K = \frac{1}{u_1^3} - \frac{1 . 3 . 5}{u_1^7} + \frac{1 . 3 . 5 . 7 . 9}{u_1^{11}} \ldots$$

$$S = \frac{1}{u_1} - \frac{1 . 3}{u_1^5} + \frac{1 . 3 . 5 . 7}{u_1^9} \ldots$$

Da ξ_1 als Factor $1 / \sqrt{\lambda}$ enthält, so sind diese Reihen sehr brauchbar selbst in dem Falle, dass der Diffractionspunkt nur

in geringer Entfernung von der Grenze des geometrischen Schattens liegt. Erst dann, wenn der Diffractionspunkt dieser Grenze sehr nahe liegt, ist ξ_1 klein, und dann ist es nöthig, folgende Darstellung von f und ε zu benutzen. Setzt man

$$\int_0^{\xi_1} \cos(\xi_1^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{K}$$

und

$$\int_0^{\xi_1} \sin(\xi_1^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma,$$

so ist

$$K = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \cos(\xi^2 - \xi_1^2)\, d\xi - \mathrm{K}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\cos \xi_1^2 + \sin \xi_1^2) - \mathrm{K},$$

$$S = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot (\cos \xi_1^2 - \sin \xi_1^2) + \Sigma\,;$$

$$f \sin \frac{\pi\, \varepsilon}{\lambda} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \xi_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathrm{K} + \Sigma)$$

$$f \cos \frac{2\pi\, \varepsilon}{\lambda} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \xi_1^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathrm{K} - \Sigma)$$

(16) $$\operatorname{tg} \frac{2\pi\,\varepsilon}{\lambda} = \frac{\Sigma + \mathrm{K} - \sqrt{\pi}\, \sin \xi_1^2}{\Sigma - \mathrm{K} + \sqrt{\pi}\, \cos \xi_1^2}$$

$$f^2 = \frac{\pi}{2} + \mathrm{K}^2 + \Sigma^2 - \sqrt{\pi} \left[\sin \xi_1^2 (\mathrm{K} + \Sigma) + \cos \xi_1^2 (\mathrm{K} - \Sigma)\right].$$

Für die Integrale K und Σ gibt es folgende Reihen, die zwar für alle Werthe des Argumentes convergiren, aber nur bei kleinen Werthen desselben praktisch sind:

$$\mathrm{K} = u_1 - \frac{u_1^5}{1.3.5} + \frac{u_1^9}{1.3.5.7.9} \cdots$$

$$\Sigma = \frac{u_1^3}{1.3} - \frac{u_1^7}{1.3.5.7} + \frac{u_1^{11}}{1.3.5.7.9.11} \cdots$$

§ 3. **Bestimmung der Fortpflanzung des gebeugten Lichtes.**

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_0(t) = F\cos 2\pi\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0 + \varepsilon}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

$$F = f\frac{1}{4\sqrt{2\pi B_{33}}}\frac{1}{\varrho_1\varrho_0}\left(\frac{z_0}{\varrho_0} - \frac{z_1}{\varrho_1}\right),$$

so sind für linearpolarisirtes Licht die Wellenfunctionen

$$U_0 = A\varphi_0(t), \quad V_0 = B\varphi_0(t), \quad W_0 = C\varphi_0(t),$$

wobei A, B und C Constante bedeuten, und die Verrückungen

$$u_0 = \frac{\partial V_0}{\partial z_0} - \frac{\partial W_0}{\partial y_0}, \quad v_0 = \frac{\partial W_0}{\partial x_0} - \frac{\partial U_0}{\partial z_0}, \quad w_0 = \frac{\partial U_0}{\partial y_0} - \frac{\partial V_0}{\partial x_0}.$$

Bei diesen Differentiationen ist indessen ein Coordinatensystem mit festem Anfangspunkt vorausgesetzt, während $\varphi_0(t)$ durch Coordinaten dargestellt ist, deren Anfangspunkt auf dem Schirmrande mit dem Diffractionspunkt variirt. Man denke sich daher $\varphi_0(t)$ vorübergehend transformirt in Coordinaten x', y', z', die parallel zu den früheren sind, und deren Anfangsfangspunkt fest im Punkt 1 liegt.

Bei der Differentiation nach x_0', y_0', z_0' kann man sich darauf beschränken,

$$\cos 2\pi\left(\frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \varepsilon}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = \cos\vartheta_1$$

zu differentiren, da hierbei der Factor $1/\lambda$ auftritt, sodass alle Glieder, die durch Differentiren von F hinzutreten würden, dagegen verschwinden. Ferner ist ε, wie sich aus den Gleichungen (15) und (16) ergibt, von der Ordnung λ, sodass die bei der Differentiation von ε auftretenden Glieder auch vernachlässigt werden können. Man hat daher:

$$u_0 = F\frac{\partial\cos\vartheta_1}{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}\left(B\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial z_0'} - C\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial y_0'}\right),$$

$$v_0 = F\frac{\partial\cos\vartheta_1}{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}\left(C\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial x_0'} - A\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial z_0'}\right),$$

$$w_0 = F\frac{\partial\cos\vartheta_1}{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}\left(A\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial y_0'} - B\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial x_0'}\right).$$

Es seien nun x_2', y_2', z_2' die neuen Coordinaten des früheren Anfangspunktes, dann sind

$$\varrho_1 = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2},$$

$$\varrho_0 = \sqrt{(x_0' - x_2')^2 + (y_0' - y_2')^2 + (z_0' - z_2')^2};$$

hierbei sind x_2' und z_2' fest, während y_2' von x_0', y_0', z_0' durch die Gleichung $\beta_0 + \beta_1 = 0$ oder

$$\frac{y_2'}{\varrho_1} = \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0}$$

abhängt. Nun ist aber

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_0'} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x_0'} = \frac{y_2'}{\varrho_1}\frac{\partial y_2'}{\partial x_0'} + \frac{x_0' - x_2'}{\varrho_0} - \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial y_2'}{\partial x_0'} = \frac{x_0}{\varrho_0},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial y_0'} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial y_0'} = \frac{y_2'}{\varrho_1}\frac{\partial y_2'}{\partial y_0'} + \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0} - \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial y_2'}{\partial y_0'} = \frac{y_0}{\varrho_0},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial z_0'} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial z_0'} = \frac{y_2'}{\varrho_1}\frac{\partial y_2'}{\partial z_0'} + \frac{z_0' - z_2'}{\varrho_0} - \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial y_2'}{\partial z_0'} = \frac{z_0}{\varrho_0}.$$

Man erhält also:

$$u_0 = F\frac{\partial \cos\vartheta_1}{\partial \varrho_0}\left(B\frac{z_0}{\varrho_0} - C\frac{y_0}{\varrho_0}\right) = F\left(C\frac{y_0}{\varrho_0} - B\frac{z_0}{\varrho_0}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta_1,$$

$$v_0 = F\frac{\partial \cos\vartheta_1}{\partial \varrho_0}\left(C\frac{x_0}{\varrho_0} - A\frac{z_0}{\varrho_0}\right) = F\left(A\frac{z_0}{\varrho_0} - C\frac{x_0}{\varrho_0}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta_1,$$

$$w_0 = F\frac{\partial \cos\vartheta_1}{\partial \varrho_0}\left(A\frac{y_0}{\varrho_0} - B\frac{x_0}{\varrho_0}\right) = F\left(B\frac{x_0}{\varrho_0} - A\frac{y_0}{\varrho_0}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta_1.$$

Ausser diesem Lösungssystem gibt es noch ein zweites für die Verrückungen [1]), u_0', v_0', w_0', wenn man setzt

$$u_0' = \frac{\partial v_0}{\partial z_0} - \frac{\partial w_0}{\partial y_0}, \quad v_0' = \frac{\partial w_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_0}{\partial z_0}, \quad w_0' = \frac{\partial u_0}{\partial y_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_0}.$$

Ein drittes, allgemeines Lösungssystem erhält man durch lineare Combination der beiden ersten. [2]) Die Frage, welche dieser Lösungen thatsächlich hier gilt, ist zwar für die Intensitätsbestimmung von Bedeutung, aber für die auftretenden Wellenflächen gleichgültig; über diese lässt sich allgemein Folgendes aussagen.

Wird der Einfachheit wegen $x_1 = 0$ gesetzt, was immer ohne Einschränkung des Problems statthaft ist, so ergibt sich aus der zweiten Darstellung von $\operatorname{tg}(2\pi\varepsilon/\lambda)$ (§ 2, Gleichung (16)), dass für $\xi_1 = 0$ oder $\alpha_0 = 0$ auch $\varepsilon = 0$ ist und für kleine Werthe von ξ_1 ε positiv wird. Da ferner ξ_1 wegen des Fac-

1) Rethy, Wied. Ann. **11.** p. 508. 1880.
2) J. Fröhlich, Wied. Ann. **22.** p. 161. 1884.

tors $\sqrt{1/\lambda}$ selbst für mässig kleine Werthe α_0 sehr gross ist, erkennt man aus der ersten Darstellung (§ 2, Gleichung (15)), dass abgesehen von sehr kleinen α_0 mit grosser Annäherung ε constant den Werth $\lambda/8$ hat. Hieraus folgt nun, dass die Verrückungen im geometrischen Schatten Wellen bilden, deren Flächen gleicher Phase sich mit sehr grosser Annäherung durch folgende Construction darstellen lassen.

Man ziehe in der Ebene $x = 0$, welche durch die Lichtquelle und den Schirmrand geht, Kreise um die Lichtquelle, den Punkt 1, als Mittelpunkt und drehe die von dem Schirmrande, der Linie $x = 0$, $z = 0$, abgeschnittenen Kreisbogen um letztere als Axe in den geometrischen Schatten hinein, so erzeugen diese obige Flächen nur mit der Beschränkung, dass die Wellen auf fast der ganzen Fläche gegen den Rand $x_0 = 0$ eine Phasenverzögerung von $\lambda/8$ haben. Diese Wellenflächen kann man als Enveloppen der in den geometrischen Schatten sich fortpflanzenden Kugelwellen auffassen, deren Vorhandensein schon Huygens in seiner Abhandlung „Traité de la lumière“ als Consequenz seiner Theorie anerkannte. Der Grund ihrer geringen Intensität ist der, dass die gebeugte Wellenfläche Enveloppe nur einfach unendlich vieler Kugelflächen ist, während die ungebeugten Wellenflächen stets Enveloppen zweifach unendlich vieler Kugelwellen sind.

Da die Normale dieser Flächen durch den Coordinatenanfangspunkt auf dem Schirmrande geht, und ϱ_0 der eine Hauptkrümmungsradius ist, so folgt, dass diese Wellen bei Accomodation des Auges auf den Coordinatenanfangspunkt denselben als leuchtend erscheinen lassen. Der andere Hauptkrümmungsradius ist nun stets grösser als der erste, nämlich $\varrho_1 + \varrho_0$, und es folgt daraus, dass bei einer Anpassung des Auges auf die erste Krümmung das Licht der Welle als Bild auf der Netzhaut nicht zu einem Punkte, sondern auf einer geraden Linie vereinigt wird, deren Mitte durch die Richtung der Normale der Wellenfläche ϱ_0 bestimmt wird. Da ϱ_0 so definirt war, dass $\varrho_1 + \varrho_0$ ein Minimum ist, so gilt auch hier der Satz, dass der Weg des Lichtes ein Minimum ist.

Aus der oben abgeleiteten Erscheinung, die Gouy die innere Beugung nennt, ergibt sich nun leicht eine damit stets verbundene, die auch von genanntem Forscher experimentell

Untersucht ist und äussere Beugung genannt worden ist. Es liege jetzt der Diffractionspunkt ausserhalb des Schattens; x_0 sei also positiv. Dann muss man, da jetzt für das Integral

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y$$

die obigen Betrachtungen ungiltig werden, setzen:

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y - \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y.$$

Das erste Integral der rechten Seite der Gleichung stellt nun eine Lichtbewegung dar, welche ohne das Vorhandensein des Schirmes stattfinden würde. Das zweite Integral dagegen wird, wenn man x für $-x$ schreibt, genau das oben ausgewerthete Integral. Es lässt sich also die Lichtbewegung ausserhalb des geometrischen Schattens auffassen als eine Superposition zweier Wellenbewegungen, von denen die eine der ungestört sich fortpflanzenden Welle gleich ist, die andere zu der bei der inneren Beugung auftretenden Welle symmetrisch ist, aber mit entgegengesetzter Phase. Letztere Welle gibt die als äussere Beugung bezeichnete Erscheinung. Es mag bemerkt werden, dass der Weg des nach aussen gebeugten Lichtes ein Minimum ist nur in Bezug auf alle Wege, die über den Schirmrand führen.

Man erkennt, wie diese Erscheinung die Vorstellung von Thomas Young von dem leuchtenden Schirmrande bestätigt und wie für die die äussere Beugung gebenden Wellenflächen der Gangunterschied $\lambda / 2$ gegen die Welle der inneren Beugung zu Stande kommt. Die auf Grund der Theorie von Young angestellten Berechnungen der Lage der Interferenzen mit dem ungebeugten Licht ergaben keine genaue Uebereinstimmung mit der Erfahrung, weil es damals noch nicht bekannt war, dass von der Grenze des geometrischen Schattens an für die Beugungswellenflächen eine Phasenverzögerung bis zu $\lambda / 8$ eintritt.

Prüfung der Theorie durch die Beobachtung.

Obgleich von Gouy und Wien nach mannigfachen Richtungen hin Beobachtungen ausgeführt worden sind, die auch

im Folgenden Verwendung finden sollen, so sind doch durch sie zwei Fragen noch nicht beantwortet worden, die bei der Prüfung obiger Theorie als die wichtigsten anzusehen sind: erstens, welches die Wellenflächen sind, in denen sich das beobachtete gebeugte Licht fortpflanzt, und zweitens, in welcher Weise die Intensität des gebeugten Lichtes von der Grenze des geometrischen Schattens an abnimmt.

Bei den im Folgenden beschriebenen Beobachtungen diente als Beugungsschirm eine scharfe Stahlschneide, weil durch eine solche die Voraussetzung der Theorie, die Benutzung eines genau geradlinig begrenzten Schirmes, am besten angenähert erreicht wird.

§ 4. Prüfung der Wellenflächen des gebeugten Lichtes.

Die Theorie verlangt, wie oben gezeigt ist, dass nur diejenige Stelle des Schirmrandes hell erscheint, für welche die auffallenden und gebeugten Strahlen mit der Richtung des Schirmrandes Supplementwinkel bilden, so dass also für eine bestimmte Einfallsrichtung das gebeugte Licht sich auf einen Kegelmantel vertheilt, der im folgenden als Beugungsfläche bezeichnet werden soll. Diese Thatsache konnte leicht bestätigt werden. Zwar beobachtet man, dass auch ausserhalb der Beugungsfläche die Schneide noch leuchtet, doch ist dieses Licht besonders bei mässigen Beugungswinkeln äusserst gering gegen das in derselben beobachtete. Ausserdem zeigt sich die auffallende Thatsache, dass die Stellen der Schneide, welche innerhalb der Beugungsfläche besonders hell erscheinen, ausserhalb dieser das wenigste Licht zeigen. Es liegt die Vermuthung nahe, dass diese Stellen die Voraussetzung der Theorie, dass sie gerade und scharf sind, in höherem Maasse erfüllen als die anderen. Eine Prüfung unter dem Mikroskop bestätigte dieses, so dass als Grund des Leuchtens der Schneide auch ausserhalb der Beugungsfläche das nach allen möglichen Richtungen reflectirte Licht der Gratstückchen und der an diesen unvermeidlich hängenden Staubtheilchen anzusehen ist.

Die Thatsache, dass fast die ganzen Wellenflächen gegen die Stellen an der Grenze des geometrischen Schattens eine Verzögerung um $\lambda/8$ haben, entzieht sich bei der inneren Beugung vollkommen der Prüfung. Nur bei der äusseren

Beugung ist eine solche möglich durch Beobachtung der Interferenz des gebeugten und des nicht gebeugten Lichtes. Da jedoch für das Grenzgebiet, in dem allein jene Interferenzen beobachtet werden können, obige Theorie mit der für die Fresnel'sche Beugungserscheinung an einem geraden Schirmrande gegebenen zusammenfällt, und diese genügende Uebereinstimmung mit der Erfahrung aufweist, so ist hier eine solche Prüfung überflüssig.

An dieser Stelle ist eine Beobachtung zu erwähnen, die sowohl von Gouy wie von Wien gemacht ist. Die Verticalcomponente des gebeugten Lichtes zeigte bei grossen Beugungswinkeln eine Phasenverzögerung gegen die Horizontalcomponente. Wien beobachtete diese Erscheinung nur bei den benutzten Stahlschneiden nicht, und Gouy beobachtete auch bei Stahl eine Phasenverschiebung bis zu $\lambda / 4$ bei Anwendung abgerundeter Schirme. Es scheint demnach nicht sowohl das Material des Schirmes, als vielmehr dessen Gestalt für diese Erscheinung maassgebend zu sein, und wenn bei allen Metallen ausser Stahl die Phasenverschiebung stets merklich war, so dürfte dieses seinen Grund darin haben, dass erstere nie so fein wie Stahl geschliffen werden können.

Mit obiger Theorie dürfte diese Erscheinung in folgender Weise in Einklang zu bringen sein. Es ist sicher, dass die den Bedingungen der Theorie entsprechend zu wählende Integrationsgrenze nicht genau mit dem Schirmrande zusammenfällt, da in der unmittelbaren Nachbarschaft des Randes Beeinflussungen der Lichtbewegung stattfinden, während das Integral nur soweit über die Beugungsöffnung auszudehnen ist, als die Lichtbewegung in derselben trotz Einführung des Schirmes keine merkliche Störung erleidet. Wenn nun für beide Componenten diese Beeinflussung in verschiedener Weise stattfindet, so sind demnach für beide andere Grenzen zu wählen, woraus sich dann für grosse Beugungswinkel eine Phasendifferenz ergiebt. Dieselbe ist indessen bei einer einmaligen Beugung an einem scharfen Schirme unmerklich, wie die Beobachtungen an Stahl zeigen. Es ist aber begreiflich, dass bei stumpfen oder abgerundeten Schirmen, an denen das Licht erst nach mehrmaliger Beugung um grosse Winkel abgelenkt wird, eine Phasendifferenz merklich wird.

§ 5. **Beobachtung der Abnahme des gebeugten Lichtes bei wachsendem Beugungswinkel.**

Der allgemeine Ausdruck für die Amplitude des gebeugten Lichtes in der ersten Darstellung (§ 2, Gleichung 15) zeigt, wie bei der Berechnung der Amplitude noch näher ausgeführt werden wird, dass, wenn im auffallenden, weissen Lichte $f(\lambda)$ die Intensität des Lichtes mit der Wellenlänge λ ist, ausgenommen sehr kleine Beugungswinkel die Intensität des gebeugten Lichtes mit der Wellenlänge λ proportional $\lambda . f(\lambda)$ ist. Daraus geht hervor, dass das gebeugte Licht eine schwache röthlichgelbe Färbung zeigen muss, und zwar dieselbe Färbung für alle grösseren Beugungswinkel, bei denen die erste Darstellung der Amplitude gilt. Das ist, wie die Beobachtungen von Gouy und Wien zeigen, nur bei Benutzung feiner Stahlschneiden als Beugungsschirm der Fall, welche in einem schwach gelblichen, fast weissem Lichte leuchteten. Indessen ergaben auch die Beobachtungen mit Stahl, dass das Licht mit wachsendem Beugungswinkel sich immer röther färbte, wenn man stumpfe oder abgerundete Schirme benutzte.[1]) Da auch die Beobachtungen an Schirmen aus anderen Metallen, welche nie die Schärfe der Stahlschirme erreicht haben dürften, vorzugsweise roth gefärbtes Licht ergaben, dessen Färbung mit wachsendem Beugungswinkel zunahm, so scheint in erster Linie nicht das Material, sondern die Gestalt des Schirmes die stärkere Färbung zu bewirken, indem abgerundete Schirme durch wiederholte Beugung ein immer stärkeres Hervortreten des Lichtes mit grosser Wellenlänge verursachen.

Weil nach Obigem Beobachtungen an fein geschliffenen Stahlschneiden die beste Aussicht bieten, Uebereinstimmung mit der Theorie aufzuweisen, wurden solche bei den im Folgenden beschriebenen Beobachtungen benutzt.[2]) Dieselben wurden mit dem Rande in die Axe eines Spectrometers gestellt. Durch ein rechteckiges, schmales, verstellbares Diaphragma fiel paralleles, linearpolarisirtes Licht senkrecht auf den Rand, so dass bei den folgenden Beobachtungen die

1) Gouy, Ann. de chim. et de phys. VI. série. 8. 1886. p. 159.

2) Für kleine Beugungswinkel bis ungefähr 10° zeigten auch Beobachtungen an einer feinen Silberschneide gute Uebereinstimmung.

Beugungsfläche eine Ebene war. Als Lichtquelle diente eine Zirkonlampe, deren glühender Zirkonkörper bei den verschiedenen Beobachtungen verschiedene Breite hatte. Durch die Anwendung parallelen Lichtes wurde nicht nur der Vortheil einer möglichst einfachen Verwerthung der Theorie erreicht, sondern vor allem ermöglicht, die Beugung schon von 1^0 an zu beobachten, ohne durch das ungebeugte Licht gestört zu werden.

Um beide Componenten einzeln zu untersuchen, lies man zuerst parallel zum Rande polarisirtes Licht auffallen, dann zum Rande senkrecht polarisirtes.

Das im geometrischen Schatten als Lichtlinie sich zeigende gebeugte Licht wurde nun verglichen mit einem seitlich durch eine unveränderliche Lichtquelle beleuchteten Coconfaden, welcher in ungefähr 1 cm Entfernung vor dem Schirmrande parallel angebracht war, sodass bei einer Entfernung des Auges um 31 cm Schirmrand und Faden ohne Aenderung der Accomodation gleichzeitig deutlich sichtbar waren. Der Faden und sein Beleuchtungsapparat, ein Amylacetatlämpchen, waren mit dem Beobachtungsrohr gleichzeitig drehbar. Im letzteren befand sich ausser einigen Diaphragmen nur ein Nicol, welcher so lange gedreht wurde, bis das linearpolarisirte gebeugte Licht gleich dem von dem Faden herkommenden Lichte war. Der Faden und seine Beleuchtung mussten so gewählt werden, dass das von ihm ausgehende Licht schwächer war, als das gebeugte Licht bei einem Beugungswinkel, bis zu dem man die Vergleichung ausführen wollte.

Um das von dem Faden ausgehende Licht möglichst gleichmässig zu machen, wurde derselbe stark tordirt, was zur Folge hatte, dass das theilweise polarisirte Licht des Fadens weder in der Richtung des letzteren noch senkrecht dazu polarisirt war. Grösse und Richtung der Polarisation konnten durch einen Kalkspat und Nikol ausgewerthet werden.

Ich gebe zur Veranschaulichung des benutzten Apparates ein Schema desselben an.

Da, wie schon die Theorie vermuthen lässt, sehr grosse Intensitätsdifferenzen für verschiedene Beugungswinkel sich ergeben, so sollen im Folgenden die Angaben für die Amplituden erfolgen. Es sei a die des gebeugten Lichtes, v das Azimuth

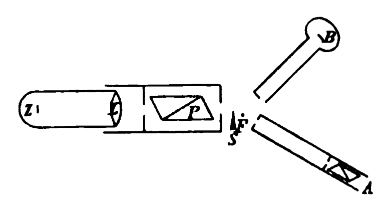
des Analysators gegen die Verticale, bei welchem Rand und Faden gleich hell erscheinen, b die Amplitude der halben Intensität des natürlichen Lichtes des Fadens, p die seines polarisirten Lichtes, φ das Azimuth des letzteren gegen die Verticale, so hat man für a folgende Gleichungen: für verticalpolarisirtes gebeugtes Licht

$$a_v = \frac{b\sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}\cos^2(\nu - \varphi)}}{\cos\nu},$$

für horizontalpolarisirtes gebeugtes Licht

$$a_h = \frac{b\sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}\cos^2(\nu - \varphi)}}{\sin\nu}.$$

p/b und φ waren für alle Beobachtungen dieselben vorher ausgewertheten Grössen, ν war mit dem Beugungswinkel veränderlich und wurde jedesmal abgelesen; nur b blieb unbekannt, aber unveränderlich, so dass man aus dem Verhältniss a/b die Abnahme der Intensität im geometrischen Schatten erhielt.



Z leuchtender Zirkonkörper, *L* Linse, *P* Polarisator, *S* Schirm, *F* Coconfaden, *B* Beleuchtungsvorrichtung des Fadens, *A* Analysator.

Es war wünschenswerth, auch die Intensität des ungebeugten Lichtes mit der für irgend einen Beugungswinkel zu vergleichen. Da indessen beide Lichtarten verschiedene Wellenflächen haben, so war es unmöglich, dieselben auf einfache und sichere Weise zu vergleichbaren Bildern zu vereinigen. Man musste daher auf den Versuch sich beschränken, ob nicht durch Rechnung für b ein Werth gefunden werden konnte, so dass für eine grössere Reihe von Beobachtungen Uebereinstimmung mit der Theorie stattfindet. Dieses ist nun für Beugungswinkel δ von 2^0 bis 10^0, für welche die Abnahme der Intensität besonders charakteristisch ist, in dem Maasse gelungen, dass die Uebereinstimmung mit der Theorie für diese Strecke als erwiesen anzusehen ist. Bevor ich jedoch die Beobachtungsresultate angebe, ist es nöthig, den aus der Theorie für den vorliegenden Fall sich ergebenden Ausdruck der Am-

plitude zu betrachten, um die Umstände, die bei der Ausführung der einzelnen Beobachtungsreihen zu beachten waren, kennen zu lernen.

Da es zweifelhaft ist, durch welche der in § 3 besprochenen Lösungen und durch welche Wellenfunctionen die Wellen bestimmt sind, die von der Lichtquelle ausgehen, durch eine Linse eben oder fast eben gemacht und durch einen Nikol linearpolarisirt sind, so sollen die durch Beobachtungen gewonnenen Resultate mit dem in der Theorie einfachsten Falle verglichen werden, indem bei parallel oder senkrecht zum Schirmrande polarisirtem Licht, das in der Richtung der Z-Axe auffällt, die Wellen einmal durch die Function U, das andere Mal durch V bestimmt sind. Dann ergibt sich für die eine Componente als Amplitude $a_1 = 2\pi B_1 F/\lambda$, für die andere $a_2 = 2\pi A_1 F \cos\delta/\lambda$, wobei für die erste Lösung $B_1 = B$, $A_1 = A$ ist, für die zweite Lösung $B_1 = A\,2\pi/\lambda$, $A_1 = B\,.\,2\pi/\lambda$. Da es zweifelhaft ist, welche dieser Lösungen hier die richtige ist, und ob das Licht eine Schwingung in der Polarisationsebene oder senkrecht dazu ist, ist es unmöglich auszusagen, welche der oben angegebenen Componenten die vertical, und welche die horizontal polarisirte ist.

Es war nun aber

$$F = \frac{f}{4\sqrt{2\pi B_{33}}} \cdot \frac{1}{\varrho_1 \varrho_0}\left(\frac{x_0}{\varrho_0} - \frac{x_1}{\varrho_1}\right),$$

$$4 B_{33} = \frac{\gamma_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma_0^2}{\varrho_0^2} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_0^2}{\varrho_1 \varrho_0} + \frac{(\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0)^2}{\varrho_1 \varrho_0}.$$

Für den vorliegenden Fall ist:

$$\varrho_1 = \infty, \qquad \alpha_0 = \sin\delta, \qquad \alpha_1 = 0,$$
$$\varrho_0 = 310\,\text{mm}, \qquad \beta_0 = 0, \qquad \beta_1 = 0,$$
$$\frac{x_0}{\varrho_0} - \frac{x_1}{\varrho_1} = 1 + \cos\delta, \qquad \gamma_1 = 1, \qquad \gamma_0 = -\cos\delta,$$

so dass man erhält:

$$F = \frac{1 + \cos\delta}{\sqrt{8\pi\varrho_1 \cos\delta}} \cdot f.$$

Da die Messungen sich erst von 2^0 an ausführen liessen, so kann man sich auf die Darstellung von f für grosse Beugungswinkel beschränken, in welcher (§ 2 Gleichung 15)

$$f = \sqrt{K^2 + S^2}$$

war. Da ferner schon für $\delta = 30'$ der Fehler kleiner als 0,0001 ist, falls f dem ersten Gliede der Reihe für S gleich gesetzt wird, so soll dieses geschehen; es ergibt sich:

$$f = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\xi_1 \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2 \pi \varrho_0}} \,.\, \operatorname{cotg} \delta.$$

Werden jetzt, um bei den Angaben möglichst Decimalstellen zu vermeiden, die Amplituden des auffallenden Lichtes $2 \pi B_1 / \lambda \varrho_1$ und $2 \pi A_1 / \lambda \varrho_1 = 10000$ gesetzt, so wird die Amplitude für die eine Componente

$$a_1 = \frac{10\,000}{4 \pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho_0}} \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2},$$

für die andere

$$a_2 = \frac{10\,000}{4 \pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho_0}} \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2} \,.\, \cos \delta.$$

Da für alle Farben die Abnahme der Amplitude bei der Beugung für $\delta > 30'$ dieselbe ist, und bei den Messungen der Proportionalitätsfactor b unbekannt bleibt, so ist es gleichgiltig, welchen Werth man für λ einsetzt; es wird bei den folgenden Angaben die Wellenlänge der D-Linie $\lambda = 0{,}000\,589$ benutzt werden.

Stellt man nun das Quadrat der Amplitude oder die Intensität als Function von δ in rechtwinkligen Coordinaten graphisch dar, so sieht man, dass die Curve von 1^0 bis ungefähr 10^0 eine starke Krümmung hat und dass sie dann in jedem Intervalle von 5^0 für δ angenähert geradlinig verläuft. Dieser Umstand war bei den Beobachtungen in folgender Beziehung zu beachten. Als Lichtquelle diente ein Zirkoncylinder mit weissglühender Basisfläche. Diese hatte einen Durchmesser von 9 mm. Da die Linse, welche das Licht parallel machte, eine Brennweite von 11 cm hatte, so wichen die Richtungen der äussersten parallelen Strahlenbündel um $\pm 2{,}4^0$ von der mittleren Richtung, für welche $\delta = 0$ gesetzt wurde, ab. Die für den Winkel δ beobachtete Intensität war daher ein gewisser mittlerer Werth der Intensitäten, zwischen den Winkeln $\delta - 2{,}4^0$ und $\delta + 2{,}4^0$. Dieser mittlere Werth kann nur dann mit dem Werthe für δ übereinstimmen, falls die

Intensität in diesem Intervalle als lineare Function des Beugungswinkels zu betrachten ist. Dieses ist angenähert nur für $\delta > 10^0$ der Fall. Für kleinere Beugungswinkel musste daher die Lichtquelle entsprechend verschmälert werden, sie erhielt die Breite von 2 mm, während ihre Höhe dieselbe blieb, so dass die Abweichungen der äussersten Strahlenbündel gegen die mittlere Richtung $\pm 0{,}5^0$ in der Horizontalebene betrugen. Dann gaben die Beobachtungen schon von $\delta = 2^0$ an brauchbare Werthe.

Der Verlauf der Curve war indessen auch noch in folgender Beziehung von Bedeutung. Es war nicht möglich, die Richtung $\delta = 0$ genau aufzufinden, nach vorher angestellter Schätzung betrug der mögliche Fehler bis zu $0{,}5^0$. Dieser Fehler war für Beugungswinkel $\delta > 10^0$ unwesentlich, dagegen für die ersten Grade äusserst bedeutend. Es musste daher versucht werden, ob für die betreffenden Beobachtungsreihen eine Correction der Beugungswinkel, welche die oben angegebene Grenze nicht überschritt, sich finden liess, sodass die Uebereinstimmung mit der Theorie hergestellt war. Dieses gelang auch in vollkommen genügendem Maasse.

Endlich ist zu erwähnen die Behandlung der Stahlschneide als Beugungsschirm. Die beste zur Verfügung stehende Stahlschneide hatte einen Schneidenwinkel von $21{,}3^0$. Jedoch war, wie die Beobachtungen an anderen Stahlschneiden, die auch mit grosser Sorgfalt angefertigt waren, zeigten, die Grösse dieses Winkels unwesentlich. Die geringen Abweichungen, welche beobachtet wurden, können vollständig durch geringere Güte des Randes erklärt werden. Auch die Stellung der Schneidenflächen gegen die Einfallsrichtung war für die Grenzen, in denen die Beobachtungen ausgeführt wurden, ohne Bedeutung. Zwar hat Gouy[1]) häufig eine Abhängigkeit der Intensität von der Stellung der Schneide beobachtet, indessen erklärt er selbst diese Thatsache durch die verschiedene Krümmung des Schirmrandes. Für sehr scharfe Schneiden, wie die benutzte, tritt jedenfalls dieser Einfluss ganz zurück gegen die Bedeutung, welche die Reinigung des Randes von Staubtheilchen hat. Sie wurde erreicht durch Ueberstreichen mit

---

1) Gouy, l. c. p. 157—158.

einem Blättchen faserfreien Seidenpostpapiers, welches sich als das beste Mittel bewährte. Mangelhafte Reinigung bewirkte, dass für grössere Beugungswinkel die Intensität oft um mehr als die Hälfte geschwächt wurde. Nur von geringem Einfluss war dagegen die Reinigung auf die verhältnissmässig grosse Intensität der Beugung für kleinere Winkel.

Es mag bei dieser Gelegenheit eine Beobachtung erwähnt werden, die sich nach den obigen Bemerkungen leicht erklären lässt. Es wurde statt eines Schirmes ein von zwei feinen Stahlschneiden gebildeter Spalt beobachtet. Beide Schneiden waren nicht von ganz gleicher Güte und konnten, da sie sehr nahe gegenüberstanden, nicht jederzeit in genügender Weise gereinigt werden. Es zeigte sich, dass, während für gewisse Beugungswinkel auf einer Seite der Beugung die Helligkeit beider Schneiden fast gleich erschien, die Helligkeit beider für dieselben Beugungswinkel auf der anderen Seite grosse Differenzen zeigte. Diese Thatsache beweist, welch bedeutenden Antheil die verschiedene Schärfe der Furchenränder bei Gittern an der Erscheinung hat, dass die Intensität zu beiden Seiten der Einfallsrichtung für gleiche Beugungswinkel nicht gleich ist.[1])

Die Beobachtungen wurden nur für die ersten Grade von Grad zu Grad angestellt, für grössere Beugungswinkel nur alle 5—10 Grade. Die Einstellungen erfolgten auf volle Grade von δ. Im Folgenden sind jedoch schon die durch die wahrscheinliche Correction $\Delta\delta$ von δ verbesserten Werthe in der Form $\delta + \Delta\delta$ angegeben.

Die angegebenen Zahlen sind in der Weise aufgestellt, dass die aus den Beobachtungen gewonnenen Verhältnisszahlen der Amplituden für die ersten 10 Grade mit einem solchen Proportionalitätsfactor multiplicirt wurden, dass sie Uebereinstimmung mit den berechneten Werthen zeigten; für grössere Beugungswinkel ist dieses unmöglich, doch liess sich durch theilweise Wiederholung der ersten Beobachtungsreihen ein Anschluss an diese finden. Ich gebe hier einzelne dieser Reihen der beobachteten Amplituden a_v und a_h, die sowohl untereinander als auch mit mehreren anderen, die hier nicht mitgetheilt sind, gute Uebereinstimmung aufweisen, an und daneben zum Ver-

1) Fröhlich, Wied. Ann. 22. p. 172. 1884.

gleich die Werthe der berechneten Amplituden a_1 und a_2. Die positiven Beugungswinkel geben die innere Beugung, die negativen die äussere an.

I.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
2 +0,3	52	55	55	5 +0,3	22	24	24
3 +0,3	38	38	38	7 +0,3	18	17	17
4 +0,3	31	29	29	10 +0,3	13	12	12

II.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
2 −0,2	72	70	70	7 −0,2	19	18	18
3 −0,2	45	45	45	10 −0,2	14	13	13
4 −0,2	31	33	33	15 −0,2	8,1	8,4	8,1
5 −0,2	27	26	26	20 −0,2	5,7	6,4	5,9

III.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
5	25	25	25	20	4,7	6,2	5,8
7	18	18	18	25	3,6	4,9	4,5
10	12	13	12	35	2,1	3,5	2,9
15	7,5	8,3	8,0				

IV.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
15	8,1	8,3	8,0	75	0,35	1,4	0,37
25	3,5	4,9	4,5	−15	4,6	8,3	8,0
35	2,1	3,5	2,9	−25	1,8	4,9	4.5
45	1,2	2,6	1,9	−35	0,80	3,5	2,9
55	0,83	2,1	1,2	−45	0,58	2,6	1,9
65	0,60	1,7	0,73	−55	0,65	2,1	1,2

V.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
15	8,1	8,3	8,0	−45	0,64	2,6	1,9
25	3,4	4,9	4,5	−55	0,88	2,1	1,2
−15	4,3	8,3	8,0	−65	1,5	1,7	0,73
−25	1.8	4,9	4,5	−75	1,68	1,4	0,37
−35	0,82	3,5	2,9	−85	1,73	1,2	0,10

VI.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
10	13	13	12	− 6	26	21	21
15	8,1	8,3	8,0	− 7	21	18	18
20	5,8	6,2	5,8	−10	16	13	12

VII.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
2 +0,3	50	55	55	5 +0,3	25	23	23
3 +0,3	38	38	38	7 +0,3	18	17	17
4 +0,3	31	29	29	10 +0,3	13	12	12

VIII.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
2 −0,2	67	70	70	7 −0,2	17	18	18
3 −0,2	43	45	45	10 −0,2	12	13	13
4 −0,2	32	33	33	15 −0,2	7,4	8,4	8,2
5 −0,2	25	26	26	20 −0,2	4,7	6,3	5,9

IX.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
3−0,3	49	47	47	15 −0,3	7,3	8,5	8,2
4−0,3	35	34	34	20 −0,3	4,7	6,3	5,9
5−0,3	26	27	27	25 −0,3	2,8	5,0	4,6
6−0,3	24	22	22	−6 −0,3	38	20	20
10−0,3	12	13	13	−8 −0,3	23	15	15

X.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
20	4,9	6,2	5,8	35	1,4	3,5	2,9
25	2,9	4,9	4,5	40	1,0	3,0	2,3
30	1,9	4,1	3,5	45	0,66	2,6	1,9

XI.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
10	13	13	12	− 6	37	21	21
15	7,6	8,3	8,0	− 7	30	18	18
20	4,9	6,2	5,8	− 10	24	13	12
25	3,2	4,9	4,5	− 15	14	8,3	8,0

XII.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
10	12	13	12	−45	3,7	2,6	1,9
15	7,5	8,3	8,0	−55	3,6	2,1	1,2
25	3,2	4,9	4,5	−65	3,2	1,7	0,73
−25	5,2	4,9	4,5	−75	2,8	1,4	0,37
−35	4,1	3,5	2,9	−85	2,9	1,2	0,10

Zum übersichtlichen Vergleich der Theorie und Beobachtung verweise ich auf die beigefügten graphischen Darstellungen.

Es beweisen in Bezug auf die innere Beugung die Beobachtungsreihen I, II und III für die Verticalcomponente, die Reihen VII, VIII und IX für die Horizontalcomponente die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung bis ungefähr $\delta = 10^0$ oder 15^0, worin ein zweiter Beweis dafür zu sehen ist, dass die vorliegende Erscheinung im wesentlichen der Theorie entspricht. Dagegen zeigen die Reihen III und IV für die Verticalcomponente und besonders die Reihen X und XI für die Horizontalcomponente von $\delta = 15^0$ an bedeutende Abweichungen derart, dass die beobachteten Grössen kleiner sind als die berechneten, sodass auch keine lineare Combination von a_1 und a_2 die Beobachtungen genau wiederzugeben imstande ist.

Die für die äussere Beugung gegebenen Zahlen zeigen keine so gute Uebereinstimmung mit der Theorie und untereinander, wie die für die innere Beugung. Für gewisse Stellen übertrifft die beobachtete Intensität die berechnete (Reihe: VI, IX, XI, XII). Der Grund dafür ist in Reflexionen am Rande der Schneide zu finden. Dieselben waren bei gewisser Stellung der Schneide und bei grossen Beugungswinkeln leicht festzustellen, wenn das von der Schneide herkommende Licht zum Theil depolarisirt war. Sie konnten dann durch eine Drehung des Schirmes um den Rand vermieden werden. Bei der äusseren Beugung wurde also eine Abhängigkeit der Helligkeit von der Stellung der Schneide beobachtet, die jedoch nicht der Beugung, sondern der Reflexion zuzuschreiben ist. Dagegen konnten Reflexionen von Licht, das ebenso polarisirt war wie das gebeugte, unmöglich erkannt und vermieden

werden. In Bezug auf die eigenthümliche Reflexion des Lichtes an sehr feinen Schneiden verweise ich auf Gouy.[1])

Die Abweichungen für grössere Beugungswinkel, sind zum Theil zu erklären durch Beeinflussungen der Lichtbewegung in der nächsten Nachbarschaft des Schirmes, deren Wirkung im § 1 durch den Werth des $\int\limits_R \Omega\, ds$ zusammengefasst ist. Indessen sind die Abweichungen sicher nicht vollständig diesem Einflusse zuzuschreiben, sondern es wirken dabei auch noch die Abweichungen von der Voraussetzung der Theorie mit, welche einen absolut scharfen und geraden Schirm annahm. Sicher sind allerdings die Abweichungen beider Componenten von einander in der Farbe (die Horizontalcomponente zeigt nie Färbung) und theilweise auch in der Intensität als durch das Material des Schirmes hervorgerufen zu betrachten. Diese Unterschiede in dem Verhalten beider Componenten waren in den Arbeiten von Gouy und Wien vorzüglich Gegenstand der Untersuchung, und daher ist es erklärlich, wenn Wien dem Material des Schirmes eine besonders wichtige Rolle bei Bildung der Erscheinung zuschreibt. Nach dem jetzigen Ergebniss hat man diese Erscheinung aufzufassen als zum allergrössten Theil durch einfache Beugung hervorgerufen, während der unzweifelhafte Einfluss des Materials schwer von den Störungen durch die fehlerhafte Gestalt des Schirmes zu trennen ist.

Nachtrag.

Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit erhielt ich Kenntniss von einer erst vor kurzem erschienenen Arbeit von Poincaré[2]), „Sur la polarisation par diffraction“, welche ebenfalls die von Gouy beschriebene Erscheinung theoretisch behandelt. Diese Behandlung unterscheidet sich von obiger sehr wesentlich dadurch, dass Poincaré keine Kugelwelle mit divergenten Strahlen auf den Schirmrand auffallen lässt, sondern ein durch eine cylindrische Linse convergent gemachtes Strahlenbündel, dessen Brennlinie im Schirmrande

---

1) Gouy, l. c. p. 186 u. 187.

2) Poincaré, Acta mathemat. **16.** p. 297. 1893.

liegt, wodurch die Einführung Bessel'scher Functionen ermöglicht wird. Ausserdem berücksichtigt Poincaré den Einfluss des metallischen Schirmrandes auf die electromagnetischen Schwingungen, durch den er unter anderem den Polarisationszustand des gebeugten Lichtes erklärt. Es wäre von Interesse, zu sehen, inwieweit unter den oben angegebenen Bedingungen ausgeführte Intensitätsmengen die theoretischen Resultate bestätigen.

Königsberg i. Pr., Math.-physikal. Laborat., Dec. 1892.

---

3. *Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwerthung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung; von Otto Wiener.*

---

§ 1. Bahn eines Lichtstrahls in stetig veränderlichem Mittel.

Wenn ein Lichtstrahl ein durchsichtiges, einfach brechendes Mittel, bestehend aus einer Reihe planparalleler Schichten von endlicher Dicke und verschiedenem Brechungsvermögen durchsetzt, so wird er eine mehrfach gebrochene Linie beschreiben. Denkt man sich die Schichten der Einfachheit halber horizontal ausgebreitet, so bildet der Lichtstrahl mit der Verticalen an beliebiger Stelle einen Winkel, dessen Sinus dem Snellius'schen Brechungsgesetz zufolge mit dem Brechungsexponenten an derselben Stelle ein constantes Product erzeugt.

Folgen die Schichten bei verschwindender Dicke in unendlicher Anzahl aufeinander, während der Brechungsexponent gleichzeitig sich stetig ändert, so geht die Bahn des Lichtstrahls aus der mehrfach gebrochenen in eine stetig gekrümmte Linie über. Dieselbe wird im allgemeinen auf gleiche Weise durch das genannte Brechungsgesetz bestimmt sein.

Welche Bahn wird aber der Lichtstrahl beschreiben, wenn er in horizontaler Richtung in das stetig veränderliche Mittel eintritt, d. h. in einer Richtung, längs deren der Brechungsexponent unverändert bleibt? Man könnte vermuthen, dass er unabgelenkt die gegebene Richtung beibehält. Denn so würde er vollkommen dem Snellius'schen Brechungsgesetz genügen. Diese Vermuthung trifft aber keineswegs zu: Der Lichtstrahl krümmt sich sofort, indem er sich Schichten mit wachsenden Brechungsexponenten zuwendet. Ja die Krümmung ist bei horizontalem Eintritt am stärksten.

Wie klärt sich dieser Widerspruch auf? Das Snellius'sche Gesetz leitet sich aus dem Grundgesetz der Wellenbewegung, dem Huygens'schen Princip, ab; indess nur für den Fall homogener Mittel; im vorliegenden Fall aber schliesst dieses Princip einen geradlinigen Fortgang des Lichtstrahls aus.

Es seien $A A'$ (vgl. Fig. 1.) zwei Punkte der Wellenfläche des in horizontaler Richtung eintretenden Lichtstrahls. Sie bilden die Erschütterungscentren zweier mit verschiedener Geschwindigkeit c und c' sich ausbreitender Elementarwellen, welche für den Moment nach Ablauf eines kleinen Zeittheilchens durch die um A und A' gelegten Kreise dargestellt werden, deren Radien mit c und c' proportional sind.[1]) Nach diesem Zeittheilchen geht also die Wellenfläche durch die gemeinsame Berührende $B B'$. Der Schnitt M dieser Linie mit der Verticalen $A A'$ ist der Krümmungsmittelpunkt des Lichtstrahls. Sein Abstand von A, d. h. der Krümmungsradius r, ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A B M$ und $A C A'$. Wird der Abstand $A A'$ mit $d x$, der Unterschied von c und c' mit $d c$ bezeichnet, so folgt:

$$d x : r = d c : c.$$

Da die procentische Aenderung der Lichtgeschwindigkeit gleich derjenigen des Brechungsexponenten ist, d. h.:

$$dc : c = dn : n$$ [2]),

so ist auch:

$$d x : r = d n : n,$$

also $r = n : d n / d x$.

Fig. 1.

Wird das Gefälle des Brechungsexponenten $d n / d x$ mit n' bezeichnet, so folgt für den Krümmungsradius des Lichtstrahls die einfache Beziehung:

$$(1) \qquad r = \frac{n}{n'}.$$

Der Krümmungsradius eines Lichtstrahls, welcher horizontal in ein horizontal geschichtetes, längs der Verticalen stetig veränderliches Mittel eintritt, ist gleich dem Verhältniss des Brechungsexponenten zu dessen verticalem Gefälle an der Eintrittsstelle.

Die obige Ableitung gestattet die folgende allgemeinere Fassung des Satzes:

Der Krümmungsradius eines Lichtstrahls in stetig veränder-

1) Und welche im Vergleich zu $A A'$ unendlich klein zu denken sind.

2) In der Sprache der Differentialrechnung folgt aus $nc = c_0$ (Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum): $ndc + cdn = 0$, woraus sich bei Einführung der absoluten Werthe die obige Beziehung ergibt.

lichem Mittel ist in einem beliebigen Punkt gleich dem daselbst bestehenden Verhältniss des Brechungsexponenten zu dessen Gefälle, genommen in Richtung des durch ihn gehenden Krümmungsradius.

Das Gefälle in dieser Richtung ist gleich dem maximalen in verticaler Richtung mal dem Cosinus des durch die beiden Richtungen bestimmten Winkels w (vgl. Fig. 2.), oder mal dem Sinus des Einfallwinkels e zwischen Strahlrichtung und der Verticalen. Daher:

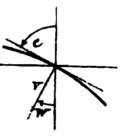


Fig. 2.

$$r = \frac{n}{n' \sin e},$$

wenn n' wieder das verticale Gefälle des Brechungsexponenten bezeichnet. Dabei ist die concave Seite der Krümmung stets der Richtung wachsender Brechungsexponenten zugewandt.

Vorstehendes Gesetz der Krümmung der Lichtstrahlen lässt sich zwar auch aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz ableiten, selbst für den Fall streifender Incidenz, indem man den gebrochenen Strahl berechnet; es ist hier aber auch ein unabgelenkter reflectirter denkbar, welcher beim Zurückgehen auf das Huygens'sche Princip ausgeschlossen erscheint.

Die Darstellung dieser Sachlage ist in keiner Weise neu, doch wohl wenig bekannt. Bevor ich daher zur Mittheilung meiner Versuche schreite, welche auf eine Darstellung sichtbarer Bahnen gekrümmter Lichtstrahlen und deren Verwerthung zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung abzielten, möchte ich von einigen Arbeiten über gekrümmte Strahlen berichten, deren Kenntniss nicht sehr verbreitet sein dürfte, zum Theil wegen der Art der Veröffentlichung nicht sein kann, die aber, wie ich glaube, von ausserordentlichem Interesse sind und deren eine die Veranlassung zur vorliegenden Arbeit war.

§ 2. Literatur über gekrümmte Strahlen.

Die Kenntniss von der Möglichkeit stetig gekrümmter Lichtstrahlen ist eine sehr alte, veranlasst durch das Studium der Strahlenbrechung in unserer Atmosphäre, welche ein Mittel veränderlicher körperlicher und somit auch optischer Dichte darstellt. Die von der Atmosphäre bewirkte Ablenkung des Lichtes der Gestirne oder irdischer Gegenstände, vorzüglich auch die durch besondere atmosphärische Zustände hervorge-

rufenen aussergewöhnlichen Erscheinungen der Luftspiegelung oder Fata Morgana waren an der Schwelle unseres Jahrhunderts Gegenstand vieler Untersuchungen, unter denen die von Monge, Wollaston, Laplace und Biot hervorragen.

Monge[1]) berichtet über eine Luftspiegelung in Aegypten, welche durch die vom heissen Boden erwärmte Luft verursacht war und den vor Durst schmachtenden Soldaten die Nähe einer spiegelnden Wasserfläche vortäuschte. Monge will die Erscheinung auf totale Reflexion an der erhitzten Luft zurückführen, trifft hiermit aber nicht das Wesen der Sache.

Diesem kommt Wollaston[2]) schon viel näher, indem er annimmt, dass in einem stetig veränderlichen Mittel ein mit den Schichten parallel gerichteter Lichtstrahl auf die Seite der dichteren abgelenkt wird infolge deren grösserer brechenden, d. h. anziehenden Kraft, eine Annahme, die vom Standpunkt der damals vorherrschenden Emissionstheorie geboten erschien und ohne weiteres die geradlinige Fortpflanzung ausschloss.

Wollaston's Arbeit zeichnet sich aber vor allem durch die vielen schönen Experimente über gekrümmte Lichtstrahlen aus, denen gegenüber die später mitzutheilenden Versuche nur als Abänderungen erscheinen, die allerdings für die gewünschten Zwecke wesentlich waren. U. a. ahmt er durch Diffusionsschichten zwischen verschiedenen Flüssigkeiten, z. B. zwischen Alkohol und Wasser oder zwischen Wasser und Syrup den Zustand der Atmosphäre nach und erhält auf diese Weise im ersten Fall unter, im zweiten über dem nahezu unabgelenkten Bild ein verkehrtes und ein noch stärker abgelenktes aufrechtes Bild eines hinter dem Diffusionsgefäss befindlichen Gegenstandes. Solche drei Bilder sind bei atmosphärischer Strahlenbrechung möglich, je nachdem bei ausreichend starkem Gefälle der Brechungsexponent der Luft nach oben oder unten zunimmt. Solche Bilder vermochte er auch willkürlich durch Anwendung heisser Körper oder kalter Dämpfe (von Aether, Alkohol, Wasser) in Luft auf mannigfache Weise zu erzeugen.

1) Monge, Sur le phénomène d'Optique connu sous le nom de mirage. Description de l'Égypte. I. 1799. (Citat nach J. Macé de Lépinay et A. Perot vgl. p. 114).

2) Wm. H. Wollaston, On Double Images caused by Atmospherical Refraction. Philosophical Transactions XC. p. 239. 1800; übersetzt in Gilberts Annalen der Physik **11.** p. 1. 1802.

Laplace[1]) und Biot[2]) behandeln den Gegenstand theoretisch vom Standpunkt der Emissionstheorie, ersterer für den dem Astronomen wichtigen Fall der normalen Strahlenbrechung, letzterer für die aussergewöhnlichen Verhältnisse bei Luftspiegelung. Dabei legt er meist die vereinfachende Annahme eines constanten Gefälles des durch den Ausdruck $n^2 - 1$ bestimmten Brechungsvermögens zu Grunde. Unter dieser Annahme muss der Lichtstrahl wie ein geworfener Körper die Bahn einer Parabel beschreiben.

Das obige Gesetz der Strahlenkrümmung fand ich zum erstenmal ausgesprochenermaassen bei Grunert[3]), jedoch nur aus dem Brechungsgesetz abgeleitet. Der erste, welcher die sachgemässe Ableitung aus dem Huygens'schen Princip gab, dürfte Bravais[4]) gewesen sein.

Aus der Krümmung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre zog Kummer[5]) eine äusserst merkwürdige Folgerung. Wäre diese Krümmung auf einem Himmelskörper nur stark genug, so müsste man von einem Punkte desselben die ganze Oberfläche, also auch die Rückseite übersehen können. Nach diesem Verhalten, d. h. je nachdem ein solcher Ueberblick ausgeschlossen oder möglich ist, unterscheidet Kummer zwei Arten von Himmelskörpern. Zu der letzteren müsste z. B. der Jupiter gehören, selbst wenn dessen Atmosphäre auch nur den zwanzigsten Theil so stark als die der Erde wäre. Macht man die Annahme, dass die Luftmassen sich wie die Gesammtmassen dieser Planeten verhalten, so müsste einem auf dem Jupiter befindlichen Beobachter dessen Oberfläche erscheinen

---

1) Laplace, Oeuvres complètes. **4.** (Livre 10). p. 231. 1805.

2) Biot, Recherches sur les réfractions extraordinaires qui s'observent très-près de l'horizon. Paris, Mém. de l'Inst. 1809. p. 1—266. Im Auszug in Gilberts Annalen. **17.** p. 237 u. p. 366. 1814.

3) Grunert, Ueber die atmosphärische, vorzüglich die terrestrische Refraction, und über Refractionscurven im Allgemeinen. Grunerts Archiv der Mathematik und Physik **10.** p. 1. 1847.

4) Bravais, Explication, par le système des ondes, d'un cas remarquable de la réfraction de la lumière. Ann. de chim. et de phys. 3 Sér. XLVI. p. 492. 1856.

5) Kummer, Ueber atmosphärische Strahlenbrechung. Monatsberichte d. Kgl. Preuss. Ak. d. Wiss. zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. p. 405.

„als eine concave Schale, deren Rand, als scheinbarer Horizont sich um 3° 48′ über den wahren Horizont erhebt“.

Noch interessantere und wichtigere Folgerungen hat neuerdings A. Schmidt[1]) aus dem Gesetze der Strahlenbrechung in einer Reihe schöner und anregender, leider nur theilweise schwer erreichbaren Abhandlungen gezogen. In der ersten gibt er, mit den Arbeiten von Grunert und Bravais unbekannt, eine Ableitung des Gesetzes der Strahlenkrümmung aus dem Huygens'schen Princip in einer elementar einfachen, ihm eigenthümlichen Weise, indem er ein Medium von constantem Gefälle der Lichtgeschwindigkeit der Betrachtung zu Grunde legt.

Die Erscheinungen der Luftspiegelung werden sodann mit elementaren mathematischen Mitteln unter vereinfachenden Voraussetzungen in anschaulicher Weise erklärt.

Den Schluss bildet der interessante, wenn auch sehr hypothetische Versuch, die Aberration des Fixsternlichtes ohne die Annahme eines freien Durchströmens des Aethers durch den bewegten Erdkörper zu erklären. Eine durch Aufstauung vor der Erde bewirkte Verdichtung des Aethers — die Möglichkeit einer solchen zugegeben — und die hinter derselben entstehende Verdünnung würde ein Gefälle des Brechungsexponenten in Richtung der Erdbewegung erzeugen, infolge dessen ein von aussen ankommender Lichtstrahl eine scheinbare Ablenkung erfahren muss, die unter genau angegebenen Bedingungen dem beobachteten Betrag der Aberration gleichkommt.

In zwei weiteren Abhandlungen[2]) wendet Schmidt die Gesetze der Refraction auf die Fortpflanzung der Erdbebenwellen an. Da es wahrscheinlich ist, dass die Elasticität der Erde mit der Tiefe zunimmt, und zwar in stärkerem Verhältniss als die Dichte, so ergibt sich daraus eine nach der Tiefe

1) Dr. A. Schmidt, Professor am Kgl. Realgymnasium in Stuttgart, Die cyklische Refraction. Programm des Kgl. Realgymnasiums in Stuttgart. 1878. Eine theilweise Inhaltsangabe der Abhandlung gab Schmidt in einer Notiz in der Zeitschr. für Math. und Phys. **24.** p. 60. 1879, welche auch eine allgemeine Betrachtung über die Wellenfläche eines nicht homogenen isotropen Mediums enthält.

2) A. Schmidt, Ein Beitrag zur Dynamik der Erdbeben. Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg. p. 248. 1888. Untersuchungen über zwei neuere Erdbeben, das schweizerische vom 7. Jan. 1889 u. das nordamerikan. v. 31. Aug. 1886. Ebd. p. 200. 1890.

wachsende Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erschütterungswellen und somit eine gekrümmte, nach oben concave Form der Stossstrahlen. Eine auf diese Annahme gegründete Berechnung der scheinbaren Ausbreitungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche stimmt mit den Beobachtungen besser überein als bei der Annahme constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit und gestattet gleichzeitig die Tiefe des Erdbebenherdes zu ermitteln.

Die bedeutendsten Folgerungen dürfte Schmidt in einer selbständig erschienenen Abhandlung „Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik“[1]) gezogen haben, welche die in einem Vortrag „Was folgt aus den neuesten Beobachtungen der Axendrehung der Sonne?“[2]) ausgesprochenen Gedanken weiter ausführt. Die Abhandlung knüpft an die oben erwähnte von Kummer an, spricht aber das Eintheilungsprincip der beiden Arten von Himmelskörpern einfacher aus. Bei der ersten Art ist nämlich der Krümmungsradius r der Lichtstrahlen an der Oberfläche, wie bei der Erde, grösser, bei der zweiten kleiner als der Radius R des Himmelskörpers selbst.

Schmidt wirft die Frage auf, zu welcher Art die Sonne gehört. Vergleichsweise ist bei der Erde $r = 4{,}26\ R$ (constante Temperatur von 0° C. vorausgesetzt). Nun ist der Sonnenradius aber 108 mal so gross als derjenige der Erde, also noch über 25 mal so gross als der Krümmungsradius der Lichtstrahlen auf der Erde. Die Sonne müsste demnach schon ein Himmelskörper zweiter Art sein, wenn der Zustand ihrer Atmosphäre auch nur demjenigen der unserigen gliche in einer Höhe, wo die Luft 25 mal so verdünnt ist wie an der Erdoberfläche, umsomehr aber, da die Sonnenatmosphäre die unserige vermuthlich an Stärke bedeutend übertrifft und das Gefälle der Atmosphärendichte wegen der grösseren Anziehungskraft an der Sonnenoberfläche grösser ist als an der Erdoberfläche.

Diese Bemerkung klärt nun ein Räthsel auf, welches das Vorhandensein des scharfen Sonnenrandes uns stellte. Der Anschein lässt eine scharfe Grenze zwischen einem flüssigen

1) Stuttgart, Verlag von J. B. Metzler, 1891.

2) Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württ. Sitzg. v. 12. Febr. 1891.

Sonnenkörper und einer gasförmigen Atmosphäre vermuthen. Die hohe Temperatur auf der Sonne, die wohl die kritische Temperatur der meisten Stoffe übersteigt, macht es andererseits wahrscheinlich, dass ein Unterschied der Aggregatzustände nicht besteht, vielmehr die Dichte von aussen nach innen in stetiger Weise zunehmen muss. Woher rührt aber dann der scharfe Sonnenrand?

Schmidt zeigt, dass ein leuchtender Gasball von den Dimensionen der Sonne, dessen Dichte ohne Unstetigkeitsgrenze von aussen nach innen zunimmt, einen Anblick gleich dem der Sonne gewähren muss. Die scheinbare Grenze fällt zusammen mit derjenigen um das Gravitationscentrum gelegten Kugel, der äusseren kritischen Sphäre, deren Radius gleich dem Radius der tangential an ihrer Oberfläche verlaufenden Lichtstrahlen ist und deren oberflächliche Dichte derjenigen der Erdatmosphäre noch um bedeutendes nachsteht. Denn ein Sehstrahl, welcher diese Kugel nur unter kleinem Winkel schneidet, wird im Bogen zu Tiefen geführt, welche ein continuirliches Spectrum aussenden. Dass ein solches von einem glühenden Gas bei genügendem Druck ausgestrahlt werden kann, ist bekannt (vgl. Schluss der Anm. p. 113). Ein Sehstrahl aber, der eine nur wenig ausserhalb jener kritischen Sphäre liegende concentrische Kugel berührt, muss sich wieder vom Gasball entfernen, ohne stark leuchtende Schichten durchsetzt zu haben. Daher besteht eine scheinbare Grenze, wenngleich eine Unstetigkeitsgrenze der Dichte fehlt: *Der Sonnenrand ist eine optische Täuschung.*

Müsste nun aber nicht die Sonne bei starker Atmosphäre einen gefärbten Rand zeigen? Dieser Einwand ist hinfällig, da die an der Oberfläche jener kritischen Sphäre vorhandene geringe Gasdichte eine merkliche Dispersion ausschliesst. Dagegen wird die von innen nach aussen stattfindende bedeutende Helligkeitsabnahme der Sonnenscheibe verständlich.[1])

1) Dieser Punkt ist genauer untersucht in der einen von zwei zusammen veröffentlichten Arbeiten von H. Seeliger (Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre; Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Sitzungsber. d. kgl. bayer. Akad. d. Wiss. Math. phys. Klasse. 21. p. 239 u. 247. Sitzung v. 7. Nov. 1891), deren Inhalt sich mit den Schmidt'chen Darlegungen berührt. Seeliger berechnet aus den Vogel'schen Beobachtungen der Helligkeit der Sonnenscheibe in verschiedenen Abständen von ihrer Mitte und für verschiedene Farben

Ist die Strahlenbrechung auf der Sonne aber überhaupt beträchtlich, so muss sie einen grossen, bisher unterschätzten Einfluss ausüben auf die Beobachtungen der Vorgänge in den obersten Sonnenschichten. Schmidt sucht durch die Berücksichtigung derselben die scheinbaren Widersprüche in den Bestimmungen der Sonnenrotation aufzuklären. Den Einfluss auf die Erscheinungen der Protuberanzen dürfte er indess überschätzt haben.

Diese wichtigen Folgerungen aus dem Gesetze der Strahlenkrümmung beseitigen ein Hinderniss, welches bisher der Auffassung entgegenstand, dass *die Sonne im wesentlichen die Beschaffenheit eines leuchtenden Gasballes besitze, dessen Dichte ohne Unstetigkeit von aussen nach innen zunimmt,* womit natürlich über das Wesen des Zustandes der Materie in grossen Tiefen

---

eine ziemlich starke Dispersion für die Sonnenatmosphäre. Dieselbe müsste eine beträchtliche Verschiedenheit des scheinbaren Sonnendurchmessers für verschiedene Farben zur Folge haben, welche aber nach den Messungen von Auwers nicht besteht. Den scheinbaren Widerspruch sucht Seeliger durch Annahme einer totalen Reflexion des aus dem Sonneninnern kommenden Lichtes am Sonnenrand zu lösen. Diese Annahme entspricht indess, wie Kummer und Schmidt zeigten, wohl nicht genau dem Sachverhalt. Vielmehr werden die nahe horizontal aus dem Innern ausgehenden Strahlen, nicht weil sie eine thatsächliche Reflexion erleiden, sondern weil ihre gegen das Sonneninnere concave Krümmung stark genug ist, wieder nach diesem zurückgeführt und so am Austreten verhindert. Jene Art der Darstellung macht daher auch die Abhandlungen Seeliger's dem besonderen Gegenstand vorliegender Arbeit fernerstehend; deren grosses Interesse, besonders in obigem Zusammenhang, wird indess die Mittheilung an dieser Stelle rechtfertigen. Seeliger berechnet ferner auch die Extinctionscoefficienten der Sonnenatmosphäre, deren Kleinheit eine geringe Höhe der letzteren vermuthen lässt, wenigstens „insoweit sie als nicht leuchtendes, absorbirendes Medium in Frage kommt". D. h. genauer, die diesen Messungen zu Grunde liegende innere Atmosphärengrenze ist eine Stelle, an der merklich ebensoviel Licht ausgestrahlt als von dem aus tieferen Schichten kommenden Licht absorbirt wird. Sie braucht also nicht eine Grenze des gasförmigen Aggregatzustandes zu sein, da nach Frankland (On the Combustion of Hydrogen and Carbonic Oxide in Oxygen under great pressure. Phil. Mag. (4) **36.** p. 309. 1868) Wasserstoff bereits unter 10 Atmosphären Druck ein sehr helles continuirliches Spectrum auszusenden vermag (vgl. auch Wüllner, Ueber die Spectra einiger Gase bei hohem Druck, Pogg. Ann. **137.**; sie braucht vor allem nicht eine Grenze irgend welcher physischer Unstetigkeit zu sein.

der Sonne bei gewaltigen Drucken und Temperaturen nichts gesagt sein kann. Sie schaffen ferner Bahn für die Anwendung der interessanten Ritter'schen „Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper".[1])

Die letztgenannte Arbeit von Schmidt war es, welche mir von der ganzen besprochenen Literatur zuerst in die Hände fiel. Sie bildete den Gegenstand eines Referates im hiesigen physikalischen Colloquium und erregte in mir den Wunsch, die gekrümmte Bahn eines Strahles sichtbar vor Augen zu führen. So entstanden noch vor meinem Bekanntwerden mit Wollaston's Arbeit die folgenden Versuche, die schon im Februar 1892 vor einem grösseren Kreise in der hiesigen naturwissenschaftlichen Gesellschaft gezeigt wurden.

Als auch schon ein Theil der daran sich anschliessenden Diffusionsversuche angestellt war, erschien im Septemberheft der Ann. de chim. et de phys. (6. sèr. A. XXVII. p. 94. 1892) eine Arbeit von J. Macé de Lépinay und A. Perot, betitelt „Contribution à l'étude du mirage", welche sich der gleichen Mittel zur Darstellung der gekrümmten Lichtstrahlen bedienen wie ich. Ihr Versuch wird noch erwähnt werden. Das wesentliche Ziel dieser Arbeit ist die genaue Erforschung der Luftspiegelung. Dazu haben sie experimentell die kaustische Linie des durch einen Punkt gehenden Lichtstrahlenbüschels in einer Diffusionsschicht ermittelt und mit ihrer Hülfe die Erscheinungen der Luftspiegelung mit einer bisher noch nicht erreichten Genauigkeit erklärt.

Die Verfasser erwähnen auch (p. 111), dass sie die genaue Aufnahme eines gekrümmten Lichtstrahles gemacht haben, um zu sehen, ob dieselbe zum Studium der Diffusionsgesetze verwendbar sei. Die im folgenden mitgetheilte neue Methode zur Bestimmung der Constanten der Diffusion und Wärmeleitung geht unmittelbarer zu Werke und weicht von dem durch diese Physiker versuchten Wege gänzlich ab.

§ 3. Darstellung sichtbarer Bahnen gekrümmter Lichtstrahlen.

Es lag nahe, den gekrümmten Weg eines Lichtstrahles in der Diffusionsschicht zweier verschiedenen Flüssigkeiten

1) Ritter, Wied. Ann. 1878—1889; Zusammenfassungen in Exner's Rep. 20. p. 379. 1884 und „Naturforscher" Jahrg. 17. Nr. 28—31. 1884.

durch eine fluorescirende Substanz, z. B. Fluorescin oder Magdalaroth (Naphtalinroth) sichtbar zu machen.

Dazu schienen wegen ihres sehr verschiedenen Brechungsvermögens Alkohol und Schwefelkohlenstoff besonders geeignet. Als Diffusionsgefäss diente ein Leybold'scher Glaskasten von 10 cm Höhe und Länge und von 1 cm Breite. Der fluorescirende Alkohol wurde zuerst eingegossen und dann durch ein fein ausgezogenes Glasrohr der Schwefelkohlenstoff darunter geschichtet. Dieser besitzt Eigenfluorescenz, die durch Zusatz weniger Tropfen fluorescirenden Alkohols verstärkt werden kann. Will man nicht warten, bis sich die Diffusionsschicht von selbst genügend verbreitert hat, so kann man durch vorsichtiges geeignetes Rühren an der Grenze der Flüssigkeiten ein auf kurzer Strecke annähernd gleichförmiges Gefälle der Concentration und somit des Brechungsexponenten herstellen.

Schickt man nun ober- oder unterhalb der Diffusionsschicht ein durch horizontalen Spalt gehendes paralleles Lichtbündel von Sonnen- oder electrischem Licht der Länge nach durch das Gefäss, so erkennt man den durch Fluorescenz sichtbar gemachten geradlinigen Gang der Lichtstrahlen (Fig. 3, p. 116). Treten dieselben aber innerhalb des Diffusionsgebietes ein, so werden sie in deutlichem Bogen nach unten abgelenkt.

Hier könnte man indess einwenden, dass die Ablenkung des Strahles durch eine, wenn auch kaum merkliche, schon vor Eintritt vorhandene Abweichung seiner Richtung von der Horizontalen begründet sei. Dem zu begegnen, sende man den Strahl schwach geneigt von unten ins Diffusionsgebiet (vgl. Fig. 4). Dann neigt er sich im aufsteigenden Bogen immer mehr der Horizontalen zu, die er aber sofort wieder verlässt, um einen zweiten, dem ersten symmetrischen, absteigenden Bogen zu beschreiben.

Der Bogen ist nach unten concav, weil Schwefelkohlenstoff einen grösseren Brechungsexponenten besitzt als Alkohol. Die concave Seite müsste nach oben gewandt sein, wenn der leichteren Flüssigkeit der grössere Brechungsexponent zukäme. Auf der Suche nach zwei geeigneten Flüssigkeiten, die dieser Bedingung bei ausreichender Differenz der Brechungsexponenten sowie diejenige der Mischbarkeit erfüllten, wurde mir von Hrn. Wüllner Chloroform und Schwefelkohlenstoff empfohlen. Die

Dichten dieser Flüssigkeiten sind bei 20° C. bezüglich 1,49 und 1,26; ihre Brechungsexponenten bei derselben Temperatur für die *D*-Linie 1,45 und 1,63. Die den obigen entsprechenden, mit diesen Flüssigkeiten ausgeführten Versuche sind in den Fig. 5 und 6 dargestellt.

Bahn eines Lichtstrahles
im Diffusionsgebiet verschiedener Flüssigkeiten, durch Fluorescenz sichtbar gemacht; 1/4 natürlicher Grösse.

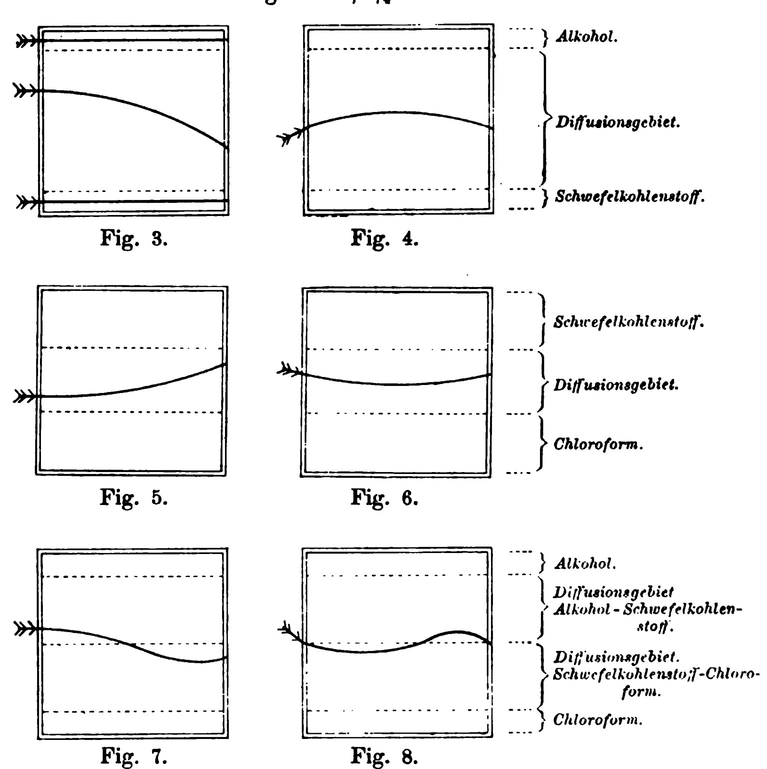


Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 5. Fig. 6.

Fig. 7. Fig. 8.

Versuch von **Macé de Lépinay** und **Perot**
ca. 1/10 natürlicher Grösse.

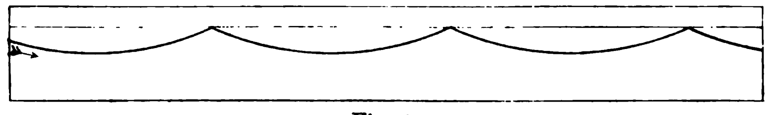


Fig. 9.

Es schien lohnend die drei Flüssigkeiten Alkohol, Schwefelkohlenstoff und Chloroform in dem nämlichen Gefäss über einander zu schichten. Ein Lichtstrahl musste dann zwischen den beiden ersten Flüssigkeiten seine concave Seite unten, zwischen den beiden letzten oben haben. Auf diese Weise entstehen Curven mit Wendepunkt, wie sie in den Fig. 7 und 8 wiedergegeben sind.

Die Curven wurden nach der Natur auf Pauspapier, das an eine Seitenwand des Diffusionsgefässes geheftet war, aufgenommen und in vierfach verkleinertem Maassstab anbei nachgebildet.

Fig. 9 stellt die hübsche Form dar, welche **Macé de Lépinay** und **Perot** (vgl. p. 114) ihrem Versuch gegeben haben. Sie bedienen sich eines 1 m langen, 15 cm hohen Glastroges, in welchem Alkohol und Wasser gegeneinander diffundiren. Der Lichtstrahl erleidet, an die Oberfläche des Alkohols gelangt, totale Reflexion und setzt seinen Weg in weiteren Bögen fort.

Das Gesetz der Strahlenkrümmung, d. i. die in § 1 abgeleitete Beziehung $r = n / n'$ liesse sich nun prüfen, wenn der Brechungsexponent n und dessen Gefälle n' in der durchstrahlten Schicht bekannt wäre. In Ermangelung dessen findet man leicht wenigstens eine obere Grenze für den Radius r der Strahlenkrümmung, wenn man die Höhe des Diffusionsgebietes a, d. h. den Abstand der dasselbe begrenzenden Stellen aufsucht, an denen der Lichtstrahl noch unabgelenkt bleibt. Nimmt man zwischen diesen Stellen gleichförmiges Gefälle an und bezeichnet mit $n_2 - n_1$ den Unterschied der Brechungsexponenten der beiden reinen Flüssigkeiten, so erhält man als mittleres Gefälle $n' = (n_2 - n_1) / a$ und als mittleren Brechungsexponenten $n = (n_2 + n_1) / 2$ und daraus einen mittleren Krümmungsradius $r = a(n_2 + n_1) / 2(n_2 - n_1)$. Dieser Werth bildet gleichzeitig für den Radius der Strahlenkrümmung in der Mitte der Diffusionsschicht, wo das Gefälle thatsächlich am grössten sein wird, eine obere Grenze. So war bei Fig. 4 $a = 7{,}8$ cm, für Schwefelkohlenstoff $n_2 = 1{,}63$, für Alkohol $n_1 = 1{,}36$, also $r = (1{,}50 / 0{,}27) . 7{,}8 = 43$ cm die obere Grenze, während die unmittelbare Beobachtung einen in der That noch kleineren Krümmungsradius von ca. 15 cm ergab. Eine genauere experimentelle Bestätigung der Beziehung ergibt sich aus später folgenden andersartigen Messungen.

§ 4. Bilder der durch ein Diffusionsgefäss gesehenen Gegenstände.

Das Gefälle des Brechungsexponenten bei obigen Flüssigkeiten genügt, um selbst den in Richtung der Dickenausdehnung des Gefässes eintretenden, also nur eine Schicht von 1 cm Stärke durchsetzenden Lichtstrahlen eine merkliche Ablenkung zu ertheilen und so eine der Luftspiegelung ähnliche Erscheinung zu erzeugen, wie sie bei den oben besprochenen Versuchen von Wollaston beschrieben wurde. Ich füge hier nur noch hinzu, dass man bei dem Diffusionsgefäss mit den drei Flüssigkeiten Chloroform, Schwefelkohlenstoff, Alkohol fünf Bilder erhalten kann, nämlich zu beiden Seiten des am wenigsten abgelenkten Bildes erst je ein verkehrtes und dann noch zwei, am stärksten abgelenkte, aufrechte Bilder.

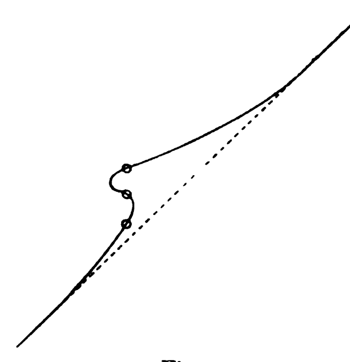


Fig. 10.

Auf die merkwürdige Verzerrung von Linien, die man durch das Diffusionsgefäss betrachtet, machte mich gelegentlich des Vorzeigens eines der obigen Versuche im physikalischen Colloquium zu Strassburg Hr. F. Kohlrausch aufmerksam. Um den Versuch auf eine einfache Form zu bringen spannte ich einen schwarzen Faden, der in der Mitte eine weisse Perle trug, unter 45° gegen die Horizontale geneigt auf und betrachtete ihn durch das Diffusionsgefäss mit Schwefelkohlenstoff und Alkohol; der Faden erscheint dann verzerrt wie die in Fig. 10 ausgezogene Linie mit drei Bildern der Perle.

Nun hatte ich schon bei den ersten oben erwähnten Versuchen daran gedacht, die Fragestellung umzukehren und durch gekrümmte Lichtstrahlen die Diffusion zu untersuchen. Die genaue Ausmessung des Weges des Lichtstrahls schien mir dazu aber kein einfacher Weg zu sein; der Versuch mit dem Faden schon eher. Auch Wollaston, bei dem ich diesen Versuch gleichfalls später beschrieben fand, hält ihn für schicklich den Zustand irgend eines zu untersuchenden Mediums zu prüfen.

Gleichwohl fand er kein Mittel, wie er selbst angibt, das Gesetz des Dichtigkeitsverlaufes im Diffusionsgefäss zu bestimmen. In der That kann die Beziehung, welche zwischen dem Dichtigkeitsgefälle und der Lage der Bilder bei dem Faden-Versuch keine einfache sein, da auf einer gewissen Strecke jeder Punkt des Fadens drei Bilder erzeugt. Der Versuch bedurfte daher einer weiteren Vereinfachung.

Ehe ich indess die neue Methode zur Untersuchung der Diffusion mittheile (§ 6), habe ich noch andere früher benutzte optische Methoden kurz zu besprechen, bei denen die Krümmung der Lichtstrahlen die Rolle einer Fehlerquelle spielte.

§ 5. Bisher angewandte optische Beobachtungsmethoden der Diffusion.[1])

Die eine Art optischer Methoden bestand in der Beobachtung der Drehung, welche die Polarisationsebene des durch einen Diffusionstrog mit planparallelen Wänden horizontal durchtretenden Lichtstrahls erfuhr; sie wurde von Hoppe-Seyler[2]) und Voit[3]) angewandt.

Die andere Art beruhte auf der Brechung des Lichtes in einem prismatischen Diffusionsgefäss. Wild und Simmler[4]) schlugen vor auf diese Weise unmittelbar den Brechungsexponenten der verschiedenen Schichten zu bestimmen. Dieses Verfahren wurde in sinnreicher Weise nach Kundts Angabe von Johannisjanz[5]) dahin abgeändert, dass ein solches Diffusionsprisma in einen weiteren planparallelen Trog gestellt wurde, der eine Lösung der zu untersuchenden Substanz von geeigneter Concentration enthielt. Die Stelle, an welcher im Diffusionsprisma gleiche Concentration wie aussen im Trog herrschte, sollte dann daran erkannt werden, dass sie das Bild eines vertical aufgehängten, durch Prisma und Trog betrachteten Fadens unabgelenkt liess.

---

1) Eine ausführliche Besprechung früher angewandter Diffusionsmethoden findet man im Lehrbuch der allgem. Chemie v. W. Ostwald, **1.** p. 674. 2. Aufl. 1891.

2) Hoppe-Seyler, Medic. chem. Untersuchungen, Berlin 1866.

3) Voit, Pogg. Ann. **130.** p. 227 u. 393. 1867.

4) Wild u. Simmler, Pogg. Ann. **100.** p. 217. 1857.

5) Johannisjanz, Wied. Ann. **2.** p. 24. 1877.

Alle diese Methoden besitzen aber die grosse, durch Stefan[1]) aufgedeckte Fehlerquelle, dass horizontale Lichtstrahlen beim Durchsetzen einer Diffusionsschicht abgelenkt werden. Um dies nachzuweisen beobachtete Stefan horizontale Marken durch planparallele Diffusionsgefässe und bemerkte die dabei auftretenden mit der Zeit sich ändernden Verzerrungen und die Ablenkung der horizontalen Strahlen. Eine solche wurde dem Leser in Fig. 3 u. 5 naturgetreu vor Augen geführt.

Aber die Fehlerquelle jener Methoden kann gerade als Grundlage einer neuen Methode dienen, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist.

§ 6. Objective Darstellung der Diffusionscurve und die physikalische Bedeutung ihrer geometrischen Grössen.

Das unerwünschte Auftreten mehrfacher Bilder bei dem in § 4 beschriebenen Versuche ist dadurch verursacht, dass von dem Faden Lichtstrahlen unter verschiedenen Winkeln auf das Diffusionsgefäss treffen. Sorgt man dafür, dass die Lichtstrahlen ein paralleles Strahlenbündel bilden, so muss eine eindeutige Beziehung zwischen Gegenstand und Bild eintreten.

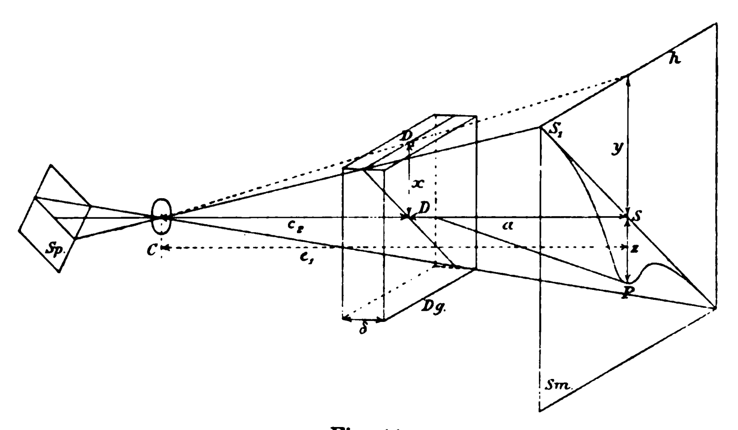


Fig. 11.

Ein unter 45° gegen die Horizontale geneigter Spalt (Sp. Fig. 11) empfängt das parallel gemachte Licht einer

1) Stefan, Sitzungsber. der math.-naturw. Classe der Wiener Akademie der Wissensch. 78. (2) p. 957. 1878.

electrischen Lampe und lässt durch eine Convexlinse (C) von etwa 17 cm Brennweite sein Bild auf einem 5—7 m entfernten Schirm (Sm) entstehen. Schaltete man nun in einiger (vgl. § 8) Entfernung vor diesem ein Diffusionsgefäss (Dg) von 1—2,5 cm innerer Dicke ein, so dass dessen grösste Seitenfläche von 10 cm im Quadrat sich nahe senkrecht den einfallenden Lichtstrahlen entgegenstellt, so wurde das Spaltbild zu einer Curve verzerrt, welche *Diffusionscurve* heissen möge. Dieselbe besitzt an den Stellen grösster Ablenkung bei Anwendung weissen Lichtes deutliche Dispersion, welche durch ein vor den Spalt gestelltes rothes Glas genügend aufgehoben werden kann.

Oben und unten, wo sich die übereinandergeschichteten Flüssigkeiten noch unvermischt erhalten haben, erfahren die Lichtstrahlen keine Ablenkung. Im Diffusionsgebiet aber werden sie, wie oben gezeigt, umgebogen und müssen daher eine Ablenkung erfahren, die der folgenden Ableitung gemäss dem Gefälle des Brechungsexponenten an der durchstrahlten Stelle proportional ist, abgesehen von einer sehr kleinen Correction.

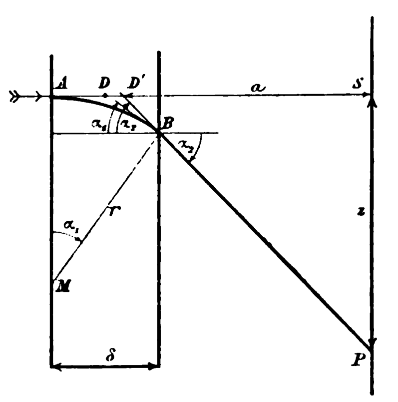


Fig. 12.

Der Lichtstrahl trete im Punkte A (vgl. Fig. 12) in das Diffusionsgefäss von der innen gemessenen Dicke δ ein, beschreibe einen Bogen vom Radius r mit dem Krümmungsmittelpunkt in M und treffe dabei unter dem Einfallwinkel α_1 im Punkte B gegen die zweite Wand des Gefässes, welches er unter dem Austrittwinkel α_2 in Luft verlasse um in P auf dem Schirm anzulangen. Unabgelenkt hätte er diesen in S erreicht, sodass $SP = z$ der Betrag der Ablenkung ist. Ferner sei a der optische Weg (d. h. Summe der durch die jeweiligen Brechungsexponenten dividirten geometrischen Abstände) zwischen S und dem auf AS in der Mitte des Gefässes liegenden Punkte D, d. i. auch der geometrische Abstand zwischen S und dem Schnittpunkt D' der Linien AS und PB, d. h. SD'. Die

Winkel α_1 und α_2 seien so klein, dass man sie selbst statt ihrer Sinus oder ihrer Tangenten in die Rechnung einführen darf. Dann ist

$$z = a \, . \, \alpha_2 \, ;$$

α_2 ist durch den Brechungsexponenten n der Flüssigkeit bei B bestimmt:

$$\alpha_2 = n \, . \, \alpha_1 \, ;$$

α_1 ist gleich dem Winkel AMB, daher:

$$\alpha_1 = \delta : r \, .$$

r endlich berechnet sich nach der in § 1 gegebenen Formel:

$$r = n / n' \, ,$$

wobei n' (dn / dx) das verticale Gefälle des Brechungsexponenten in der durchstrahlten Schicht bedeutet. Setzt man die Grössen der Reihe nach ein, so ergibt sich:

$$z = a n \delta : n / n' \, ,$$

oder

(2) $$\boldsymbol{z = a \delta n'} \, .$$

d. h. *der Schnittpunkt eines horizontalen Lichtstrahls mit einem ihm senkrecht entgegengestellten Schirm erfährt durch ein in den Weg gesetztes Diffusionsgefäss mit zum Schirm parallelen Wänden eine Senkung (z), welche gleich dem Product ist aus dem verticalen Gefälle des Brechungsexponenten (n') an der durchstrahlten Stelle, der Dicke des Diffusionsgefässes (δ) und dem optischen Abstand (a) des Schirmes von der Mitte des Diffusionsgefässes.*

Die obige Ableitung macht einige vereinfachende Voraussetzungen. Die Dicke der Gefässwand wird bei Bestimmung des optischen Abstandes a berücksichtigt. Die Verschiedenheit des Brechungsexponenten beim Ein- und Austritt des Lichtstrahls (Punkte A und B Fig. 12), sowie die Abweichung der Tangente und des Sinus vom Winkel wird in erster Linie durch eine Correction berücksichtigt, für welche ich als Factor von z in obiger Gleichung fand:

$$\left[1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2 \frac{2 n^2 + 1}{4 n^2}\right] ,$$

welcher für $z / a = 1/10$ noch nicht 1 Proc. und z. B. bei ververdünnten wässerigen Lösungen ($n = 4/3$) erst etwa für $z / a = 1 / 25$ ein pro Mille von 1 abweicht. Endlich bleibt die Formel auch

ohne weiteres bei den kleinen Abweichungen der Strahlenrichtung von der Horizontalen, wie sie unter den angegebenen Versuchsbedingungen vorkommen, anwendbar.

Das Gefälle n' gilt genau genommen für den Punkt in der Mitte des vom Lichtstrahl beschriebenen Bogens. Derselbe liegt unter dem Punkte D des unabgelenkt gedachten Lichtstrahl um einen Betrag $\xi = z \,.\, \delta / 8 \, n \, a$, welcher leicht unter 0,1 mm gehalten werden kann und in den meisten Fällen nicht in Betracht kommt. Für gewöhnlich wird man also n' auf den Punkt D beziehen dürfen.

Somit ist bereits die physikalische Bedeutung einer Ordinate z der Diffusionscurve ermittelt, d. h. des Abstandes einer ihrer Punkte P von dem vertical darüber liegenden S des unabgelenkten Spaltbildes (Fig. 11 und 13). Sie bedeutet, von einer Constanten abgesehen, das verticale Gefälle des Brechungsexponenten n' in einem Punkte D des Diffusionsgefässes, welcher in der Mitte desselben auf dem unabgelenkten Strahl gelegen ist.

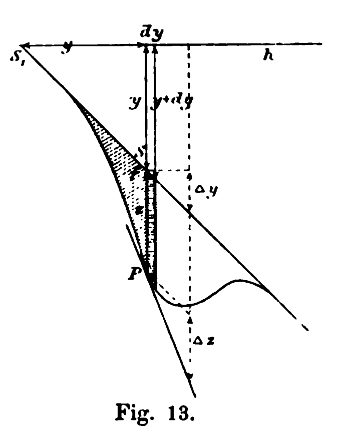


Fig. 13.

Um die Höhenlage von D angeben zu können, bezeichne man mit x dessen Abstand von dem oberen Ende des Diffusionsgefässes. Der entsprechende Abstand des Punktes S von der Projection h der obersten horizontalen Mittellinie des Gefässes auf den Schirm aus dem Centrum der Projectionslinse (C Fig. 11) sei y. y ist dann die Projection von x aus C. Bezeichnet man also mit e_1 den Abstand der Linse vom Schirm, mit e_2 den von der Mittelebene des Diffusionsgefässes und mit η das Verhältniss dieser Abstände, so ist:

$$\eta = e_2 / e_1 = x / y \,.$$

Auch die Tangente der Diffusionscurve in P besitzt eine wichtige Bedeutung. Sie bestimmt die Aenderung von z mit y, d. h. $dz / dy = \Delta z / \Delta y$ (s. Fig. 13), das ist auch:

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \eta \, \frac{dz}{dx} \,.$$

Nun ist aber $z = a\,\delta\,n'$, also:

$$\frac{dz}{dy} = z' = \eta\,a\,\delta\frac{dn'}{dx} = \eta\,a\,\delta\frac{d^2n}{dx^2} = \eta\,a\,\delta\,n''$$

d. h.:

(3) $$z' = \eta\,a\,\delta\,n''.$$

D. h. die Lage der Tangente bestimmt den zweiten Differentialquotienten des Brechungsexponenten mit der Höhe im Diffusionsgefäss, oder die Aenderung dessen Gefälles mit der Höhe, eine Grösse, die man als *Krümmung des Gefälles* bezeichnen könnte.

Der erste und zweite Differentialquotient von n lässt sich also aus der Diffusionscurve unmittelbar entnehmen. Wie verhält es sich mit dem Brechungsexponenten selbst? Derselbe muss sich durch eine Integration ergeben. Multiplicirt man

$$z = a\,\delta\,n' = a\,\delta\frac{dn}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{a\,.\,\delta\,.}{\eta}\,\frac{dn}{dy}$$

mit dy, so erhält man eine mit dn proportionale Grösse $z\,dy$. Diese ist aber gleich dem Flächenstück zwischen Diffusionscurve und unabgelenktem Spaltbild, das seitlich durch die zu y und $(y + dy)$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird (horizontal schraffirter Streifen der Fig. 13). Denn bei der Lage des Spaltes unter 45° gegen die Horizontale besitzt dieses die Breite dy.[1])

Die Gesammtzunahme des Brechungsexponenten vom höchsten Punkt D_1 (Fig. 11) im Diffusionsgefäss bis D ist also proportional der Summe in gleicher Weise gebildeter Flächenstücke zwischen S_1 und S (s. Fig. 13) oder proportional der durch Spaltbild, Diffusionscurve und die Ordinate z begrenzten Fläche (schräg schraffirt in Fig. 13).

Sei diese Fläche $= f$, sei ferner n_1 der Brechungsexponent in D_1, und n derjenige in D, so ist:

$$n - n_1 = \int_{n_1}^{n} dn = \int_0^y \frac{dn}{dy}\,dy = \eta\int_0^y n'\,dy = \frac{\eta}{a\,.\,\delta}\int_0^y z\,dy = \frac{\eta}{a\,.\,\delta}f\,,$$

also:

(4) $$n = n_1 + \frac{\eta}{a\,\delta}\,f.$$

1) Bei Abweichung des Spaltes von dieser Lage ist eine Correction erforderlich, welche bei den mitzutheilenden Versuchen nicht unterlassen wurde.

Integrirt man über die ganze Fläche F zwischen Diffusionscurve und unabgelenktem Spaltbild, welche die *Diffusionsfläche* heissen möge, und bezeichnet den Brechungsexponenten der unteren Flüssigkeit, wo sie noch unvermischt, mit n_2, so ist:

(4a) $$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a\,\delta} F.$$

Diese Formel gab die Möglichkeit an die Hand die Richtigkeit der bisherigen Entwickelungen, insbesondere auch das Gesetz der Strahlenkrümmung experimentell zu prüfen und zu bestätigen. Dieselbe verlangt insbesondere, dass die ganze Diffusionsfläche unabhängig von ihrer sich allmählich ändernden Gestalt constant bleiben muss, so lange die Diffusion noch nicht in merklicher Weise bis zu den Enden des Gefässes vorgeschritten ist.

Der wesentliche Inhalt dieses § sei noch einmal kurz zusammengestellt, zunächst durch die Formeln:

(4) $$n = n_1 + \frac{\eta}{a\,.\,\delta} \cdot f$$

(4a) $$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a\,.\,\delta} \,.\, F$$

(2) $$n' = \frac{d\,n}{d\,x} = \frac{1}{a\,.\,\delta} \cdot z$$

(3) $$n'' = \frac{d^2 n}{d\,x^2} = \frac{1}{\eta\,.\,a\,.\,\delta} \frac{d\,z}{d\,y} = \frac{1}{\eta\,.\,a\,.\,\delta} \cdot z'$$

Hier bedeutet:

n der Brechungsexponent in einem Punkte D des Diffusionsgefässes im Abstande

x von der oberen Grenzfläche desselben;

n' das verticale Gefälle des Brechungsexponenten in D;

n'' die Krümmung dieses Gefälles in verticaler Richtung;

n_1, n_2 die Brechungsexponenten der unvermischten Flüssigkeiten an der oberen und unteren Grenze des Gefässes;

η das Verhältniss der optischen Wege von der Projectionslinse bis zur Mitte des Diffusionsgefässes und bis zum Schirm;

a der optische Weg von der Mitte des Diffusionsgefässes bis zum Schirm;

δ die Dicke des Diffusionsgefässes, innen gemessen;

z die durch den Diffusionszustand bewirkte Ablenkung des

Schnittpunktes des durch D gehenden Lichtstrahles mit dem Schirm (vgl. Fig. 11), eine Ordinate der Diffusionscurve;

y die Projection von x auf den Schirm aus dem Mittelpunkte der Projectionslinse (vgl. Fig. 11);

F die ganze Diffusionsfläche, d. h. die ganze zwischen unabgelenktem Spaltbild und Diffusionscurve eingeschlossene Fläche;

f das durch die Ordinate z ausgeschnittene, nach oben (links, in Fig. 13) liegende Stück der Diffusionsfläche.

Der Unterschied der Brechungsexponenten der zur Diffusion gelangenden Flüssigkeiten ist der Diffusionsfläche, d. h. der zwischen Diffusionscurve und unabgelenktem Spaltbild liegenden Fläche proportional.

Für einen beliebigen Punkt D im Diffusionsgefäss berechnet sich der Brechungsexponent aus einem Stück der Diffusionsfläche, das durch die zu D gehörige Ordinate z der Diffusionscurve (vgl. Fig. 11) abgegrenzt wird; der erste Differentialquotient des Brechungsexponenten mit der Höhe oder das Gefälle desselben aus der Ordinate z selbst; der zweite Differentialquotient oder die Krümmung des Gefälles aus der Lage der Tangente an die Diffusionscurve in dem zu D gehörigen Punkte (P Fig. 11).

§ 7. Beeinflusst die Capillarität die Richtung der durch das Diffusionsgefäss tretenden Strahlen?

Man findet mehrfach den Gedanken ausgesprochen[1]), dass die Capillarität in einem Diffusionsgefäss eine merkliche Rolle spielt. Die Capillarconstante aneinander grenzender Schichten ist verschieden; es kann daher die Grenzfläche derselben nicht eben, sie muss an den Gefässwänden gekrümmt sein. Erstreckt sich diese Krümmung weit in das Innere des Gefässes? Beeinflusst sie in merklicher Weise die Richtung des durchtretenden Lichtstrahls?

Zur Beantwortung dieser Fragen bedenke man, dass die Capillarkräfte sich nur auf eine sehr kleine Entfernung erstrecken, welche nach Quincke jedenfalls unter einem Hunderttausendel Centimeter bleibt.

Während nun bei einer durch Luft begrenzten Flüssigkeit ein Punkt unter Zurücklegung einer solchen Strecke aus dem

1) Z. B. bei Johannisjanz l. c. p. 45.

Innern der Flüssigkeit in das Innere der Luft gelangen kann, so findet im Diffusionsgefäss dabei nur eine äusserst geringe Aenderung in der Beschaffenheit der Flüssigkeit statt. Die Capillarconstante zweier um 0,00001 cm von einander abstehenden Schichten kann nur sehr wenig verschieden, die capillare Steighöhe nur sehr klein sein. Thatsächlich beobachtete Quincke[1]) selbst bei so wenig mischbaren Flüssigkeiten wie Wasser und Oel eine mit der Zeit abnehmende relative Capillarconstante und fand diejenige in jedem Verhältniss mischbarer Flüssigkeiten gleich Null.

Gleichwohl möge der kleine Betrag der Lichtbrechung, der durch die Capillarwirkung zweier um 0,00001 cm von einander entfernten Schichten denkbar ist, überschlagen werden. Die Neigung der Schichtengrenze in unsichtbarer Entfernung von den Gefässwänden gegen die Horizontale mag sich vom Winkel 0° bis 90° in kleinem Bogen ändern und eine mittlere Neigung von 45° der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Der Lichtstrahl hat eine Grenzfläche solcher Neigung zweimal zu durchsetzen, beim Ein- und Austritt; dieselben schliessen untereinander einen Winkel von 90° ein. Man kann also so rechnen, als ob der Lichtstrahl ein rechtwinkeliges Prisma zu durchsetzen hätte, dessen Brechungsexponent von dem der Umgebung soviel abweicht als zwei Punkte im Diffusionsgefäss von einem verticalen Abstand gleich 0,00001 cm.

Dieser Unterschied Δn ist gleich 0,00001 n', wenn der Nenner von $n' = dn/dx$ in Centimeter angegeben wird. Der gesuchte kleine Ablenkungswinkel α des Lichtstrahls ergibt sich dann aus der Formel:

$$\frac{n + \Delta n}{n} = \frac{\sin\left(\frac{90 + \alpha}{2}\right)}{\sin\frac{90}{2}} = 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Also

$$\alpha = \frac{2\Delta n}{n} = 0{,}000\,02\,\frac{n'}{n}.$$

Da $n/n' = r$ (Formel 1, § 1, p. 106) der Krümmungsradius des Lichtstrahls im Diffusionsgefäss selbst in dem oben be-

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **139.** 1870. (Vgl. p. 18, 20 u. 28).

sprochenen extremen Fall der Diffusion von Alkohol gegen Schwefelkohlenstoff nicht unter 10 cm gefunden wurde, so wird α im allgemeinen nur einen Bruchtheil einer Secunde betragen.

Das Verhältniss der durch Capillarwirkung möglichen und durch die Strahlenkrümmung bewirkten, auf einem Schirme im Abstand a von der Mitte des Diffusionsgefässes beobachteten Ablenkungen ergibt sich nach Formel 2 (p. 122) gleich:

$$\frac{a\,\alpha}{z} = \frac{\alpha}{n'\,\delta} = \frac{0{,}000\,02}{n\,.\,\delta}\,.$$

D. h. erst wenn man die Dicke des Diffusionsgefässes gleich 1/100 cm wählen würde, wäre ein durch Capillarität verursachter Fehler denkbar von etwa 1 pro Mille. Diese Dicke war bei den folgenden Versuchen nie unter 1 cm. Es konnte also die Capillarität keinen merklichen Einfluss auf die Beobachtungen ausüben. Einen experimentellen Beweis dafür wird die im folgenden Paragraph gegebene Bestätigung der Formel 4a (p. 125) liefern.

Woher rührt aber die irrige Ueberschätzung des Einflusses der Capillarität? Die unmittelbare Beobachtung lässt eine gekrümmte Grenze zweier übereinander geschichteten Flüssigkeiten erscheinen. Diese Erscheinung beruht indess auf einer optischen Täuschung. Denn wir setzen einen geradlinigen Gang der Lichtstrahlen voraus, welcher im Diffusionsgefäss nicht besteht. Man überzeugt sich leicht von der Täuschung, wenn man in einem länglichen schmalen Glastrog fluorescirenden Alkohol auf Schwefelkohlenstoff geschichtet hat. Von der grösseren Seitenfläche aus gesehen erscheint dann die Trennungsfläche gekrümmt, während man von der Schmalseite aus in unmittelbarer Nähe der Glaswand die völlige Ebenheit derselben erkennt. Die in's Innere gehende Trennungsfläche erscheint aber auch hier wie eine aufsteigende Brücke.

Schickt man in Richtung der Dickenerstreckung in ein schmales Gefäss ein horizontales durch einen Spalt erzeugtes schmales paralleles Lichtbündel, so erscheint dies in der fluorescirenden Flüssigkeit von oben gesehen als eine leuchtende nahezu horizontale Fläche, von der Schmalseite aus dagegen bei Alkohol und Schwefelkohlenstoff wie eine vom Beobachter aus ansteigende, bei Schwefelkohlenstoff und Chloroform da-

gegen wie eine absteigende Lichtbrücke, die meist gebogen ist und an der ursprünglichen Trennungsschicht der beiden Flüssigkeiten sich in die scheinbar capillar gekrümmte Trennungsfläche hineinlegt.

Diese Beobachtungen werden davon überzeugen, dass der Anblick einer gekrümmten Grenzfläche zweier gegen einander diffundirenden Flüssigkeiten nicht durch Capillarität, sondern durch den gekrümmten Weg der Lichtstrahlen verursacht ist und die eingangs dieses Paragraphen gestellten Fragen mit „Nein“ zu beantworten sind.

§ 8. Versuche zur Bestätigung der zwischen dem Unterschied der Brechungsexponenten der unvermischten Flüssigkeiten und der Diffusionsfläche aufgestellten Beziehung (Formel 4a).

Die Versuchsanordnung ist im wesentlichen anfangs des § 6 beschrieben. Da es sich zunächst um orientirende Versuche handelte, wurden die Diffusionscurven aus freier Hand nachgezeichnet. Wo bei weissem Licht merkliche Dispersion auftrat wurde die orange Curve benutzt.

Ein Versuch — mit Kochsalzlösung und Wasser — erfuhr eine genauere Ausführung. Die Curven wurden auf einer Bromsilbergelatineplatte photographisch aufgenommen. Farbige Gläser und Flüssigkeiten ermöglichten dabei indess nicht die Erzielung eines scharfen Bildes. Daher musste spectral zerlegtes Licht angewandt werden. Ein geradsichtiges Prisma entwarf ein Spectrum auf der Ebene eines feinen Spaltes, welcher blaues Licht von der Wellenlänge 464 $\mu\mu$ auswählte und dasselbe durch eine Linse und das nochmals mit einem spaltförmigen Diaphragma versehene Diffusionsgefäss nach der photographischen Platte sandte.

Die Auswerthung der Diffusionsfläche geschah bei den ersten Versuchen durch Construction. Die Fläche wurde in kleinere Stücke getheilt, deren krummlinige Begrenzung nur noch eine verhältnissmässig kleine Krümmung besass. Die krummlinige Begrenzungslinie wurde sodann durch eine sich möglichst anschmiegende Gerade ersetzt, welche dem Augenmass nach mit den übrigen Grenzlinien die gleiche Fläche einschloss wie die krumme Linie. Da die so corrigirte Fläche von der Gesammtfläche nur einen kleinen Theil bildete, so war der Fehler dieses Verfahrens vermuthlich kleiner als der

bei der Aufzeichnung der Curve gemachte. Die gesammte Diffusionsfläche wurde also in dieser Weise in Dreiecke und Trapeze zerlegt, deren Inhalt leicht auszumessen war.

Bei den photographirten Curven wurden die verticalen Entfernungen der Curvenpunkte von dem unabgelenkten Spaltbild, das zum Schluss nach künstlicher, vollkommener Mischung der Flüssigkeiten gleichfalls aufgenommen war, in Intervallen von 1 mm, bei stärkerer Krümmung auch von 0,5 mm mit dem Kathetometer gemessen. Die horizontalen Verschiebungen der Platte wurden dabei mit einer Theilmaschine ausgeführt, an welcher dieselbe zu den Messungen befestigt war. Die so ermittelten Coordinaten dienten dann zur Bestimmung der Diffusionsfläche unter der Annahme, dass die von ihnen ausgeschnittenen Curvenstücke als geradlinig zu betrachten seien.

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Messungen zur Prüfung der Formel 4a (p. 125):

$$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a \,.\, \delta} \,.\, F.$$

Die Diffusionsfläche wurde bei jedem Versuch aus verschiedenen Curven ermittelt (Spalte 5 der folgenden Tabelle) und daraus das Mittel genommen (Spalte 6). Die Brechungsexponenten der benutzten Flüssigkeiten wurden mit dem Abbe'schen Totalrefractometer gemessen, nur bei Kochsalzlösung aus der Interpolationsformel von Börner[1]) berechnet. λ gibt die Wellenlänge der benutzten Farbe, τ die Mitteltemperatur der Flüssigkeiten während der Beobachtungen an.

Die Einzelwerthe für F weichen bei den 3 ersten Versuchen um Beträge ab, die bei der primitiven Art der Messung nicht auffallend sind. Da die von oben nach unten gelesenen Zahlen jeweils Diffusionsflächen für zunehmende Zeiten (vgl. Fig. 14—16 p. 134 u. 135) entsprechen, so erkennt man das Fehlen systematischer Abweichungen. Die Einzelwerthe für die photographirten Curven stimmen besser untereinander überein. Die aus den Mittelwerthen von F berechneten und die beobachteten Werthe der Brechungsexponentenunterschiede in der 7. und 8. verticalen Spalte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein. Somit bestätigt sich die oben aufgestellte Beziehung.

1) Wüllner, Experimentalphysik, 2. p. 188. 4. Aufl. 1883.

1. Flüssigkeiten	2. η	3. a (cm)	4. δ (cm)	5. F (cm²)	6. F Mittel	7. $\frac{\eta}{a.\delta}F$	8. $n_2 - n_1$	9. λ ($\mu\mu$)	10. τ (° C)
Alkohol-Schwefelkohlenstoff	0,941	30,9	1,027	9,12 9,03	9,07	0.269	0,265	589 (D)	20,3
Schwefelkohlenstoff-Chloroform	0,941	30,9	1,027	6,12 6,25 6,00 6,22	6,15	0,182	0,183	589 (D)	19,2
Wasser-Silbernitratl. (60 g $AgNO_3$ 39,95 g H_2O)	0,925	50,8	1,027	6,33 5,89 5,93 6,27	6,10	0,108	0,112	656 (C)	17,8
Wasser-Kochsalzlös. Photogr. Curven (15 g NaCl 100,05 g H_2O)	0,738	147,1	2,536	12,50 12,49 12,56 12.78	12,58	0,0249	0,0247	464	16,6

§ 9. **Ermittelung der Diffusionsconstanten aus den Diffusionscurven auf graphischem Wege. — Die Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der Concentration offenbart sich aus der gegenseitigen Lage der Diffusionscurven.**

Die Differentialgleichung der Diffusion in einem Gefäss constanten Querschnitts lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

dabei bedeutet u die Concentration, d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Gewichtsmenge der einen Substanz, t die Zeit, x die Höhe im Diffusionsgefäss, k die Constante der Diffusion.

Bei vorliegender Beobachtungsmethode werden nun nicht die Functionen der Concentration sondern die des Brechungsexponenten ermittelt. Die Aenderungen der Concentration sind aber denjenigen des Brechungsexponenten nahezu, wenn auch nicht genau, proportional. Die Proportionalität trifft z. B. bei Kochsalz mit grösserer Genauigkeit zu als die Mischungsformel. Ich habe mich davon überzeugt, dass die Abweichungen vom Gesetze der Proportionalität sehr klein sind und bei orientirenden Versuchen unberücksichtigt bleiben durften. Setzt man also unter Benutzung zweier Constanten c_1 und c_2:

$$u = c_1 + c_2 n,$$

so wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_2 \frac{\partial n}{\partial t},$$

und:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \frac{\partial^2 n}{\partial x^2};$$

und die Diffusionsgleichung geht über in:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},[1]$$

d. h. in eine Differentialgleichung, bei der die Concentration durch den Brechungsexponenten ersetzt ist.

Die Differentialquotienten dieser Gleichung lassen sich unmittelbar aus den Diffusionscurven entnehmen. Nach § 6 (p. 126) berechnet sich n aus einem Stück f der Diffusionsfläche, $\partial n / \partial t$ also aus der Zunahme desselben bei gleicher Grenzabscisse in der Zeiteinheit. $\partial^2 n / \partial x^2 = n''$ ergibt sich aus der Lage der Tangente an die Diffusionscurve an derselben Stelle und somit k als das Verhältniss dieser beiden Differentialquotienten.

Es war (Formel 4 p. 125):

$$n = n_1 + \frac{\eta}{a \, . \, \delta} f,$$

also ist:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\eta}{a \, . \, \delta} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Ferner war (Formel 3 p. 125):

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta \, a \, \delta} z';$$

also ist:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{k}{\eta^2} z'.$$

Sei das Stück der Diffusionsfläche für die Abscisse y (vgl. Fig. 13 p. 123) und für zwei verschiedene Zeiten t_1 und t_2 gleich f_1 und f_2, so erhält man durch Integration:

---

1) Fasst man n als beliebige Function von u auf, so lautet die allgemeine Gleichung:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - k \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 \frac{\frac{\partial^2 n}{\partial u^2}}{\left(\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2},$$

wobei im Falle $\partial n : \partial u$ nahezu constant, das letzte Glied die Rolle einer Correctionsgrösse spielt.

$$f_2 - f_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial t} dt = \frac{k}{\eta^2} \int_{t_1}^{t_2} z' \, dt.$$

Zur Bestimmung von k ist also zunächst die Aufzeichnung zweier Diffusionscurven nöthig; dann ist $f_2 - f_1 = \Delta f$ der Zuwachs der Diffusionsfläche für die Abscisse y eine durch die beiden Diffusionscurven, das unabgelenkte Spaltbild und die zu y gehörige Ordinate abgegrenzte Fläche. Die letztere Grenze beschränkte sich bei den Versuchen meist auf einen Punkt, da als Abscisse meist die eines Schnittpunktes zweier Diffusionscurven gewählt wurde, wenn derselbe nicht zu nahe an dem Punkte grössten Gefälles lag (vgl. Fig. 14—16).

Ferner muss man zur Bestimmung von

$$\int_{t_1}^{t_2} z' \, dt$$

die Abhängigkeit der Neigung der Tangente für die Abscisse y von der Zeit kennen. Wählt man y geeignet so, dass sich diese Neigung in dem benutzten Zeitintervall wenig ändert, so genügt eine zwischenliegende Diffusionscurve, um graphisch das Integral zu ermitteln, indem man in einer Hülfscurve z' als Function von t aufträgt. Sei $\Delta t = t_2 - t_1$, und Z' der Mittelwerth von z' in dem betrachteten Intervall, d. h.:

$$Z' \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} z' \, dt,$$

so ist

(5) $$k = \eta^2 \frac{\Delta f}{Z' \Delta t}.$$

Die Dimension dieses Ausdrucks in demnach, wie es sein muss, $[l^2 / t]$. Im Folgenden sind, wie üblich, l in *cm*, t in Tagen ausgedrückt. Vor der Mittheilung von Zahlen soll indess noch eine allgemeine Bemerkung Platz finden.

Gleich bei den ersten Versuchen mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff fiel mir auf, dass die Stelle maximaler Ablenkung der Diffusionscurve nicht auf derselben Verticalen verblieb, sondern sich seitlich in Richtung wachsender Brechungsexponenten verschob, d. h. dass der Punkt maximalen Gefälles nicht in derselben Höhe im Diffusionsgefäss blieb, sondern nach unten sank, nach der Seite zunehmenden Schwefelkohlen-

stoff-Gehaltes der Flüssigkeit. Diese Verschiebung ist in Fig. 14 u. 14a zu sehen.

Abbildung des Diffusionsvorgangs durch die Aenderung der Diffussionscurven bei fortschreitender Diffusion.

Erklärung: Fig. 14, 15 u. 16 stellen Diffusionscurven dar in $^1/_2$ nat. Grösse für die Zeiten t nach Versuchsbeginn (Beginn des Eingiessens der schwereren Flüssigkeit unter die leichtere). Fig. 14a, 15a u. 16a sind aus den ersteren abgeleitet und auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen mit Abscissen y (vgl. 125 u. Fig. 13) proportional den Höhen im Diffusionsgefäss vom oberen Ende nach unten gemessen, und mit Ordinaten z proportional dem Gefälle des Brechungsexponenten. Die Punkte mit grössten z sind mit Kreuzchen bezeichnet. Es bedeutet e_1 Abstand der Projectionslinse vom Schirm, a Abstand der Mitte des Diffusionsgefässes vom Schirm, δ Dicke des Diffusionsgefässes, innen gemessen, λ Wellenlänge des benutzten Lichtes, τ mittlere Temperatur im Diffusionsgefäss, u Concentration (g in 10 cm^3).

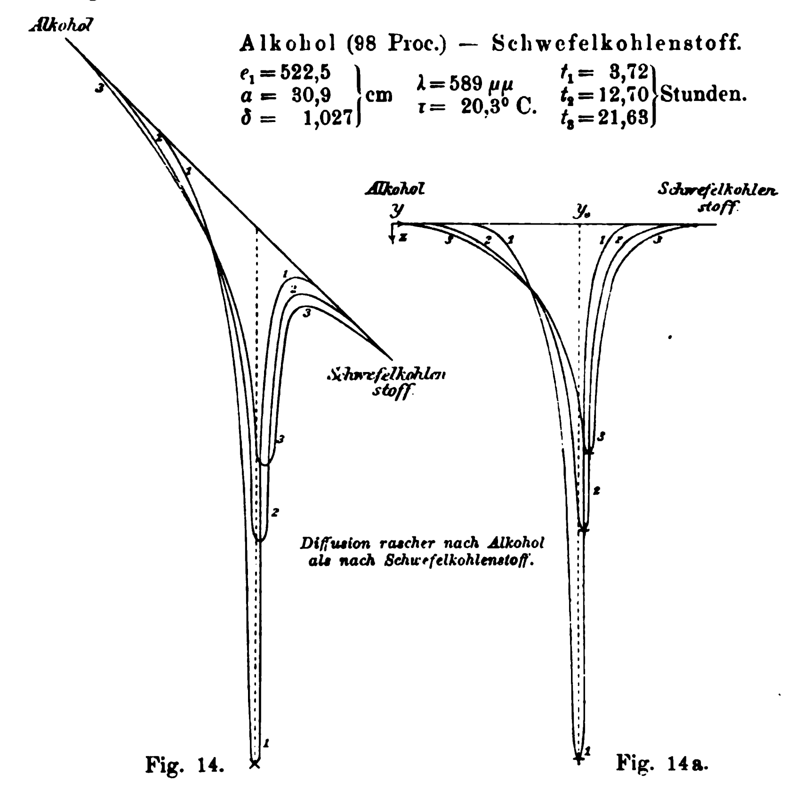


Fig. 14. Fig. 14a.

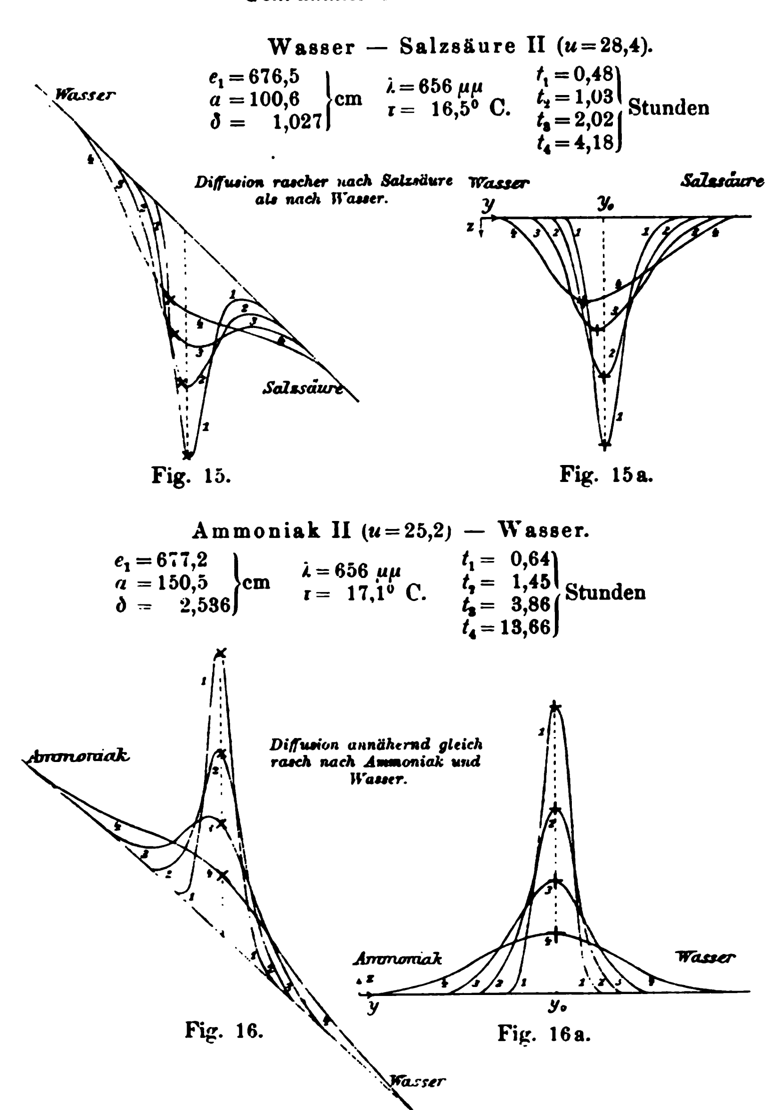


Fig. 15. Fig. 15a.

Fig. 16. Fig. 16a.

Diese Verschiebung des Punktes maximalen Gefälles wies darauf hin, dass sich die Diffusion nach verschiedenen Seiten mit verschiedener Geschwindigkeit vollzog. Denn bei gleicher Diffusionsgeschwindigkeit hätte sich die anfänglich schmale Diffusionsschicht zwischen den unvermischten Flüssigkeiten

symmetrisch nach beiden Seiten verbreiten und die Stelle maximalen Gefälles an ihrem Orte bleiben müssen. Wenn dagegen die Diffusion nach der einen Seite, welche die erste heissen möge, rascher erfolgt als nach der zweiten, so muss auch von dem Punkte des Maximalgefälles aus nach der ersten Seite hin der Ausgleich in dem Unterschied der Brechungsexponenten rascher von statten gehen als nach der zweiten. Da aber der Punkt mit Maximalgefälle ein solcher sein muss, zu dessen beiden Seiten in gleichen unendlich kleinen Abständen ein gleiches Gefälle besteht, so kann er ein solcher nicht bleiben, wenn das Gefälle nach der ersten Seite hin rascher abnimmt als nach der zweiten und muss sich nach der letzteren Seite hin verschieben,[1]) d. h. *der Punkt maximalen Gefälles muss nach der Seite wandern, nach welcher die Diffusion langsamer erfolgt.*

Um dieses Ergebniss zu prüfen, stellte ich Versuche mit drei wässerigen Lösungen an, welche nach Scheffer[2]) eine beträchtliche Abnahme, beträchtliche Zunahme und annähernde Constanz des Diffusionscoefficienten bei wachsender Concentration ergaben. Das erste trifft bei salpetersaurem Silber, das zweite bei Salzsäure und das dritte bei Ammoniak zu. Betrachtet man bei dem Versuch mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff die erstere Flüssigkeit als das Lösungsmittel, so musste sich der Punkt des Maximalgefälles im ersten Fall wie bei Schwefelkohlenstoff im zweiten entgegengesetzt und im dritten überhaupt nicht verschieben. Diese Folgerung wurde durch die Beobachtungen bestätigt. Für den zweiten und dritten Fall ist dies aus den Fig. 15 u. 16 zu ersehen, welche einige Diffusionscurven für Salzsäure und Ammoniak gegen Wasser wiedergeben.

1) Diese Ueberlegung gilt nur für eine anfängliche symmetrische Vertheilung des Gefälles, um den Punkt maximalen Gefälles, wie man sie bei Uebereinanderschichtung der Flüssigkeiten annähernd erreichen kann. Würde man von vornherein nach Seite der abnehmenden Diffusionscoefficienten willkürlich eine bedeutend stärkere Abnahme des Gefälles als nach der anderen Seite hin herstellen, so würde man dadurch die Diffusion in Richtung abnehmender Diffusionscoefficienten beschleunigen und unter Umständen eine Verschiebung des Maximums in umgekehrtem Sinne wie oben bewirken können. Diesen Zusammenhang glaube ich bei einem Versuche über Wärme-Diffusion in Wasser beobachtet zu haben. Der obige Satz sammt seinen Einschränkungen lässt sich aus der erweiterten Diffusionsgleichung (§ 11) quantitativ erörtern.

2) Scheffer, Zeitschr. f. phys. Chem. 2. p. 390. 1888.

Eine weitere Bestätigung des Gesagten liefern die auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Diffusionscurven der Fig. 14 a, 15 a u. 16 a. *Die seitliche Ausbreitung ihrer beiden Curven-Aeste gestatten ein unmittelbares Urtheil über die verhältnissmässige Diffusionsgeschwindigkeit in beiden Richtungen.* Von der Abscisse y_0 des Punktes mit Maximalgefälle an gerechnet, welcher nahezu der Höhe der ursprünglichen Trennungsebene der beiden Flüssigkeiten entspricht, erstrecken sich die Aeste jeweils derselben Diffusionscurve in Fig. 14 a gegen Alkohol zu weiter als gegen Schwefelkohlenstoff, in Fig. 15 a gegen Salzsäure zu weiter als gegen Wasser und in Fig. 16 a nahe gleich weit gegen Ammoniak zu wie gegen Wasser; ein Beweis dafür dass im ersten Falle die raschere Diffusion nach Alkohol, im zweiten nach Salzsäure, und im dritten Falle annähernd gleich rasche Diffusion nach Ammoniak wie Wasser erfolgt.

Während nun die Schnelligkeit, mit der sich die Diffusionscurven ändern, die mittlere Diffusionsgeschwindigkeit erkennen lässt, verräth die Form und gegenseitige Lage derselben, ob in einer Richtung und in welcher die Geschwindigkeit der Diffusion überwiegt. Die Diffusionscurven entwerfen also ein getreues Bild des ganzen Diffusionsvorganges.

Eine quantitative Bestätigung erfahren die obigen Schlüsse durch die graphischen Bestimmungen der Diffusionsconstanten k (cm^2 / Tag) für verschiedene Concentrationen u (Gewicht des gelösten Körpers in g in 100 cm^3 der Lösung), welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Die Genauigkeit der Bestimmungen ist natürlich bei den aus freier Hand nachgezeichneten Curven gering. Bei $NaCl$ wurde bei den grossen Unterschieden in der Concentration bei Versuch I in Uebereinstimmung mit dem Bild der Diffusionscurven und mit den Beobachtungen von Scheffer eine mit der Verdünnung wachsende Diffusionsgeschwindigkeit gefunden. Auffallend ist bei Ammonikwasser das verhältnissmässig starke Ueberwiegen der Diffusionsgeschwindigkeit in der Richtung nach ersterem. Indess zeigt das Curvenbild eine Andeutung in diesem Sinne, wenn auch nur schwach. Die Unterschiede von k mit der Concentration wurden meist grösser gefunden als von Scheffer, zum Theil vielleicht in Folge der Fehler, zum Theil aber wohl auch. weil bei vorliegenden Beobachtun-

gen nicht verschieden concentrirte Lösungen gegen Wasser sondern gegen einander diffundiren. Wo Scheffer[1]) ausnahmsweise den letzteren Vorgang untersuchte, fand er auch grössere Abweichungen.

	τ^0 C.	u	k		τ^0 C.	u	k
Na Cl I	17,2	5	1,1	H Cl II[2])	16,5	3	2,8
		23	0,8			26	4,2
NH_3 I	16,9	4	1,2	Ag NO_3	17,8	4	1,1
		21	1,6			113	0,5
NH_3 II	17,1	5	1,4	Na Cl II (photogr. Curven)	16,6	0,2	1,13
		20	1,9			12,6	1,16
H Cl I[2])	17,8	1	2,9				
		26	4,2				

Das graphische Verfahren scheint leider mehr geometrisches Interesse als Genauigkeit zu besitzen. Indessen ist wahrscheinlich, dass es zu einem viel genaueren ausgearbeitet werden kann, wenn photographirte Curven genau ausgemessen und die Neigung der Tangenten der Curven für eine geeignete Abscisse öfters durch eine passende Messvorrichtung bestimmt werden.

Eine grössere Genauigkeit wird von vornherein durch eine auf die Lösung der Differentialgleichung der Diffusion gegründete Methode an die Hand gegeben.

§ 10. Bestimmung der Diffusionsconstanten aus der Lösung der Differentialgleichung für Diffusion.

Ersetzt man in der Differentialgleichung der Diffusion die Concentration durch den ihr zukommenden Brechungsexponenten (vgl. p. 132), so erhält man:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

unter der zunächst festzuhaltenden Bedingung, dass k eine auch von n unabhängige Constante ist.[3])

1) Scheffer l. c. p. 398 Anm. 1.

2) Wegen der starken Aenderung von k mit der Concentration wurde hier noch das Glied $k(\partial u / \partial x)^2$ der verallgemeinerten Differentialgleichung (Form. 8 p. 143) bei der Rechnung berücksichtigt.

3) Der Einfluss der Veränderlichkeit von k auf die Berechnung des *Mittelwerthes* dieser Grösse wird im nächsten § besprochen und sich dabei für das hier eingeschlagene Verfahren als klein herausstellen.

Wählt man als Nullpunkt der x die ursprüngliche Grenze der übereinandergeschichteten Flüssigkeiten, so sind die Grenzbedingungen für $t = 0$:

$$n = n_1, \text{ für alle Werthe von } x < 0$$
$$n = n_2, \;\; \text{,,} \;\; \text{,,} \;\; \text{,,} \;\; \text{,,} \;\; x > 0$$

Das Integral der Differentialgleichung ist dann:

$$n = n_2 - \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{+x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Für $t = 0$ und $x > 0$ wird der Werth des Integrals Null; für $t = 0$ und $x < 0$ wird er $\sqrt{\pi}$. Daher sind die Grenzbedingungen erfüllt; dass der Differentialgleichung genügt wird, erkennt man leicht.

Für das Folgende ist erforderlich der Werth von:

$$n' = \frac{dn}{dx} = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

und:

$$n'' = \frac{d^2 n}{dx^2} = -\frac{n_2 - n_1}{4\sqrt{\pi k^3 t^3}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Ersetzt man in der Gleichung für n' das x durch $\eta \,.\, y = x$ (p. 123), so erhält man die Gleichung der auf rechtwinkelige Coordinaten bezogenen Diffusionscurven (Fig. 16a). Durch Vergleich der experimentell gefundenen Diffusionscurven mit dieser Gleichung erhält man also mannigfaltige Wege zur Bestimmung von k.

Der einfachste und zuverlässigste ist wohl der unter Benutzung des Maximalwerthes des Gefälles n'. Für das zugehörige x muss also sein $n'' = 0$, d. h. $x = 0$. Dann wird

$$n' = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi k t}},$$

also:

$$k\,t = \frac{(n_2 - n_1)^2}{4\pi} \frac{1}{n'^2}.$$

Nun war (Form. 2 p. 125):

$$n' = \frac{z}{a \,.\, \delta}$$

und (Form. 4a p. 125):

$$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a \,.\, \delta} F.$$

Also wird:

$$(6) \qquad k\,t = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi} \frac{1}{z^2}.$$

Die Formel würde zur Bestimmung von k ausreichen. wenn man den Zeitpunkt $t = 0$, für den die Flüssigkeiten unvermischt aneinander stossen, kennen würde. Derselbe fällt aber nicht mit dem Beginn des Eingiessens der schwereren Flüssigkeit unter die leichtere zusammen, da hierbei eine kleine Mischung an der Grenze nicht zu vermeiden ist. Das theoretische $t = 0$ wird also vor dem Beginn des Eingiessens der schwereren Flüssigkeit liegen, was sich auch aus den mitzutheilenden Messungen ergibt.

Man wählt also am besten zwei Zeiten t_1 und t_2 mit den zugehörigen Werthen z_1 und z_2; dann ist:

$$k\,t_1 = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi} \frac{1}{z_1^2}; \qquad k\,t_2 = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi} \frac{1}{z_2^2},$$

also:

$$(7) \qquad k = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi (t_2 - t_1)} \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1^2 . z_2^2}.$$

Die Bedeutung der Constanten dieser Gleichung ist auf p. 125 und 126 angegeben. Die Diffusionsfläche F lässt sich entweder unmittelbar aus den Curven entnehmen, wie das bei den folgenden Bestimmungen geschah, oder aus dem Unterschied der Brechungsexponenten der unvermischten Flüssigkeiten berechnen (vgl. § 8).

Als Beispiel möge ein Versuch dienen, bei welchem eine Kochsalzlösung (30 g NaCl auf 200, 1 g H_2O) gegen Wasser bei einer mittleren Temperatur von 16,6° C (die grösste Temperaturschwankung betrug 0,5° C.) diffundirte. Die Messungen wurden an den photographirten Diffusionscurven ausgeführt. Die Constanten waren $\eta = 0{,}738$; $F = 12{,}58\ \text{cm}^2$. Die maximalen Ablenkungen z wurden für 4 verschiedene Zeiten t' gemessen, welche von dem Augenblick des Beginnes des Eingiessens der Kochsalzlösung an gerechnet in Stunden waren: $t'_1 = 3{,}450$; $t'_2 = 6{,}001$; $t'_3 = 10{,}868$; $t'_4 = 21{,}529$. Die zugehörigen Werthe von z waren in cm: $z_1 = 6{,}452$; $z_2 = 4{,}890$; $z_3 = 3{,}649$; $z_4 = 2{,}623$. Daraus ergibt sich nach (Form. 6 p. 140) unter Multiplication der rechten Seite mit 24, weil k in Ein-

heiten (cm^2 / Tag) ausgedrückt ist: $k t_1 = 3{,}955$; $k t_2 = 6{,}884$; $k t_3 = 12{,}363$; $k t_4 = 23{,}927$ also:

$$k(t_2 - t_1) = 2{,}929\,; \quad k(t_3 - t_2) = 5{,}479; \quad k(t_4 - t_3) = 11{,}564;$$
$$k(t_4 - t_1) = 19{,}972.$$

Unter Benutzung der t', deren Differenzen gleich denjenigen der t mit gleichem Index sind, erhält man 4 Werthe für k (cm^2 / Tag) nämlich:

1,15; 1,13; 1,08; 1,10.

Nimmt man den letzten Werth, der aus der grössten Zeitdifferenz abgeleitet ist, als Mittelwerth, so erhält man aus den Werthen $k t$ die Zeiten selbst:

$$t_1 = 3{,}595^h; \quad t_2 = 6{,}258^h; \quad t_3 = 11{,}239^h; \quad t_4 = 21{,}752^h.$$

Die Unterschiede $t - t'$ sind dann der Reihe nach in Minuten:

9′; 15′; 22′; 13′.

Diese Zahlen sollten die gleichen sein; ihr Unterschied ist indess im Vergleich zur Dauer des ganzen Versuches von nahezu einem Tag nicht bedeutend. Es ergibt sich also, dass der theoretische Zeitpunkt 0 des Diffusionsversuches, für welchen Wasser und Salzlösung unvermischt aneinandergrenzen, etwa eine Viertelstunde vor dem Einfüllen der Salzlösung stattfand. Einer solchen anfänglichen Diffusionsdauer ist die beim Einfüllen entstehende Mischung an der Grenze der Flüssigkeiten gleichwerthig.

Es folgt die Zusammenstellung der auf diesem Wege auch aus den gezeichneten Curven erhaltenen Werthe für k. Als Concentration u ist die mittlere, d. h. die Hälfte derjenigen der zum Versuch benutzten Lösung aufgeführt.

	τ °C.	u	k		τ °C.	u	k
Na Cl I	17,2	14	1,0	Na Cl II (phot. Curven)	16,6	7	1,10
NH_3 I	16,9	13	1,6	Alkohol (98%) – Schwefelkohlenstoff	20,3	—	1,9
NH_3 II	17,1	13	1,7				
H Cl I	17,8	14	3,5				
H Cl II	16,5	14	3,4	Schwefelkohlenstoff – Chloroform	19,2	—	2,1
$AgNO_3$	17,8	58	0,50				

Die Werthe von k reihen sich in die für kleinste und grösste Concentrationen (p. 138) ziemlich gut ein. Auch stehen

sie mit den nach andern Methoden bisher gewonnenen nicht in Widerspruch. Eine unmittelbare Vergleichung ist schwer, weil die Aenderung von k mit Concentration und Temperatur noch nicht genügend bekannt ist. Zum Vergleich sei nur angeführt, dass für Kochsalz, bei dem die Angaben verschiedener Beobachter ziemlich gut übereinstimmen, Nernst[1]) als Mittel dieser Angaben für verdünnte Lösungen bei 18° C. findet $k = 1{,}10$, das mit dem aus den photographirten Curven gefundenen zufällig genau übereinstimmt, und dass Scheffer[2]), welcher die Diffusion bei sehr wechselnden Concentrationen untersucht hat, bei Salzsäure zwischen 11° und 13° C. bei verschiedenen Concentrationen Werthe findet, die innerhalb 2,0 und 4,2 schwanken. Somit glaube ich auch durch die mitgetheilten, etwas primitiven Versuche gezeigt zu haben, dass die neue Diffusionsmethode brauchbar ist.

§ 11. Einfluss der Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten mit der Concentration auf die Berechnung der mittleren Diffusionsconstanten. — Die verallgemeinerte Differentialgleichung der Diffusion.

Die Benutzung des Integrals der Differentialgleichung der Diffusion setzt die Unabhängigkeit der Diffusionsconstanten k von der Concentration voraus. Da diese Unabhängigkeit nicht besteht und daher nur den Namen eines Diffusionscoefficienten verdient, so fragt es sich, welchen Fehler man begeht, wenn man zur Bestimmung von k für die beim maximalen Concentrationsgefälle herrschende Concentration gleichwohl jenes Integral benutzt.

Dazu ist die Aufstellung einer allgemeineren Differentialgleichung der Diffusion erforderlich, welche die Constanz von k nicht mehr voraussetzt.[3])

Es ströme durch den Querschnitt 1 an der Stelle x des

1) Nernst, Zeitschr. für phys. Chemie. 2. p. 629. 1888.

2) Scheffer, Ebd. p. 398.

3) Nachträglich bemerkte ich, durch Hrn. Drecker aufmerksam gemacht, dass Hr. O. Wiedeburg in Wied. Ann. 41. p. 675. 1890. die verallgemeinerte Differentialgleichung der Diffusion bereits aufgestellt und eine näherungsweise Lösung derselben gegeben hat. Indess glaubte ich bei der etwas abweichenden Form der Darstellung die folgende Ableitung nicht streichen zu sollen.

Diffusionsgefässes in Richtung nach kleineren x in der Zeit 1 die Menge des Salzes:

$$m_x = k \frac{\partial u}{\partial x},$$

an der Stelle $x + dx$:

$$m_{(x+dx)} = k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} dx.$$

Dadurch tritt in einem Prisma vom Querschnitt 1 und der Höhe dx eine Vermehrung der Concentration Δu ein:

$$\Delta u = \frac{m_{(x+dx)} - m_x}{dx} = \frac{\partial \left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x},$$

und zwar in der Zeiteinheit; in der Zeit dt tritt also die Vermehrung $du = \Delta u\, dt$ ein d. h.:

$$du = \frac{\partial \left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} dt,$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

differentiirt man aus, so erhält man als allgemeine Differentialgleichung der Diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nimmt man den einfachen Fall, dass k sich mit u proportional ändert und sind k_0 und $\varkappa$ zwei neue Constanten, so kann man setzen:

$$k = k_0 + \varkappa u.$$

Die Diffusionsgleichung geht dann über in:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

oder in:

(8) $$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Ersetzt man wieder die Concentration durch den Brechungsexponenten, so wird:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \varkappa \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2, \text{ wobei:}$$

$$k = k_0 + \varkappa (n - n_0).$$

Bei der einfachen Diffusionsgleichung fallen nun die Punkte, für welche das Gefälle ein maximales ist, d. h. $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$, mit denjenigen, für welche n sich nicht mit der Zeit ändert, d. h. $\partial n / \partial t = 0$, zusammen. Im allgemeineren Fall trifft das nicht mehr zu; denn für $\partial n / \partial t = 0$ wird:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -\frac{\varkappa}{k}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2.$$

Man wird also ein Urtheil erhalten über die Grösse des dadurch begangenen Fehlers, dass man das Integral der einfachen Diffusionsgleichung auch für den Fall veränderlicher k benutzt, wenn man das eine Mal, so wie es oben geschah, Werthe von z einsetzt für Punkte, für welche $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$ ist, das andere Mal aber solche für Punkte, für die $\partial n / \partial t = 0$ ist.

Für die Diffusion von Salzsäure gegen Wasser, bei der eine grosse Veränderlichkeit von k mit der Concentration besteht, erhielt ich so im ersten Fall $k = 3{,}36$; im zweiten $k = 3{,}34$. Der Unterschied ist also klein und fällt innerhalb der Fehlergrenzen der mitgetheilten Versuche. Will man grössere Genauigkeit erreichen, so muss man entweder die Correctionsgrösse berechnen oder, was auch aus andern Gründen vorzuziehen ist, mit kleineren Concentrationsdifferenzen arbeiten.

§ 12. Ueber die Vervollkommnung der Methode.

Die mitgetheilten Versuche hatten nur den Zweck einen gangbaren Weg einer optischen Diffusionsmethode zu zeigen.

Behufs grösserer Genauigkeit wird man vor allem für vollkommen planparallele Verschlussplatten der Diffusionsgefässe zu sorgen haben, welche mir nicht zur Verfügung gestanden hatten.

Demnächst wird man bei der zuletzt beschriebenen Methode der Maximalablenkungen, welche die genauesten Ergebnisse verspricht, diese wohl am besten unmittelbar durch eine mit Fadenkreuz versehene Lupe messen, welche auf die Diffusionscurve eingestellt wird und eine genau messbare Verticalverschiebung gestattet.

Mit solchen Versuchen ist bereits im hiesigen physikalischen Institut Hr. Dr. Drecker beschäftigt, welcher sich die Aufgabe gestellt hat, die Methode für feinere Messungen auszuarbeiten. Es ist ihm u. a. schon gelungen, aus fünf Diffusions-

curven bei Kochsalz vier untereinander bis auf ein pro Mille übereinstimmende Werthe abzuleiten.

Es wird ferner gut sein nur Lösungen von kleiner Concentrationsdifferenz gegen einander diffundiren zu lassen, damit der Fehler abnimmt oder verschwindet, welcher dadurch bedingt ist, dass man die Aenderung der Brechungsexponenten proportional derjenigen der Concentrationen setzt. So kann man auch die Abhängigkeit der Diffusion von der Concentration untersuchen. Gleichwohl wird die genaue Kenntniss der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Concentration erwünscht sein.

Man könnte hier befürchten, dass bei Verringerung der Concentrationsdifferenzen der Unterschied im Brechungsvermögen der Flüssigkeiten zu kleine Ablenkungen bedingen wird. Indess hat die Methode nach dieser Richtung fast keine Grenzen, da die Ablenkung $z = a\,\delta\,n'$ ist. Bei kleinem n' braucht man nur den Abstand a des Schirmes vom Diffusionsgefäss und die Dicke δ des letzteren entsprechend gross zu wählen. So erhielt ich bei dem geringen Unterschied des Brechungsexponenten der Ammoniaklösung gegen Wasser von ca. 0,01 für $a = 150$ cm und $\delta = 2{,}5$ cm als maximale Ablenkung $z = 7{,}6$ cm.

Einen weiteren Beweis für den Umfang der Verwerthbarkeit der Methode liefert die folgende Anwendung auf die Bestimmung der Wärmeleitung.

Als Vorzug der Methode mag noch erwähnt werden, dass sie meist eine Bestimmung in wenigen Stunden auszuführen gestattet und eine Analyse überflüssig macht. Ich hoffe daher, dass sie für weitere Untersuchungen der Diffusion insbesondere für die Zwecke der physikalischen Chemie ein brauchbares Werkzeug sein wird.

§ 13. Bestimmung der Wärmeleitung des Wassers durch Diffusionscurven.

Die Aenderung des Brechungsexponenten des Wassers um etwa 0,0001 bei Aenderung seiner Temperatur um 1° C. genügt, um die beschriebene Diffusionsmethode zur Bestimmung der Wärmeleitung des Wassers verwendbar zu machen.

Die Diffusion der Wärme befolgt ja das gleiche Gesetz wie diejenige der Materie.

Will man die Temperaturen nach den Brechungsexponenten beurtheilen, so setzt man voraus, dass die letzteren sich den ersteren proportional ändern, was nicht genau zutrifft. Berücksichtigt man zunächst diese Abweichung nicht, so findet die Formel (7) p. 140 Anwendung.

Als Diffusionsgefäss diente ein für Plateau'sche Versuche bestimmter Glaskasten von Würfelform mit 20 cm Seite. Durch die grosse Masse des angewandten Wassers wurde der durch Wärmeabgabe nach aussen bedingte Fehler verringert.

Die grösste Schwierigkeit des Versuchs besteht darin das heisse Wasser über das kalte zu schichten, ohne dass zu starke Mischung eintritt. Am besten gelang das folgende Verfahren. Es wurde ein quadratisches Brett, welches den Querschnitt des Gefässes nicht ganz ausfüllte, auf das kalte Wasser gelegt und dann auf die Mitte des Brettes das heisse Wasser vorsichtig aufgegossen. Dasselbe breitete sich nach allen Seiten aus und floss an den Rändern des Brettes auf das kalte Wasser hinab.

Die Anfangstemperaturen des kalten und heissen Wassers betrugen 6,5° und 53,2°, der Abstand des Schirmes von der Mitte des Gefässes 441,3 cm. Als die durch das Eingiessen erzeugten Schwankungen der Diffusionscurve aufgehört hatten, betrug die Maximalablenkung $z_1 = 13,74$ cm, nach Verlauf von 5 Min. $z_2 = 10,85$ cm und nach weiteren 10 Min. $z_3 = 8,19$ cm. Die Temperaturen des kalten und heissen Wassers waren dann an dem Boden und der Oberfläche 7,6° und 49,6°.

Die Combination von z_1 und z_2 ergab in (cm²/sec): $k = 0,0018$, die von z_2 und z_3: $k = 0,0014$, die von z_1 und z_3: $k = 0,0016$. Dieser letztere Mittelwerth bezieht sich auf eine mittlere Temperatur von 29°, wofür die Lorberg'sche Berechnung[1]) der Versuche von Weber ergibt: $k = 0,00158$.

Bei genaueren Versuchen wäre vor allem ein Verfahren zu erstreben, kalte und heisse Flüssigkeit ohne jegliche Mischung übereinanderzuschichten. Die Mangelhaftigkeit des beschriebenen Versuches in dieser Richtung verbietet auch die Anwendung der in § 9 (p. 136) aufgestellten Regel über die

---

1) Vgl. Wüllner, Experimentalphysik 3. p. 325. 4. Aufl. 1885.

Beziehung zwischen der Verschiebung des Punktes maximalen Gefälles und der Aenderung des Diffusionscoefficienten mit der Concentration, also hier mit der Temperatur. Gleichwohl erkennt man aus dem Verlauf[1]) der beistehend wiedergegebenen Wärmediffusionscurven eine mit der Temperatur steigende Wärmeleitung, wie das auch aus den bisherigen Versuchen folgt.

Auf alle Fälle ist dieser Versuch geeignet, den Vorgang der Wärmeleitung auch vor grösserem Publikum zu veranschaulichen, indem der Temperaturverlauf im Innern des Wassers und dessen bereits nach wenigen Minuten deutlich erkennbare Veränderung den Temperaturausgleich in sichtbarer Weise vor Augen führt.

Abbildung des Vorganges der Wärmeleitung in Wasser durch die Aenderung der Wärmediffusionscurven bei fortschreitender Diffusion.

Erklärung: Fig. 17 in $^1/_{12}$ nat. Grösse, vgl. die Erklärung zu Fig. 14—16 p. 134.

$$e_1 = 592{,}6,\quad a = 441{,}3,\quad \delta = 20{,}0 \text{ cm} \qquad \lambda = 656\,\mu\mu \qquad t_2 = t_1 + 5,\quad t_3 = t_1 + 15 \text{ Minuten.}$$

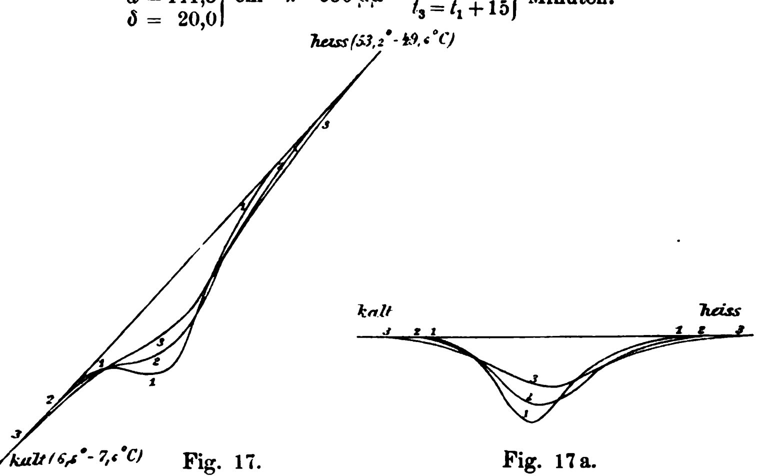


Fig. 17. Fig. 17a.

1) Man achte darauf, dass in Fig. 17a sich links die drei Curven nahezu in demselben Punkt schneiden. Trotzdem in diesem für t_1 eine grössere Aenderung des Temperaturgefälles als in dem gleich hohen Punkte der Curve 1 rechts besteht, ändert sich links die Temperatur mit der Zeit langsamer als rechts. -- Uebrigens dürfte hier die Inconstanz von $\partial n / \partial \tau$, das die Rolle von $\partial n / \partial u$ bei den Diffusionsversuchen spielt, einen grösseren Einfluss haben. Vgl. Anm. 1 p. 136.

§ 14. **Schluss und Zusammenfassung.**

Hier finde nur noch kurz ein Versuch Erwähnung, bei dem ich die durch Electrolyse in der Nähe der Electroden eintretende Concentrationsänderung durch die Strahlenbrechung verfolgte. Vielleicht lassen sich die obigen Methoden zur Bestimmung der Ueberführungszahlen der Ionen benutzen.

Eingangs vorliegender Abhandlung wurde ein geschichtlicher Ueberblick von theilweise wenig bekannten Untersuchungen über gekrümmte Lichtstrahlen gegeben, unter denen die interessante Broschüre A. Schmidt's „Die Strahlenbrechung auf der Sonne", p. 111, den Anlass zu den mitgetheilten Verruchen gab.

Dieselben bezweckten zunächst stark gekrümmte Bahnen eines Lichtstrahles zu erzeugen und sichtbar zu machen. Man erreicht dies, indem man ein schmales Lichtbündel in die Diffusionsschicht von Schwefelkohlenstoff und fluorescirendem Alkohol sendet (Fig. 3 u. 4, p. 116).

Es zeigt sich also, dass ein Lichtstrahl bei Hindurchtreten durch ein Diffusionsgefäss mit planparallelen Wänden beträchtliche Ablenkungen erfahren kann. Diese Ablenkungen wurden benutzt zur Untersuchung und Constantenbestimmung von Diffusion und Wärmeleitung und dabei vorerst mehr eine Uebersicht über die Erscheinungen und die verschiedenen Möglichkeiten für eine optische Diffusionsmethode als Genauigkeit erstrebt.

Projicirt man einen unter 45° gegen die Horizontale geneigten lichtgebenden Spalt mit Linse von kurzer Brennweite durch ein in grösserer Entfernung aufgestelltes Diffusionsgefäss mit planparallelen Wänden auf einen Schirm (Fig. 11, p. 120), so erscheint das Spaltbild zu einer Curve verzerrt, der *Diffusionscurve. Die verticalen Abstände ihrer Punkte von dem unabgelenkten Spaltbild sind dem Concentrationsgefälle in den zugehörigen Punkten des Diffusionsgefässes proportional* (Formel 2, p. 122) bis auf eine kleine Correction. Die Diffusionscurve bildet so den ganzen Concentrationsverlauf im Diffusionsgefäss ab.

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Curve verändert, lässt die Constante der Diffusion berechnen.

Insbesondere empfiehlt sich als einfache und grösserer Genauigkeit fähige Methode die Bestimmung der Diffusionsconstanten aus zwei Maximalabweichungen der Diffusionscurve vom unabgelenkten Spaltbild für zwei Zeiten von zu messendem Zeitunterschied, aus den Brechungsexponenten der unvermischten Diffusionsflüssigkeiten und einigen Längengrössen (Formel 7, p. 140). Hängt die Diffusionsgeschwindigkeit in hohem Maasse von der Concentration ab, so sind als Diffusionsflüssigkeiten solche mit geringem Concentrationsunterschied zu wählen.

Die Diffusionscurve breitet sich nach der Seite rascher aus, nach welcher hin die raschere Diffusion erfolgt, während gleichzeitig ihr Punkt maximaler Ablenkung sich in Richtung kleinerer Diffusionsgeschwindigkeiten verschiebt (Fig. 14—16, p. 134 u. 135).

So bildet sich der ganze Diffusionsvorgang in der allmählichen Veränderung der Diffusionscurven auf dem Schirm naturgetreu ab.

Aachen, Phys. Inst. d. techn. Hochschule, 5. April 1893.

6. *Absolute Messungen über das Ausströmen der Electricität aus Spitzen; von Julius Precht.*

(Mitgetheilt aus dem physikalischen Institut der Universität Bonn.)

(Hierzu Taf. I, Fig. 7—15.)

Wenngleich das allgemeine Verhalten der Electricität gegen Spitzen seit langem bekannt ist, so hat man doch von der *Grösse* der Spitzenwirkung bisher nur sehr unvollkommene Vorstellungen gewonnen, obschon erwartet werden darf, dass absolute Messungen über diesen Gegenstand für die *Theorie der Blitzableiter* nicht ohne Bedeutung sein werden.

Naturgemäss bieten sich hier der Untersuchung verschiedene Fragen dar. Einmal kann es sich darum handeln, die Spannung zu bestimmen, bei welcher das Ausströmen der Electricität aus Spitzen *beginnt*. Ferner ist zu untersuchen, bei welcher Spannung ein schon vorhandenes Ausströmen *aufhört*; und endlich sind Messungen der ausströmenden Electricitätsmengen und der Beziehung zwischen diesen und den herrschenden Potentialen auszuführen. Von den hier gestellten Aufgaben behandelt die vorliegende Arbeit [1]) insbesondere die erste; doch ist auch eine Anzahl von Messungen mitgetheilt, die sich auf die übrigen Fragen beziehen und diese wenigstens theilweise erledigen.

I. Das Anfangspotential.

Dass die entladende Wirkung der Spitzen gewöhnlich überschätzt wird, hat schon Dvořák [2]) auf Grund einer beiläufigen Beobachtung hervorgehoben. Eine sehr feine Nadelspitze, die selbst bei zweihundertfacher Vergrösserung fast ganz scharf erschien, konnte einem geladenen Electroskop bis auf $^1/_{20}$ mm genähert werden, ohne dasselbe zu entladen.

Als ein interessantes Ergebniss meiner Versuche will ich

---

1) Die Arbeit ist die Bearbeitung einer Inauguraldissertation. Ein Theil derselben bildete die Lösung einer von der philosophischen Facultät der Universität Bonn gestellten Preisfrage.

2) Dvořák, Wied. Ann. **19**. p. 323. 1883.

schon hier hervorheben, dass die schärfste der bisher untersuchten Spitzen (ein unter dem Mikroskop geätzter Silberdraht von 0,05 mm Durchmesser) bis zu einem Potential von rund 2500 Volt geladen werden konnte, bevor Ausströmen eintrat. Für eine gewöhnliche Blitzableiterspitze begann das Ausströmen der Electricität erst bei einem Potential von 15 000 Volt.

Versuchsmethode.

Ausser einer Methode zur bequemen und sicheren Potentialmessung in einem grossen Bereich musste eine Anordnung gefunden werden, die den Beginn des Ausströmens der Electricität aus der zu untersuchenden Spitze mit Sicherheit erkennen lässt. Unter den mannigfachen Vorrichtungen, die für diesen Zweck verwendbar schienen, wurde folgende im Princip hier zu skizzirende electroskopische als die bequemste ausgewählt. Ihre Brauchbarkeit hat sich später durch Vergleichung mit mehreren anderen Methoden gut bewährt.

Ein Leiter *a* (vgl. Taf. I, Fig. 7), der an einem Ende die Spitze trug, war am anderen mit einem Electroskop versehen und wurde mit dem letzteren in eine leitende Hohlkugel *K* isolirt eingeführt. Irgend ein Punkt von *a*, z. B. 1, stand ausserdem durch den sehr grossen Widerstand *W* mit der Kugel in directer leitender Verbindung bei 2. Wird *K* durch eine Electricitätsquelle geladen, so hat bei langsamer Zufuhr der Electricität der Punkt 1 immer dasselbe Potential wie der Punkt 2. Wenn infolge Ausströmens aus der Spitze die Spannung von *a* plötzlich erniedrigt wird, so vermag über *W* die Electricität nicht schnell genug nachzufliessen, um den Verlust auszugleichen, und die entstehende Potentialdifferenz reicht hin, einen Ausschlag des Electroskops zu veranlassen.

Bevor ich auf die praktische Ausführung eingehe, will ich über die Methode der Potentialmessung einiges vorausschicken. Es wurden eine Reihe von Vorversuchen angestellt. Electroskope mit schweren Stanniolblättern erwiesen sich als zu empfindlich. Auf die weitere Umgestaltung eines abgeänderten Righi'schen Electrometers [1]), dass für hohe Potentiale mehrfach mit Vortheil benutzt worden ist, wurde darum verzichtet,

1) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 569. 1883.

weil es nicht möglich war, das angestrebte Ziel, Vermeidung der Spiegelablesung, zu erreichen. Auch lässt dieses Instrument, wenn es in einem grossen Intervall brauchbar sein soll, immerhin nur eine mässige Genauigkeit zu. Aus diesen Gründen sind die Messungen mit einem gewöhnlichen Quadrantelectrometer ausgeführt, dessen eines Quadrantenpaar mit einer Metallscheibe in Verbindung stand, die durch Influenz von einer in variablem Abstande aufstellbaren Kugel geladen werden konnte. Das Potential dieser Kugel war mit dem zu messenden identisch.

Nach dem Bisherigen wird die gewählte Versuchsanordnung aus der schematischen Figur 8 leicht ersichtlich sein. Die Leidener Flasche *L* kann durch eine Influenzmaschine von *d* aus über *R* geladen werden. Sie trägt die messingne Hohlkugel *K*, in die durch Siegellack isolirt ein starker Messingdraht *a* eingefügt ist. Dieser, an seinem oberen Ende mit einer Hülse zum Einsetzen von Spitzen versehen, bildet am unteren Ende in der Hohlkugel den Träger eines kleinen Aluminiumblattelectroskops. *W* ist der oben erwähnte Widerstand (Fig. 7), und *R* ist ebenfalls ein Widerstand, der den Zweck hat, die Ladung der Flasche von der Maschine aus hinreichend langsam zu gestalten. Der die Spitze tragende Draht hat bei 1 einen seitlichen, in eine leichte Messingkugel endigenden Ansatz, welcher dem Quadrantelectrometer *E* und zwar der in der Figur sichtbaren, mit dem einen Quadrantenpaar verbundenen Metallscheibe gegenübersteht. Durch Aenderung des Abstandes von Scheibe und Kugel liess sich die Empfindlichkeit des Electrometers auf die einfachste Weise in sehr weiten Grenzen variiren. Zwei grosse Zinkcylinder, α und β, dienen dazu, das Electrometer vor der Einwirkung anderer Ladungen als der zu messenden nach Möglichkeit zu schützen. Aus demselben Grunde und um die Umgebung der zu untersuchenden Spitze möglichst unverändert zu erhalten, wurde die Influenzmaschine (eine kleine, durch einen Wassermotor betriebene Voss-Maschine von 26 cm Scheibendurchmesser) in 3 m Abstand von der Leidener Flasche aufgestellt. Ein grosser, an zwei langen Seidenfäden aufgehängter Messingconductor *d* besorgte von dort aus die Verbindung mit der Flasche.

Die Herstellung geeigneter Widerstände *R* und *W* bot

ziemlich bedeutende Schwierigkeiten. *W* muss so abgeglichen sein, dass das Electroskop in Ruhe bleibt bis zum Beginn des Ausströmens, und *R* muss hinreichend gross gewählt werden, damit der Ausschlag des Electrometers langsam und stetig wächst. Ohne die vielen vergeblichen Versuche zu erwähnen, beschränke ich mich darauf, die endgültige Form der benutzten Widerstände kurz zu beschreiben. *W* bestand aus einem in ein gebogenes Glasrohr eingezogenen Baumwollband. Nachdem das Band durch Anhauchen den richtigen Feuchtigkeitsgehalt bekommen, wurde das Glasrohr vollständig verschlossen, sodass an beiden Enden nur noch kurze Kupferdrähte, an denen das Band befestigt war, herausragten. Diese Drähte dienten zur Herstellung der leitenden Verbindung an den Punkten 1 und 2. Der Widerstand, der übrigens in Wirklichkeit sich in einer zur Ebene der Zeichnung senkrechten Ebene befand, blieb für die ganze Dauer der Versuche brauchbar.

Für den Widerstand *R* erwies sich Glas als ein sehr zweckmässiges Material. Ueber den langen Messingconductor *d* wurden zwei weite Glasröhren geschoben, die aussen bis auf ihre mit Stanniol belegten Enden ganz mit Schellack überzogen waren.

Die Beobachtung von Electrometer und Electroskop geschah durch Fernrohre, deren Oculare dicht nebeneinander standen. Der Abstand der Scala vom Spiegel des Electrometers betrug 1,7 m. Eine horizontale Durchbohrung der Hohlkugel *K* machte die Beobachtung des Electroskops möglich. Die Oeffnungen wurden von innen mit feinem Drahtnetz verschlossen. Hier wie bei der ganzen übrigen Zusammenstellung der Apparate musste darauf Bedacht genommen werden, alle scharfen Kanten und Spitzen sorgfältig zu vermeiden, was ja durch die Natur der Versuche von vornherein geboten erschien. Die eine Electrode der Maschine, die äussere Belegung der Leidener Flasche, die beiden Zinkcylinder α und β und das eine Quadrantenpaar des Electrometers waren beständig gemeinsam zur Erde abgeleitet. Innere Flaschenbelegung und das mit der Scheibe verbundene Quadrantenpaar konnten vom Sitze des Beobachters aus ad libitum abgeleitet oder isolirt werden.

Der Verlauf eines Versuches ist folgender:

Nachdem alles zur Erde abgeleitet und die Maschine durch den Motor in gleichmässige Rotation versetzt ist, wird erst die Erdverbindung des Electrometers, dann die der inneren Belegung der Flasche aufgehoben. Das Electrometer beginnt langsam und gleichmässig aus der Ruhelage auszuweichen. Das Electroskop verharrt zunächst in Ruhe. Sobald es ausschlägt, beobachtet man den Stand des Electrometers. Die Wiederherstellung der Erdverbindungen und das Abstellen des Motors beendigen den Versuch.

Zur Reduction der Electrometerangaben auf absolutes Maass wurde der eine Pol einer Wasserbatterie von dreihundert Kupferzinkelementen bei Ableitung des anderen Pols mit der der Scheibe des Electrometers gegenüberstehenden Kugel verbunden. Je nach der Entfernung der Kugel von der Scheibe variirte der Ausschlag des Electrometers zwischen 4 und 10 Scalentheilen, von welchen der zehnte Theil noch sicher zu beobachten war. Die Hälfte dieses Ausschlages entsprach der Potentialdifferenz der Batteriepole, die wiederholt bestimmt wurde und im Mittel 250 Volt betrug. Diese Bestimmung geschah durch Vergleichung der Elemente in Gruppen von je zweien mit einem Normaldaniell[1]), später mit Normalclarkelementen.

Fehlerquellen und Controllmethoden.

Die Ausschläge des Electrometers waren dem Potential proportional, wie durch directe Verbindung des einen Quadrantenpaares mit Daniellelementen bis zum grössten beobachtbaren Ausschlag nachgewiesen wurde. Obgleich kaum ein Zweifel aufkommen kann, dass für die aus der Entfernung wirkende Kraft, Influenz der Kugel auf die Scheibe, dieselbe Beziehung besteht, wurden doch die Angaben des Electrometers durch Funkenpotentiale verglichen. Nachdem der Widerstand W durch einen dicken Kupferbügel kurz geschlossen war, wurde das sonst die Spitze tragende Ende des Drahtes a mit der einen Kugel eines Funkenmikrometers verbunden, dessen andere Kugel zur Erde abgeleitet war. Der

1) Wiedemann u. Ebert, Physik. Praktikum, Braunschweig 1890. p. 860.

Durchmesser der Kugeln betrug 20 mm. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Columne die Funkenlängen, in der zweiten die diesen entsprechenden Potentiale in absoluten electrostatischen Einheiten, nach der beschriebenen Methode mit Electrometer und Wasserbatterie bestimmt, und die folgenden Columnen geben die Funkenpotentiale anderer Beobachter.

Tabelle I.

Funkenlänge	C. G. S. electrost.	Baille [1])	Quincke [2])	Freyberg [3])
0,2 mm	4,50	4,70		
0,4 „	7,59	7,52		
0,6 „	10,39	9,97		
0,8 „	12,55	12,45		
1,0 „	14,95	14,68	14,8	15,2
1,2 „	17,17	16,87		
1,4 „	19,59	19,03		
1,6 „	21,64	21,22		
1,8 „	23,84	23,43		
2,0 „	25,46	25,51		

Die Uebereinstimmung in den Resultaten ist eine so gute zu nennen, als sie nach den Abweichungen in den Funkenpotentialbestimmungen verschiedener Beobachter nur zu erwarten war. Daher kann die Brauchbarkeit der benutzten Messmethode wohl als erwiesen betrachtet werden.

Um den Nachweis zu führen, dass der Ausschlag des Electroskops in der That den Beginn des Ausströmens von Electricität aus der zu untersuchenden Spitze anzeigt, sind eine Reihe von Versuchen angestellt: Messungen mit der gleichen Spitze zu verschiedenen Zeiten ausgeführt, ergeben gleichartige Resultate; bei stumpfen Spitzen erfolgt der Ausschlag des Electroskops später als bei scharfen; wird statt der Spitze eine Kugel aufgesetzt, so erhält man keinen Ausschlag, auch wenn die Spannung bis über die Grenzen der Messbarkeit mit dem Electrometer steigt; bei im übrigen gleichen Versuchsbedingungen ist die Zeit bis zum Ausschlag des Electroskops annähernd gleich der Zeit, nach der im Dunkeln das

1) **Baille**, Ann. de Chim. et de Phys. **29.** p. 181. 1883.
2) **Quincke**, Wied. Ann. **19.** p. 569. 1883.
3) **Freyberg**, Wied. Ann. **38.** p. 254. 1889.

Aufleuchten des an der Spitze entstehenden Büschels wahrgenommen wird. Aendert man diese Zeitdauer, vom Beginn der Ladung an gerechnet, indem man die Zufuhr der Electricität beschleunigt oder verlangsamt, so findet sich bei Anwendung derselben Spitze die Spannung immer von gleicher Grössenordnung. Die Aenderung der Zufuhr geschah durch eine an der einen Maschinenelectrode befestigte Spitze, welche der anderen Electrode mehr oder weniger genähert werden konnte, sodass über diese Entladungsstrecke ein grösserer oder geringerer Theil der erzeugten Electricität direct zur Erde abgeleitet wurde. Naturgemäss sind bei sehr schneller Ladung die Beobachtungsfehler an der Electrometerscala beträchtlich, während bei sehr langsamer Ladung die Bewegung des Electroskops weniger leicht zu erkennen ist. Denn obschon sich immer ein bestimmter Zeitpunkt angeben lässt, indem das Aluminiumblättchen zu divergiren anfängt, so erfolgt doch die Bewegung streng genommen nicht in der Art, dass sofort ein grosser Ausschlag eintritt; sie beginnt vielmehr langsam, um dann erst plötzlich schnell zu wachsen.

Aus den mitgetheilten Versuchen lässt sich mit Sicherheit der Schluss ziehen, dass das Electroskop das Ausströmen von Electricität aus Spitzen, die auf den Draht a aufgesetzt sind, anzeigt; nur wäre noch die Frage aufzuwerfen, ob seine Bewegung auch wirklich den *Beginn* des Ausströmens bezeichnet. Das Entstehen eines Ausschlages ist dadurch bedingt, dass die Spannung im Punkte 1 (vgl. Taf. I, Fig. 8) um einen gewissen endlichen Werth unter die Spannung im Punkte 2 sinkt. Wenn nun das Ausströmen sehr langsam und mit geringer Intensität beginnt — besonders bei sehr scharfen Spitzen ist das wahrscheinlich —, sodass die zwischen 1 und 2 hervorgerufene Potentialdifferenz unter diesem Werthe bleibt, so erfolgt kein Ausschlag, das Ausströmen bleibt unbemerkt. Es war also nothwendig, die Empfindlichkeit des Electroskops festzustellen. Zu dem Zwecke wurden die Stellen 1 und 2 mit einer kleinen Batterie von Kupferzinkelementen verbunden. Das Electroskop reagirt dann auf einen plötzlichen Wechsel der Pole, und die Anzahl der Elemente wurde solange vermindert, bis der Polwechsel noch eben einen wahrnehmbaren Ausschlag des Electroskops veranlasste. Auf diese Weise fand sich, dass

Aenderungen der Spannung, die weniger als 17 Volt betragen, am Electroskop nicht bemerkt werden können. Um mindestens diesen Betrag muss demnach die Spannung im Punkte 1 durch das Ausströmen erniedrigt werden, damit es constatirt werden kann. Nun ist sehr wohl möglich, und nach den Versuchen besonders bei scharfen Spitzen wahrscheinlich, dass das erste Ausströmen eine viel weniger grosse Spannungserniedrigung zur Folge hat. In diesem Falle würde es unbemerkt bleiben, und darin besteht der Mangel der Methode.

Daher sind ausser der electroskopischen noch mehrere andere Methoden, den Beginn des Ausströmens zu markiren, untersucht und mit dieser verglichen. Die im Princip einfachste Controlle besteht darin, dass man im Dunkeln das Aufleuchten des Büschels an der Spitze beobachtet. Da sich herausstellte, dass das Auffinden des Büschels mit dem Fernrohr im Dunkeln schwierig war, so wurden die Versuche in der Weise ausgeführt, dass ein Beobachter in nächster Nähe der Spitze das Auftreten des Büschels constatirte, während ein anderer in diesem Augenblick das Electrometer ablas, nachdem er zuvor die Scala desselben plötzlich beleuchtet hatte. Der letztere konnte dann auch noch das gleichzeitig beleuchtete Electroskop beobachten. Hr. Dr. Lenard hatte die Freundlichkeit, die Beobachtung von Electrometerscala und Electroskop zu übernehmen.[1]) Die plötzliche Beleuchtung geschah durch Glühlampen. Es ergab sich, däss der Büschel stets etwas eher auftrat als der Ausschlag des Electroskops; dieses befand sich noch in Ruhe, begann aber alsbald seine Bewegung. Der Unterschied war nicht so gross, dass die Stellung des Electrometers in der Zwischenzeit sich sehr merklich verändert hätte. Die Uebereinstimmung im wesentlichen bestätigt also die Brauchbarkeit des Electroskops, abgesehen davon, dass seine Anwendung frei ist von den vielen handgreiflichen Uebelständen, welche die Beobachtung des Büschels mit sich bringt.

Zum Theil ähnliche Mängel haften auch der folgenden Methode an, die indessen zu einigen sehr interessanten Be-

---

1) Auch an dieser Stelle möchte ich Hrn. Dr. Lenard für die stets bereitwillige Unterstützung meiner Versuche meinen Dank aussprechen.

obachtungen führte. Es ist bekannt, dass ausströmende Electricität in einem Dampfstrahl zur Bildung von Condensationskernen Anlass gibt, die sich durch ein Dichterwerden des Strahles und eine Aenderung seiner Farbe sehr deutlich bemerkbar macht.[1]) Die Reaction ist mit Vortheil für den vorliegenden Zweck zu verwenden. Der Dampfstrahl entströmte einem Glasrohr, das 10 cm über der Spitze und etwa 3 cm seitlich davon endete. Um jeden Einfluss von Flammengasen auf den Strahl und die Spitze auszuschliessen, wurde der Dampfkessel ausserhalb des Zimmers aufgestellt. Für eine stumpfe Spitze ergaben die Versuche völlige Uebereinstimmung zwischen der Dampfstrahlreaction und dem beginnenden Electroskopausschlag. Bei sehr scharfen Spitzen fand sich die interessante Erscheinung, dass der dauernden Aenderung des Dampfstrahles, welcher der Ausschlag des Electroskops sehr kurz nachfolgte, eine Anzahl momentaner Reactionen im Strahl voraufgingen. Vor dem beständigen Ausströmen der Electricität erfolgte also eine Reihe kleiner stossweiser Entladungen. In einem besonderen Falle wurde festgestellt, dass das erste momentane Auftreten der Reaction bei einer Spannung von 2400 Volt, die dauernde Veränderung des Strahles dagegen bei 3700 Volt Spannung eintrat.

Unter *Entladungs-* oder *Anfangspotential* soll im Folgenden immer die Spannung verstanden werden, welche den Beginn des *continuirlichen* Ausströmens bezeichnet.

Obgleich auch das Electroskop bei *sehr scharfen* Spitzen durch kleine Zuckungen die Stösse anzeigt, so erscheint doch diese Definition durch die Thatsachen allein gerechtfertigt, denn bei stumpfen Spitzen waren Schwankungen infolge stossweisen Ausströmens nicht zu bemerken. — Im übrigen liefert die allgemeine Uebereinstimmung der Dampfstrahlreaction mit dem Electroskopausschlag eine weitere gute Bestätigung der Methode. Die Nachtheile der Anwendung des Dampfstrahles, Aenderung der Zimmerluft und Anwesenheit eines Leiters in der Nachbarschaft der Spitze entscheiden zu Gunsten des Electroskops; denn sucht man sie zu vermeiden, so ist immer das Electroskop empfindlicher.

1) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32. p. 1. 1887.

Eine andere Methode ist durch Benutzung des Rückstosses gegeben, der ein electrisches Flugrädchen bewegt. Statt des Rädchens diente ein kleiner, aus Aluminium hergestellter Wagebalken, der auf der einen Seite eine aufwärts gerichtete Spitze trug. Der Balken wurde auf einer, 1 mm breiten, am Ende des Drahtes *a* befestigten Schneide gut äquilibrirt. Beim Ausströmen von Electricität bewegt sich die Seite mit der Spitze abwärts. Ein Vergleich dieser Reactionswaage mit dem Electroskop ergab, dass die Waage nur wenig empfindlicher war. Auch hier wurden vor dem eigentlichen Ausströmen kleine Schwankungen der Waage beobachtet, die mit geringen Bewegungen des Electroskops gleichzeitig waren.

Endlich ist auch ein Galvanometer zur Controlle des Electroskops gebraucht. Der Draht *a* (Fig. 8), der sonst die Spitzen trug, wurde verlängert und mit der einen Klemme eines durch Siegellackstützen völlig isolirten Galvanometers verbunden. Die andere Klemme wurde mit einem langen, vertical nach oben gerichteten Draht versehen, der in die Spitze frei endigte. Das benutzte Galvanometer war ein du Bois-Reymond'sches Instrument mit 12000 Windungen, für directe Ablesung eingerichtet. Es zeigte sich, dass bei dieser Versuchsanordnung das Galvanometer sehr nahezu die gleiche Empfindlichkeit hatte, wie das Electroskop.

Die gute Uebereinstimmung der verschiedenartigen Methoden beweist, dass der Ausschlag des Electroskops in der That als Kriterium für den Beginn des Ausströmens gelten kann. Zugleich führte die Untersuchung zu dem interessanten Ergebniss, dass dem andauernden Ausströmen besonders bei scharfen Spitzen kleine stossweise Entladungen vorhergehen. Als Entladungspotential wurde die Spannung definirt, die dem Anfang des andauernden Ausströmens entspricht.

Die meisten der im Folgenden zu beschreibenden Versuche sind nach der electroskopischen Methode angestellt.

Resultate.

1. Der Werth des Entladungspotentials ist nicht unabhängig davon, ob kurz zuvor ein Ausströmen von Electricität aus der Spitze stattgefunden hat oder nicht. Zum Beispiel zeigte sich in einer Reihe von 25 sehr schnell hintereinander

ausgeführten Beobachtungen mit negativer Ladung ein beständiges Anwachsen der Spannung bis zur achtzehnten Beobachtung. Diese übertraf die erste um fast 25 Proc. Von da ab blieben die Ausschläge des Electrometers merklich constant. Die Erscheinung hat ihre Ursache zum Theil in der Aenderung der Spitzenoberfläche durch die Entladung, zum Theil in einer Ladung ihrer Umgebung. Der letztere Einfluss liess sich durch eine Pause zwischen den aufeinanderfolgenden Versuchen vermeiden; 3 Minuten waren ausreichend. Alsdann wichen Beobachtungen mit Ladungen von gleichem Zeichen noch in einem Intervall von höchstens drei Scalentheilen untereinander ab. Meist wurden abwechselnd Versuche mit positver und negativer Ladung angestellt. Jeder angegebene Potentialwerth ist das Mittel aus wenigstens vier Beobachtungen.

2. Staub erschwert eigenthümlicherweise das Ausströmen von Electricität. In stark stauberfüllter Luft wurde die Spannung in einem speciellen Falle um 10 Proc. höher gefunden als in staubfreier. Dieser Versuch beweist erstens, dass der Staub schwerlich als die Ursache des Ausströmens angesehen werden kann, zweitens dass, obgleich Staubtheile an der Spitze das Potential wohl ändern können, sie es doch keineswegs der Grössenordnung nach bestimmen. Derselbe Schluss muss schon aus den gleichartigen Resultaten gezogen werden, die man bei der Untersuchung der gleichen Spitze zu verschiedenen Zeiten erhält. Ob der Einfluss des Staubes darin besteht, die electrisirte Spitze, von der er ja angezogen wird, dicht zu bedecken und dadurch gleichsam abzustumpfen, oder ob sich eine Wolke gleichnamig geladener Staubtheilchen über der Spitze bildet, blieb unentschieden. (Es scheint nicht überflüssig, zu erwähnen, dass Theilchen von der Grösse der Staubkörnchen von geladenen Oberflächen im allgemeinen nicht fortfliegen, sondern haften.)

3. Flammengase in der Umgebung der Spitze erhöhen das Entladungspotential. Ihr Einfluss wurde zuerst beobachtet, als das Electroskop, statt wie gewöhnlich mit einem Spiegel, durch eine in 2 m Abstand aufgestellte Gasflamme beleuchtet wurde. Die Grösse des dabei auftretenden Unterschiedes ergibt sich aus folgender Tabelle. Zwischen dem zweiten und dritten Versuch wurde das Zimmer längere Zeit gelüftet.

Tabelle II.

	positiv	negativ
	Volt	Volt
Tageslicht	4700	3700
Gasflamme	5800	4500
Tageslicht	4800	3800

Da die grosse Differenz zum Theil auch von der Veränderung des Lichtes herrühren konnte, so wurde der Versuch in der Weise variirt, dass die Luft des Arbeitszimmers durch halbstündiges Brennen von vier Gasflammen mit Verbrennungsgasen geschwängert wurde. Nach dem Löschen der Flammen fand sich nun für das Spitzenpotential bei negativer Ladung der Werth 4400 Volt, während er vor Beginn des Versuches zu 3900 Volt bestimmt war. Durch die Anwesenheit der Verbrennungsgase wird also das Ausströmen bedeutend erschwert. Allerdings darf nicht unerwähnt bleiben, dass das Electroskop vor dem endgültigen Ausschlag vom Beginn der Ladung an kleine zuckende Bewegungen machte, die darauf hindeuten, dass bei dieser Beschaffenheit der Umgebung schon ausserordentlich kleine Electricitätsmengen aus der Spitze entladen wurden. Die negative Electricität fand scheinbar gar keinen Widerstand beim Uebergang in die Gase. Bei positiver Ladung ist der Verlauf ganz analog; der weite Ausschlag des Electroskops erfolgt bei höherer Spannung als der normalen. Die kleinen Bewegungen des Blättchens beginnen dagegen nicht sofort, sondern erst nach einiger Zeit, und sie sind seltener. — Dass Flammengase in hervorragendem Maasse die Eigenschaft haben, die Electricität längere Zeit festzuhalten, ist oft bemerkt worden. In obigen Versuchen war die sehr starke Ladung der Luft noch 40 Minuten lang mit dem Exner'schen Electroskop und einer kleinen Flamme nachweisbar.

Aus allem ergab sich die Nothwendigkeit, die Versuche fortan nur bei Tage anzustellen. Da das Tageslicht durch Fensterscheiben einfiel, so war es zugleich vom grössten Theil der ultravioletten Strahlen befreit.

4. Ultraviolettes Licht hat bekanntlich die Eigenschaft,

die Entladung negativer Electricität zu begünstigen.[1]) Dieser Einfluss übte auch auf das Entladungspotential der Electricität aus Spitzen seine Wirkung. Wurde dieselbe Nadelspitze einmal in vollem nicht durch Glasscheiben filtrirtem Sonnenlicht und dann im Dunkeln bei Glühlichtbeleuchtung von Scala und Elektroskop untersucht, so fand sich die Spannung

bei Sonnenlicht	+ 5380 Volt	– 3680 Volt
im Dunkeln	+ 5330 Volt	– 3860 Volt.

Man erkennt deutlich das leichtere Ausströmen der negativen Electricität unter dem Einflusse des ultravioletten Lichtes. Auf das positive Potential ist keine Einwirkung zu bemerken. Da das Licht der übrigens sehr kleinen Glühlampen ja auch durch Glaskugeln hindurch gehen musste, so lässt sich gegen ihre Verwendung kein Einwand erheben. — Die Versuche wurden später in der Weise wiederholt, dass das Licht von Inductionsfunken, die zwischen Zinkspitzen übergingen und daher an ultravioletten Strahlen reich waren, durch eine Quarzlinse auf die zu untersuchende Spitze concentrirt wurde. War letztere eine amalgamirte Zinkspitze[2]), so betrug die Spannungserniedrigung durch Belichtung bei negativer Ladung im Mittel aus vielen Versuchen 800 Volt = 7 Proc., bei Anwendung einer Platinspitze 500 Volt = 5 Proc. Durch Einschaltung einer Glasscheibe zwischen Quarzlinse und Spitze wurde die Wirkung aufgehoben, ein Beweis, dass in der That ein Einfluss der ultravioletten Strahlen vorlag. Verschiedene Erscheinungen lassen schliessen, dass infolge der Belichtung ausserordentlich kleine Electricitätsmengen schon sehr frühzeitig entladen werden. Eine Aenderung der Spannung beim Beginn des Ausströmens positiver Electricität konnte aus den Beobachtungen nicht gefolgert werden.

5. Leitende Flächen in der Umgebung der Spitze erleichtern das Ausströmen, wie zu erwarten war. Die nächsten Leiter unterhalb der Spitze, vor allem der nur 24 cm entfernte obere Rand des Zinkschirmes β (vgl. Fig. 8), beein-

1) H. Hertz, Wied. Ann. **31**. p. 983. 1887.
2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **39**. p. 332. 1890.

flussen den Werth der Spannung nicht; denn er blieb derselbe, wenn ein ähnlicher Leiter in entsprechender Stellung auf der anderen Seite der Flasche angebracht wurde. Der Einfluss von Leitern über der Spitze wurde durch ein horizontal befestigtes, zur Erde abgeleitetes Messingdrahtnetz von 25 qcm Fläche untersucht. Bei kleinem Abstand von der Spitze wird die Entladungsspannung erheblich herabgedrückt; die Verminderung nimmt bei wachsendem Abstand anfangs schnell, später sehr langsam ab. Der Verlauf ist derselbe, wenn in das Drahtnetz sehr viele feine Nähnadeln (75) mit der Spitze nach unten eingesetzt werden. Für letzteren Fall enthält die folgende Tabelle die Resultate:

Tabelle III.

Höhe über d. Sp.	positiv	negativ
	Volt	Volt
5 cm	3600	2800
10 „	4000	3100
15 „	4200	3300
20 „	4400	3500
25 „	4500	3600
∞	5000	3800

Die letzte Zeile bezieht sich auf die für alle folgenden Versuche constante Bedingung, dass die Zimmerdecke der nächste Leiter über der Spitze ist. Ihre Entfernung von der Spitze betrug $3^1/_4$ m.

6. Die Uebereinstimmung von Messungen, die mit der gleichen Spitze zu verschiedenen Zeiten angestellt wurden, ist keine sehr gute zu nennen. Die Beobachtungen derselben Versuchsreihe zeigen untereinander Abweichungen bis zu 4 Proc., während der Unterschied der Resultate verschiedener Versuchsreihen bis zu 8 Proc. des Mittels aus allen Beobachtungen betragen kann. Um ein Beispiel zu geben, führe ich die ungünstigsten Ergebnisse an, die mit derselben Spitze an verschiedenen Tagen erhalten wurden. Die Zusammenstellung lässt erkennen, dass die Differenzen unter Umständen noch beträchtlicher sein können.

Tabelle IV.

	positiv	negativ
Januar 28	4190 Volt	3031 Volt
„ 29	4094 „	3004 „
„ 30	4306 „	3273 „
Februar 2	4517 „	3434 „
„ 4	4348 „	3203 „
Mittel	4300 Volt	3200 „

7. Die Ursache dieser verhältnismässig geringen Genauigkeit liegt nicht in der angewandten Methode, sondern muss wesentlich in der Aenderung der Spitze durch die Versuche gefunden werden, zu der ja mannigfache Ursachen zusammenwirken. Oxydation des Metalls durch chemische Einwirkung der Entladung war an einer längere Zeit zwischen den Electroden benutzten Stahlspitze durch einen dicken Oxydüberzug stark erkennbar. Auch die Veränderlichkeit der Menge des vom Metall adsorbirten und occludirten Gases sowie die *Zerstäubung* des Metalls kann beträchtliche Aenderungen der Entladungsspannung bewirken.

8. Versuche über die Zerstäubung des Metalls führten zu einigen recht interessanten Resultaten. Nachdem an einer Nähnadelspitze anderthalb Stunden lang ein positiver Büschel erzeugt war, zeigte sich das Spitzenpotential um rund 500 Volt grösser als vorher. Die Fig. 9 und 10 wurden durch Zeichnung der Nadel unter dem Mikroskop bei fünfhundertfacher Vergrösserung[1]) vor und nach der Zerstäubung erhalten. Man erkennt deutlich, dass eine starke Veränderung stattgefunden hat; infolge der Entladung ist ein bedeutendes Stück der Spitze fortgegangen; am vergrösserten Bilde gemessen war sie nach dem Versuche um 6 mm kürzer als vorher. Die Verdickung an den Seiten scheint eine Folge der Oxydation zu sein. Oft zeigt die zerstäubte Spitze eine kraterförmige Vertiefung (Fig. 11). Auffällig ist, dass der analoge Versuch mit negativem Büschel die Spitze ganz unverändert lässt; sie ist nur sehr dicht mit Staub bedeckt, liefert aber nach dem Abwischen desselben be fünfhundertfacher Vergrösserung genau die gleiche Zeichnung

1) Die Figuren sind nach den Originalen auf etwa ein Viertel verkleinert, ebenso 11 und 12.

wie vor der Entladung. Die Erhöhung des Entladungspotentials nach der Erzeugung eines positiven Büschels an der Spitze kann zum Theil von einer chemischen Veränderung der Oberfläche herrühren, zum Theil wird sie ihren Grund haben in der *Abstumpfung* der Spitze durch die Zerstäubung. Welcher dieser Factoren mehr dabei betheiligt ist, war nicht zweifellos zu entscheiden. Die kleineren Spitzen und scharfen Kanten der kraterförmigen Vertiefungen sollten ein leichteres Ausströmen nach der Zerstäubung vermuthen lassen. Da in Wirklichkeit das Umgekehrte stattfindet, so wäre daraus auf eine chemische Veränderung der Oberfläche zu schliessen, die der Entladung einen grösseren Widerstand bietet. Andererseits zeigte sich, dass so kleine Spitzen, die gleichsam auf einer grösseren wachsen, das Entladungspotential nicht wesentlich bestimmen (vgl. 10). Die zerstäubten Spitzen wären demnach immer als abgestumpft zu betrachten.

9. Dass aber die Electricität aus stumpfen Spitzen schwerer ausströmt als aus scharfen, ist ein ganz allgemeines Ergebniss der Versuche. In der That wird man nichts anderes erwarten. Demgemäss wird das Entladungspotential von Spitzen, die bei Betrachtung mit dem Mikroskop schärfer erscheinen, kleiner gefunden als bei stumpferen. Sehr schön erläutert das die beigegebene Zeichnung (Fig. 12), welche zwölf der untersuchten Spitzen darstellt, die bei hundertfacher Vergrösserung mit Hülfe der Camera lucida gezeichnet wurden. Oben sind die Potentialwerthe bei positiver Ladung eingetragen. Um die Spitzen kurz zu charakterisiren, erwähne ich, dass Nr. 1 ein unter dem Mikroskop geätzter Silberdraht von 0,05 mm Durchmesser ist; Nr. 2—6 sind Nähnadeln verschiedener Handelsnummern (Nr. 2 aus einer sehr feinen Nadel geätzt), 7 und 8 sind Sattlernadeln, 9—12 endlich die Enden von Stricknadeln. Durch Vergleichung ihrer Zeichnungen kann man eine Reihe von Nadeln mit ziemlicher Sicherheit so ordnen, wie es der Aufeinanderfolge der Entladungspotentiale entspricht, auch wenn die Unterschiede weniger bedeutend sind als in der gegebenen Zusammenstellung. — Ueber das Verhalten sehr scharfer Spitzen möge eine kurze Bemerkung hier Platz finden. Schon oben ist erwähnt, dass das Electroskop nur auf ein Ausströmen reagirt, das eine Spannungserniedrigung von gewisser Grösse

zur Folge hat, und ferner, dass bei ganz feinen Spitzen Zuckungen des Electroskops beobachtet wurden. Es wird von Interesse sein, die untere Grenze der Spannung kennen zu lernen, bei der das Zucken auftrat, denn dieses entspricht ja auch einem Ausströmen. Für eine aus Blattaluminium geschnittene Spitze erfolgte das erste Zucken bei + 1871, — 1065 Volt; der definitive Ausschlag wurde erst bei + 4173, — 2971 Volt beobachtet.

10. Nicht die zufällige Beschaffenheit des letzten Elementes der Spitze bestimmt die Spannung beim Ausströmen — das bewies schon der verhältnissmässig kleine Einfluss von Staub —, sondern ihre ganze Configuration. Besonders deutlich wird das aus der folgenden Tabelle, die das Anfangspotential für Stanniolspitzen verschiedenen Spitzenwinkels enthält. Die Spitzen wurden in der durch Fig. 13 dargestellten Form aus gewöhnlichem Stanniol geschnitten. Zum kleineren Spitzenwinkel gehört das kleinere Potential.

Tabelle V.

Winkel	positiv	negativ	Differenz
90°	8 500 Volt	5 900 Volt	2 600 Volt
75°	7 800 „	5 200 „	2 600 „
60°	6 900 „	4 800 „	2 100 „
45°	5 300 „	3 700 „	1 600 „
30°	4 600 „	3 200 „	1 400 „
15°	4 200 „	3 100 „	1 100 „

Bei fünfhundertfacher Vergrösserung erschienen die Spitzen am äussersten Ende sehr ungleich gezackt.

11. Eine einfache Beziehung zwischen der Gestalt der Spitze und der zum Ausströmen erforderlichen Spannung scheint nach dieser Tabelle nicht zu bestehen. Dass überhaupt für stumpfere Spitzen eine grössere Spannung nöthig ist, als für scharfe, bleibt noch zu erklären.

Die einfachste Annahme, die man machen kann, besteht darin, dass man den zu überwindenden Widerstand als constant voraussetzt, einerlei, ob die Entladung aus einer stumpfen oder scharfen Spitze erfolgt. Es ist dann nothwendig, dass die auf verschiedenen Spitzen angehäuften Electricitätsmengen unmittelbar vor dem Durchbrechen des Dielectricums stets die

gleiche Dichtigkeit haben. Da aber die Dichtigkeit bei gleich hohen Potentialen auf der schärferen Spitze die grössere ist, so folgt, dass bei gleicher Dichtigkeit auf der stumpferen Spitze das grössere Potential herrscht, also ist auch das Entladungspotential für die stumpfere Spitze grösser, es strömt schwerer Electricität aus.

12. Es wurde versucht, unter der Annahme constanter Entladungsdichtigkeit das Potential als Function des Krümmungsradius der Spitze darzustellen und die aufgefundene Beziehung durch das Experiment zu bestätigen. Zu dem Zweck wurde die Spitze mit dem Leiter, auf dem sie sich befindet, als ein gestrecktes Rotationsellipsoid aufgefasst. Für das Potential desselben gibt die Theorie die Beziehnung

$$V = \frac{Q}{2e} \log \frac{a+e}{a-e},$$

worin Q die Electricitätsmenge, a die grosse Halbaxe und e die Excentricität des Ellipsoids bezeichnet.[1]) Führt man die Dichtigkeit ε am Endpunkt der grossen Axe ein, die gegeben ist durch

$$\varepsilon = \frac{Q}{4\pi c^2},$$

wo c die kleine Halbaxe bezeichnet und ferner den Krümmungsradius des Ellipsoids

$$\varrho = \frac{c^2}{a},$$

so wird durch Elimination von Q

$$\varepsilon = V . \frac{\sqrt{a^2 - a\varrho}}{2\pi a\varrho} . \frac{1}{\log \frac{a + \sqrt{a^2 - a\varrho}}{a - \sqrt{a^2 - a\varrho}}}.$$

Da ϱ sehr klein ist, so ist $a\varrho$ gegen a^2 zu vernachlässigen und man erhält nach einigen Umformungen

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{V}{2\pi\varrho . \log \frac{4a}{\varrho}}.$$

Ist nun, wie vorausgesetzt, im Moment der Entladung die Dichtigkeit an der Spitze, also ε, constant, so wird für eine andere Spitze

1) **Neumann**, Das Potential, Leipzig 1887. p. 355.

(2) $$\varepsilon = \frac{V_1}{2\pi\varrho_1 \cdot \log \frac{4 a_1}{\varrho_1}}$$

oder

(3) $$\frac{V}{\varrho \cdot \log \frac{4a}{\varrho}} = \frac{V_1}{\varrho_1 \cdot \log \frac{4 a_1}{\varrho^1}} = \text{const.}$$

Bildet man die Differentialquotienten $dV/d\varrho$ und dV/da, so ergibt sich durch Einsetzen numerischer Werthe für a und ϱ, dass dV/da gegen $dV/d\varrho$ vollständig zu vernachlässigen ist. Somit ist also V nur Function von ϱ, und wir können schreiben

(4) $$\frac{V}{\varrho \cdot \log \frac{\varkappa}{\varrho}} = \frac{V_1}{\varrho_1 \cdot \log \frac{\varkappa}{\varrho_1}} = \text{const.},$$

worin $\varkappa$ eine willkürliche Constante bezeichnet. Die Krümmungsradien konnten aus den Zeichnungen der vergrösserten Spitzen gemessen werden. Die aufgestellte Beziehung (4) fand sich indessen durch die Versuche nicht bestätigt, sei es daher, dass die Spitzen doch nur in roher Annäherung Ellipsoide darstellen, sei es, dass die Annahme gleicher Dichtigkeit überhaupt nicht berechtigt ist.[1])

13. Ein Blick auf die bisher mitgetheilten Beobachtungen zeigt, dass der Werth der Spannung bei negativer Ladung der Spitze stets kleiner gefunden wurde als bei positiver. Dennoch ist dies kein allgemeines Resultat, so sehr es auch mit einer Reihe von Erfahrungen übereinstimmen würde, die man seit Belli und Faraday[2]) über die Artunterschiede der Electricität gemacht hat. Es ergaben sich nämlich an zwei Beobachtungstagen für mehrere stumpfe Spitzen grössere negative Werthe, für eine Spitze gleiche positive und negative. Eine das zweite Mal durchgängig mitgeprüfte, im Vergleich mit den übrigen scharfe Spitze gab stets grösseres positives Potential, sodass

---

1) *Anm.:* Hr. Chattock, der vor kurzem eine Untersuchung über die Entladung zwischen einer Spitze und der Innenfläche einer Kugelschale bei mässiger Luftverdünnung angestellt hat [Phil. Mag. (5) **32.** p. 285. 1891], findet das Product $f \cdot r^{0,8}$ (f = Stärke des electrischen Feldes, r = Krümmungsradius) für ein gewisses Intervall der r constant, doch enthält die gegebene Tabelle auch stark abweichende Werthe.

2) Faraday, Exp. Res. I, § 1520; ferner Series XIII.

der Grund der Abweichungen bisher unaufgeklärt blieb. Bei Anwendung einer Platte über der Spitze war der negative Werth stets kleiner.

Die Frage, ob negative Electricität leichter ausströmt als positive, ist schon mehrfach behandelt, wenn auch nicht in der Form, dass der Beginn der Entladung in Betracht gezogen wurde. Ich gebe unten[1–5]) einige Quellen an, in denen man über diesen Gegenstand etwas findet. Aus der Gesammtheit des Bekannten ergibt sich ein sehr merkwürdiges, wechselndes Verhalten der negativen Electricität, dessen bedingende Umstände nicht aufgeklärt sind. Aus diesem Grunde ist es zwecklos, über seine Ursachen irgend eine Anschauung auszusprechen.

Als ein vorläufiges Ergebniss leitet Hr. Chattock aus seinen Versuchen ab, dass das Verhältniss der electrischen Feldstärke bei positiver zu der bei negativer Ladung mit wachsendem Krümmungsradius abnimmt. In Wirklichkeit scheint auch hier keine einfache Gesetzmässigkeit zu bestehen; denn während aus meiner Tabelle V das Umgekehrte folgen würde, dass nämlich dieses Verhältniss für stumpfere Spitzen wächst, zeigt die folgende Tabelle, in der für eine Reihe von Spitzen die Werthe des Anfangspotentials bei positiver und negativer Ladung zusammengestellt sind, überhaupt kein Fortschreiten der Differenzen in einem bestimmten Sinne.

Die Tabelle VI enthält ausser den Potentialwerthen für die zwölf in Fig. 12 dargestellten Spitzen noch die Angaben für einige Blitzableiterspitzen. (Nr. 13 sogenannte Büschelspitze, 14 und 15 gewöhnliche Ableiterspitzen; 16 ist ein vorn abgerundeter Messingdraht von 4 mm Stärke.) Es ergibt sich, dass erst bei einer Spannung von 15000 Volt das Ausströmen von Electricität aus einem Blitzableiter gewöhnlicher Beschaffenheit beginnt.

Um die Spannung in absoluten electrostatischen Einheiten zu bekommen, sind die gegebenen Zahlen durch 300 zu dividiren.

1) **Röntgen**, Entladungen der Electricität in Isolatoren. Gött. Nachr. 1878. p. 390.

2) **Wesendonck**, Wied. Ann. **30.** p. 1. 1887.

3) **Wesendonck**, Wied. Ann. **39.** p. 577. 1890.

4) v. **Obermayer**, Wien. Ber. (2a) **100.** p. 127. 1891.

5) **Chattock**, l. c.

Tabelle VI.

laufende Nummer	Ladung positiv	Ladung negativ	Differenz
1	3 100 Volt	2 300 Volt	800 Volt
2	3 600 „	2 500 „	1 100 „
3	4 300 „	3 200 „	1 100 „
4	4 800 „	3 400 „	1 400 „
5	5 200 „	4 400 „	800 „
6	5 750 „	4 800 „	950 „
7	7 200 „	5 850 „	1 350 „
8	8 450 „	7 700 „	750 „
9	9 100 „	8 500 „	600 „
10	9 750 „	9 150 „	600 „
11	10 450 „	10 100 „	350 „
12	13 600 „	13 050 „	550 „
13	14 000 „	12 750 „	1 250 „
14	15 250 „	12 500 „	2 750 „
15	17 100 „	14 600 „	2 500 „
16	21 300 „	20 450 „	850 „

14. Ein *Büschel von Spitzen* lässt die Electricität schwerer ausströmen als die einzelne Spitze. Eine Reihe von Nähnadeln derselben Handelssorte, die untereinander eine ziemlich gleichartige Beschaffenheit hatten, wurden zu einem Spitzenbüschel vereinigt und ebenso untersucht wie die einzelnen Spitzen. Je mehr Nadeln man vereinigt, um so höher wird das Potential gefunden.

Tabelle VII.

Anzahl der Nadeln	positiv	negativ
1	4 300 Volt	3 000 Volt
5	4 900 „	3 200 „
10	5 600 „	4 200 „
20	7 600 „	5 700 „

Der in dieser Tabelle für eine Nadel angegebene Werth ist ein Mittelwerth aus Beobachtungen mit beliebigen fünf aus den zwanzig ausgewählten Nadeln. Viele gleiche Spitzen verhalten sich demnach wie eine stumpfere; auch ist die Ursache der Erscheinung offenbar dieselbe, die den Unterschied der Werthe bei stumpfen und scharfen Spitzen bedingt. Die Zahl der Kraftlinien ist bei gleicher Ladung an der einzelnen Spitze grösser als an mehreren. Ist nun zum Durchbrechen der Luft

stets die gleiche Anzahl Kraftlinien pro Flächeneinheit erforderlich, so wird diese Zahl an der einzelnen Spitze früher erreicht werden als an vielen; aus der einzelnen erfolgt daher das Ausströmen beim kleineren Potential.

15. Eine *Schneide* kann man sich aus sehr vielen dicht nebeneinanderstehenden Nadeln zusammengesetzt denken, und es wurde daher erwartet, dass für kürzere und längere Stücke derselben Schneide dieselbe Beziehung gelten würde wie für eine grössere oder kleinere Anzahl gleicher Spitzen. Für verschieden lange, rechteckige Stücke desselben sehr scharf geschliffenen Messers zeigte sich das in der That. Die Schneide stand bei diesen Versuchen horizontal und war nach oben gerichtet.

Tabelle VIII.

Länge der Schneide	positiv	negativ
18 mm	8 700 Volt	6 250 Volt
9 „	8 200 „	5 600 „
4,5 „	7 950 „	4 950 „

Hier ist übrigens die wesentliche Bemerkung zu machen, dass diese Zahlen in Wirklichkeit keinem Ausströmen aus den Schneiden selbst entsprechen. Bei Beobachtung im Dunkeln stellte sich nämlich heraus, dass nur an den oberen scharfen Ecken der Schneiden Büschelbildung eintrat, sodass die Werthe der obigen Tabelle ausser durch die zufällige Verschiedenheit der Ecken nur durch die wachsende Entfernung zwischen den beiden Büscheln bedingt sind. Ein Leuchten an der Schneide ist nie beobachtet worden. Auch bei einem äusserst feinen Präparirmesser vom beiläufigen Potentialwerth + 6400, − 4900 Volt leuchtete stets nur die Spitze. Die Büschel hatten gleiche Gestalt für positive und negative Ladung; ihre Grösse wuchs bei Annäherung der Hand, doch die Schneide blieb dunkel.

16. Verschiedene Gase ändern den Werth der Entladungsspannung in verschiedener Weise. Die Versuche sind so angestellt, dass die Spitze (eine feinere Nähnadel) in einen zur Erde abgeleiteten Messingcylinder, der als Gasbehälter diente, isolirt und gasdicht eingesetzt wurde. Die Gase wurden vor Einführung in den Cylinder durch Schwefelsäure, Chlorcalcium

und Wattefilter von Feuchtigkeit und Staub in gleicher Weise befreit, und die Versuche sind kurz hintereinander ausgeführt, um den Einfluss der Gase unter möglichst gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen zu untersuchen. Ich gebe im Folgenden das Mittel aus zwei zu verschiedenen Zeiten erhaltenen Versuchsreihen; bei der ersten wurde die electroskopische, bei der zweiten die galvanometrische Methode benutzt; beide zeigten gute Uebereinstimmung.

Tabelle IX.

	positiv	negativ
Luft	2 750 Volt	2 050 Volt
H	2 125 „	1 550 „
N	2 600 „	2 000 „
O	2 800 „	2 350 „
CO_2	3 475 „	2 100 „

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Aenderungen in verschiedenen Gasen nicht sehr bedeutend sind und dass die Grösse der Aenderung für positive und negative Electricität verschieden ist. Der Artunterschied bleibt indessen in gleichem Sinne bestehen; denn die negativen Werthe sind in allen Gasen kleiner als die positiven. Auffällig ist die geringe Aenderung der Spannung im Wasserstoff, die in beiden Versuchsreihen zweifellos hervortrat. Diese macht das Aufstellen einer ähnlichen Beziehung, wie sie Hr. Röntgen[1]) angibt, für das Potential, bei dem das Ausströmen in verdünnten Gasen aufhört, hier unmöglich, obschon nach der Leichtigkeit des Ausströmens positiver Electricität geordnet die Reihenfolge der Gase dieselbe ist, wie die der steigenden Dichten oder der abnehmenden molecularen Weglängen. Bemerkenswerth ist die annähernde Uebereinstimmung der Werthe für negative Electricität bei N, CO_2 und Luft, sowie das beträchtliche Anwachsen des positiven Entladungspotentials in CO_2.

17. Eine besondere Einwirkung des Metalles der Spitze, unabhängig von ihren geometrischen Verhältnissen, war nicht zu constatiren. Eine Stahlnadel ergab gleiche Werthe der Spannung beim Ausströmen, auch nachdem sie galvanisch mit

1) Röntgen, l. c. p. 402. R. findet das Product aus dieser Spannung und der mittleren Weglänge der Molecüle für verschiedene Gase constant.

einem Kupferüberzug versehen war. Die Gestalt der Nadel erschien bei fünfhundertfacher Vergrösserung ungeändert. Der Versuch beweist nichts über die absolute Grösse einer zwischen Metall und Gas bestehenden Contactkraft, sondern zeigt nur, dass die Unterschiede in der Grösse derselben bei Anwendung verschiedener Metalle jedenfalls unterhalb der hier möglichen Fehlergrenze liegen.

18. Ueberblicken wir noch einmal im Zusammenhang die Fülle der mitgetheilten Thatsachen, so muss zugegeben werden, dass eine einheitliche Erklärung derselben bei der Complicirtheit der Erscheinungen unmöglich ist. Auch war der Zweck der Arbeit wesentlich die Feststellung der thatsächlichen Verhältnisse, unter denen Electricität aus einer freiendigenden Spitze in gewöhnlicher Luft auszuströmen anfängt.

Die wichtigsten Resultate fasse ich hier kurz zusammen:

Spitzen können im allgemeinen sehr weit geladen werden, bevor Electricität aus ihnen ausströmt. Blitzableiterspitzen bewirken einen ruhigen Ausgleich zwischen electrischen Ladungen in der Atmosphäre und der Erde nur dann, wenn dabei an der Spitze eine Spannung von 15000 Volt erreicht wird. Selbst ausserordentlich scharfe Spitzen lassen sich bis rund 2500 Volt laden, ohne das ein andauerndes Ausströmen stattfindet; doch deuten viele Erscheinungen darauf hin, dass kleine momentane Entladungen schon bei beträchtlich geringerer Spannung erfolgen. Aus stumpfen Spitzen strömt schwerer Electricität aus, als aus scharfen, doch bestimmen sehr kleine Erhebungen an einer Spitze, seien sie metallischer Natur oder durch Staubtheile gebildet, das Potential nicht wesentlich. Staub in grosser Menge und Flammengase in der Umgebung der Spitze erschweren das Ausströmen, Bestrahlung mit ultraviolettem Licht befördert es. Verschiedene Gase ändern die Entladungsspannung für positive und negative Electricität in verschiedener Weise. Ein Büschel von gleichen Spitzen muss höher geladen werden, als die einzelne Spitze desselben, damit Ausströmen eintritt. Man kann Electricität nicht aus scharfen Kanten und Schneiden zum Ausströmen bringen, weil es stets aus den begrenzenden Ecken derselben leichter erfolgt.

II. Das Minimumpotential.

Minimumpotential nennt Hr. Röntgen[1]) die kleinste Spannung, bei der noch eben Ausströmen stattfindet, also das Potential in dem Augenblick, wo die Entladung aus der Spitze aufhört. Ich will es der Kürze halber mit M. P. und analog die Spannung, bei der die Entladung anfängt, mit A. P. (Anfangspotential) bezeichnen, da es sich im Folgenden wesentlich um eine Vergleichung dieser beiden Grössen handelt. Die Versuche ergaben übereinstimmend, dass das Ausströmen erst bei einer Spannung wieder aufhört, die mehr als 1000 Volt kleiner sein kann als die, bei der es anfing.

1. Die einfachste Methode zum Bestimmen des M. P. besteht darin, dass man das Electrometer in dem Augenblick abliest, wo das Electroskopblättchen in seine Ruhelage zurückkehrt. Auf diese Weise wurden zum Beispiel folgende Resultate erhalten:

	A. P.	M. P.
I.	+ 3500 Volt	+ 3150 Volt
	− 2750 „	− 2350 „
II.	+ 5100 „	+ 4325 „
	− 3700 „	− 3100 „
III.	+ 5600 „	+ 4650 „
	− 4200 „	− 3250 „

Das Verfahren hat die Schwierigkeit, dass die Bewegung des Blättchens zum Schluss ausserordentlich langsam wird und darum schwer zu beobachten ist. Es zeigt sich beim Aufhören des Ausströmens in der That genau dasselbe Verhalten, wie beim Beginn. Hier wird erst eine sehr kleine Menge entladen, die später schnell wächst, während dort ein grosser Ausschlag erst schnell, aber endlich sehr langsam abnimmt. Die Uebergänge aus dem statischen Zustand in den des Ausströmens und von diesem zurück in den statischen erfolgen also beide allmählich.

2. Dies zeigt sich auch, wenn man das Leuchten an der Spitze als Index für A. P. und M. P. benutzt. Für das M. P. ergeben sich dabei ganz analoge Resultate, wie bei Beobachtung des Electroskops. Nachdem das A. P. überschritten ist, wird die Zuleitung zur Leidener Flasche unterbrochen und die Ma-

1) Röntgen, l. c. p. 396.

schine abgestellt. Besonders bei negativer Ladung war dann die allmähliche Abnahme des Lichtpunktes an der Spitze sehr gut zu verfolgen. Der positive Büschel erlischt etwas plötzlicher; doch wurde bei stumpfen Spitzen dann noch längere Zeit *Glimmen* beobachtet. Ich gebe ein Beispiel. Nachdem bei einer Blitzableiterspitze das Potential auf 199 Scalentheile gestiegen war, wurde die Verbindung mit der Maschine aufgehoben und die Maschine stillgestellt. Unter steter Büschelentladung fiel die Spannung nach und nach auf 173 Scalentheile, dann kam der grosse Büschel noch einige male in kurzen Zwischenräumen zum Vorschein, und nun zeigte sich die Spitze mit Glimmlicht bedeckt, das erst bei 163 Scalentheilen erlosch, (1 Scalentheil = 80 Volt).

3. Uebrigens ist hervorzuheben, dass bei so starken Ladungen das M. P. sich davon abhängig zeigt, wie weit über das A. P. hinaus man die Ladung fortgesetzt hat, und wie lange Zeit. Je grösser die aus der Spitze entladenen Mengen und je stärker demnach die Ladung der Luft über der Spitze, um so eher hört nach Abschneidung der Electricitätszufuhr die Entladung auf; denn die starke Electrisirung der Luft bleibt eine sehr merkliche Zeit bestehen. So kann ein M. P. gefunden werden, das viel grösser ist, als das zugehörige A. P. Der richtige Werth des M. P., bezogen auf eine ungeladene Umgebung, ist natürlich um das sehr hohe Luftpotential, das oft viele tausend Volt betragen haben muss, kleiner. Constante Werthe für das M. P. sind demnach nur dann zu erhalten, wenn man die Ladung nur bis eben über das A. P. hinaus steigert, oder, wenn bei weiterer Steigerung die entladenen Mengen so klein sind, dass mit dem Aufhören des Ausströmens auch die Luft in der Umgebung der Spitze in ihren früheren Zustand zurückgekehrt ist. Deshalb ist bei den Versuchen die Wirksamkeit der Maschine durch Aenderung der Nebenentladung (vgl. p. 156) stets soweit berabgestimmt, dass nach dem Ueberschreiten des A. P. das Potential sehr bald constant wurde. Dann war die entladene Menge der zugeführten gleich und sehr klein. Wird in diesem Augenblick die Zuleitung von der Maschine unterbrochen, so erhält man für das M. P. gut übereinstimmende Werthe, die immer beträchtlich unter dem A. P. liegen. — Die grosse Constanz

des M. P., die Hr. Röntgen bei Entladung zwischen Spitze und Platte in verdünnten Gasen beobachtet hat, ist nur der dort gewählten Versuchsanordnung zuzuschreiben, wie Hr. Röntgen auch selbst hervorhebt.[1]) Diese (eine scharfe Spitze stand einer Platte von 132 mm Durchmesser in 19,3 mm Abstand gegenüber) machte die Ansammlung irgend welcher Ladungen im Dielectricum unmöglich.

4. Anfangs- und Minimumpotential lassen sich aus den Angaben des Electrometers allein entnehmen, wenn man bei allmählicher Electricitätszufuhr und späterem Unterbrechen derselben die Aenderung des Potentials mit der Zeit verfolgt. Macht man zum Beispiel alle 10 Secunden eine Ablesung, so zeigt sich, dass die Zunahme des Potentials für dieses Intervall *beim Beginn des Ausströmens* plötzlich kleiner wird. Ist das Potential constant geworden, und überlässt man nun nach dem Abschneiden der Zufuhr die geladene Flasche sich selbst, so fällt die Spannung zunächst sehr schnell, bis die Abnahme *nach dem Aufhören des Ausströmens* plötzlich kleiner wird, da sie dann allein von der Zerstreuung an die Umgebung und dem Verluste über die isolirenden Glasflächen herrührt.

Um diesen Verlust möglichst zu vermindern, wurde eine Leidener Flasche aus französischem Krystallglas hergestellt, die so vorzüglich isolirte, dass die Abnahme der Ladung in 10 Secunden nur $^1/_{10}$ Scalentheil betrug. Stellt man den Verlauf des Potentials mit der Zeit in Curven dar, so ergeben sich trotzdem für A. P. und M. P. keine sehr scharf definirten Punkte, ein neuer Beweis für den langsamen Beginn und die allmähliche Abnahme des Ausströmens (vgl. Fig. 14). Indessen ist das A. P. schon aus dem Gang der Beobachtungen mit Sicherheit zu erkennen. Ich gebe zum Beispiel den Anfang einer Versuchsreihe mit Nadel 8 (Fig. 12). (Vgl. Tabelle auf folgender Seite).

Aus der Tabelle geht hervor, dass bei 103,5 Scalentheilen = 8280 Volt das Ausströmen anfing (denn hier fällt die Zunahme des Potentials plötzlich von 8 auf 3,5 Scalentheile), ein Werth, der mit dem früheren gut übereinstimmt. Die zugehörige Potentialcurve (Fig. 14 die obere)[2]) zeigt an derselben Stelle eine

1) Röntgen, l. c. p. 393.

2) Sie umfasst 110 Beobachtungen.

Tabelle X.

Zeit	Spannung in Scalentheilen [1]	Zunahme
Sec. 0	0	
10	33,5	33,5
20	58,5	25,0
30	74,5	16,0
40	85,5	11,0
50	95,5	10,0
60	——➤ 103,5	8,0
70	107,0	3,5
80	110,7	3,7
90	113,7	3,0
100	116,2	2,5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Unterbrechung ihrer Stetigkeit. — Der Punkt *C* der Curve bezeichnet die Spannung im Augenblick, wo die Verbindung der Leidener Flasche mit der Maschine aufgehoben wurde. Von da ab fällt das Potential erst rasch, später sehr langsam. Zur Bestimmung des M. P. verfährt man dann am besten so, dass man die Leidener Flasche an Stelle der Spitze mit einer Kugel versieht und nun die Abnahme des Potentials mit der Zeit beobachtet. Stellt man auch diese Resultate in einer Curve dar und vereinigt sie mit der früheren in der Weise, dass man, vou rückwärts beginnend, die gleichen Ordinaten zusammenfallen lässt und dann die Curve fortstezt, so trennen sich beide Curven an einer bestimmten Stelle, die das M. P. angibt; denn von hier an war der Verlust in beiden Fällen eine Folge der Zerstreuung allein. Da, wie man sieht, beide Curven von ihrer Vereinigung an fast genau *wie eine gerade Linie* verlaufen, so ist die Versuchsreihe mit der Kugel unnöthig. Man braucht nur den geradlinigen Theil der Potentialcurve *für die Spitze* zu verlängern, so gibt der Punkt, in dem die Curve sich von dieser Verlängerung trennt, das Minimumpotential. — Die untere Curve zeigt den Verlauf des Potentials für dieselbe Nadel bei *negativer* Ladung. Ich stelle für Nadel 8 die Resultate hier zusammen.

1) 1 Scalentheil = 80 Volt.

A. P.	M. P.
+ 8280 Volt	+ 6976 Volt
− 7055 „	− 5440 „

5. Es erübrigt noch eine Bemerkung über die Aenderung der Spannung beim Uebergang der Büschel in Glimmen. Hr. Wesendonck[1]) hat aus mehreren Versuchen den Schluss gezogen, „dass die Spannung beim Ersetzen der Büschel durch Glimmen beständig ansteigt“. In den oben angeführten Versuchen (p. 175) wurde dagegen bei abnehmender Spannung erst Büschelentladung, später Glimmen beobachtet. Das Glimmen erlosch erst bei einer um 800 Volt kleineren Spannung, als diejenige war, die dem letzten Aufblitzen eines Büschels entsprach. Demnach ergibt sich das Resultat, dass eine Aenderung der Lichterscheinung an der Spitze nicht nothwendig eine Aenderung der Spannung *in einem bestimmten Sinne* zur Folge hat oder durch sie bedingt wird.

III. Die durch Spitzen entladene Electricitätsmenge und ihre Beziehung zum Potential.

Die Kenntniss der aus Spitzen entladenen Electricitätsmenge in ihrer Beziehung zum Potential bietet das besondere Interesse, dass sie eine wenigstens angenäherte Vorstellung von der Menge gewinnen lässt, die durch einen Blitzableiter zur Entladung gebracht werden kann. Allerdings bedarf die hierbei nöthige Extrapolation aus Ergebnissen von Laboratoriumversuchen auf Verhältnisse, wie sie in der Natur unmittelbar gegeben sind. einer besonderen Rechtfertigung, denn sie ist gerade in diesem Falle oft missbraucht worden.

1. Die gewählte Versuchsanordnung ist im wesentlichen die früher beschriebene mit Benutzung des Galvanometers. Die innere Belegung einer Leidener Flasche wurde mit der einen Klemme eines du Bois-Reymond'schen Multiplicators verbunden, während die andere Klemme einen Draht trug, der in die Spitze endigte. Die gesammte durch die Spitze entladene Electricitätsmenge durchfloss demnach die 12 000 Windungen des Multiplicators und konnte so gemessen werden. Das Instrument war für Spiegelablesung eingerichtet worden

1) Wesendonck, Wied. Ann. **40.** p. 481. 1890.

und konnte vom Sitz des Beobachters gleichzeitig mit dem Electrometer abgelesen werden. Der Multiplicator wurde durch einen Richtmagneten auf passende Empfindlichkeit gebracht und dann mit Hülfe eines Daniellelementes von bekannter electromotorischer Kraft unter Anwendung verschieden grosser Nebenschlusswiderstände nach Ampère graduirt. Die Resultate wurden in einer Curve dargestellt, aus welcher die den abgelesenen Scalentheilen entsprechenden Stromstärken durch graphische Interpolation entnommen sind. Die Ausschläge waren sehr nahe den Stromstärken proportional; 1 Scalentheil entsprach rund $2,7 \times 10^{-9}$ Ampère. Der Widerstand des Galvanometers betrug 2417 Ohm. Durch eine zwischen den Maschinenelectroden angebrachte Nebenentladungsstrecke, aus zwei Spitzen bestehend, die einander mehr oder weniger genähert oder auch ganz entfernt werden konnten, war es möglich, die Ladung der Leidener Flasche auf jedem beliebigen Potential constant zu erhalten. Die Versuche wurden so angestellt, dass durch Aenderung der Nebenentladung die Spannung von sehr kleinen Werthen ausgehend in mässigen Intervallen gesteigert und zu der jeweiligen constanten Electrometereinstellung die zugehörige Stromstärke am Galvanometer abgelesen wurde. Das Anfangspotential, das also der Stromstärke Null entspricht, war durch die beginnende Bewegung der Galvanometernadel sehr scharf definirt. Mit wachsender Spannung steigt die Stärke des Entladungsstromes an; bei höheren Potentialen schwingt die Galvanometernadel, insbesondere bei negativer Ladung, um ihre jedesmalige Ruhelage mit einer Amplitude, die schliesslich 5 Scalentheile beträgt. Ihre Bewegung war viel ruhiger bei positiver Ladung.

2. Von der zwischen Strom und Spannung bestehenden Beziehung lässt sich am leichtesten eine Anschauung gewinnen, wenn man die Stromstärken zu Ordinaten, die zugehörigen Werthe der Spannung zu Abscissen einer Curve macht. Die Tafel Fig. 15 zeigt mehrere solche Curven für verschiedene Spitzen bei positiver Ladung. Alle Curven beginnen auf der Abscissenaxe mit dem Anfangspotential. [1]) Sie haben im wesentlichen den gleichen parabolischen Charakter; die entladene

---

1) Ueber Curve (M) siehe 3.

Menge wächst erst langsamer, später nahezu proportional der Spannung. Bei gleicher Spannung wird aus der schärferen Spitze die grössere Menge entladen; doch scheinen die Unterschiede in der Spitzenbeschaffenheit bei hohen Spannungen allmählich zu verschwinden. Da für negative Ladung im allgemeinen das Anfangspotential kleiner ist, so ist bei gleicher Spannung die entladene Menge negativer Electricität grösser. Die Uebereinstimmung der Resultate verschiedener Versuchsreihen war bei positiver Ladung eine recht gute. Ich gebe zum Beispiel die der gleichen Stromstärke von 100×10^{-9} Ampère entsprechenden Spannungen nach 6 Versuchreihen mit derselben Spitze (Nadel 5, Fig. 12).

	Spannung	Strom
22. Juli	+ 8 275 Volt	100×10^{-9} Amp.
22. „	8 000 „	
23. „	8 200 „	
24. „	8 150 „	
30. „	8 050 „	
2. Aug.	8 450 „	

3. Natürlich kann man auch so verfahren, dass man, von hohen Spannungen beginnend, die Intensität der Entladung allmählich auf Null herabmindert. Man erhält dann ganz analoge Curven, die sich nur in ihrem letzten Theil mehr der Abscissenaxe anschmiegen wegen der zuletzt sehr langsamen Abnahme der ausströmenden Electricitätsmenge (vgl. II, 1 u. 2, p. 174 u. 175). Der Vereinigungspunkt der Curve mit der Abscissenaxe gibt das Minimumpotential. (vgl. Curve [*M*]). Wegen der Ladung der Luft werden auch hier leicht zu hohe Werthe gefunden.

4. Um die Menge schätzen zu können, die aus einem Blitzableiter durch „ruhigen Ausgleich“ entladen wird, ist es nöthig, einige vereinfachende Annahmen zu machen. Die gesammte Ladung einer Gewitterwolke von 1 Quadratkilometer Grösse sei auf dieser als Flächenbelegung vertheilt. Die Wolke bildet mit der Erdoberfläche einen Plattencondensator; daher ist die auf ihr befindliche Electricitätsmenge gegeben durch

$$E = V \cdot \frac{F}{4\pi h},$$

wenn V das Potential, F die Fläche der als eben vorausgesetzten Wolke und h die Dicke der isolirenden Schicht, hier also die Höhe der Wolke über der Erdoberfläche bezeichnet. Für diese Höhe kann man 1000 m als einen wahrscheinlichen Werth annehmen.[1] Das Potential V lässt sich schätzen aus der Länge eines Blitzstrahles zwischen Wolke und Erde, im Minimum 1000 m, wenn man gemäss den Beobachtungen über Funkenpotentiale der Einfachheit halber für je 1 mm Funkenlänge 4000 Volt rechnet. Dann folgt für $V\ ^4/_3 \,.\, 10^7$ C. G. S. electrostat. Drückt man alle Längen in Centimetern aus, so ergibt sich für die Ladung der Gewitterwolke

$$E = \frac{1}{3\pi} \,.\, 10^{12} \text{ C. G. S. electrost,}$$

oder, da die electrostatische Mengeneinheit gleich $^1/_3 \,.\, 10^{-9}$ Coulomb ist

$$E = \frac{1}{9\pi} \,.\, 10^3 \text{ Coulomb.}$$

$$E = 35{,}4 \text{ Coulomb.}$$

Zur Bestimmung der Stärke des Entladungsstromes aus dem Blitzableiter bei einer Spannung, die dem Blitzpotential gleich ist, benutzen wir die für eine Blitzableiterspitze bei Versuchen mit der Influenzmaschine erhaltene Curve, Tafel Fig. 12. Zwar entspricht diese Curve dem Ausströmen gegen einen in $3\,^1/_4$ m Abstand befindlichen Leiter (die Zimmerdecke), doch zeigt der fast genau parallele Verlauf aller Curven, die sich auf sehr stark verschiedene Spitzen beziehen, dass die Zimmerdecke bei den gegebenen Spannungen schon als praktisch unendlich entfernt anzusehen ist. Daher darf die Blitzableitercurve auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden, wo die Spitze einer Wolke in 1000 m Entfernung gegenübersteht. Der Verlauf der Curve ist schon von einer Spannung von 16000 Volt an fast völlig geradlinig. Wir dürfen daher die Annahme machen, dass der Strom von da ab proportional der Spannung wächst. Dann ergibt sich für das Blitzpotential von $4 \,.\, 10^9$

1) 1000 m ist ein Mittelwerth, den ich aus eigenen Beobachtungen an zwei Gewittertagen durch Schätzung der Höhenwinkel von Blitzen und Messung der Zeit zwischen Blitz und Donner gewonnen habe, man vgl. auch Eckholm und Hagström, Meteorol. Zschr. **4.** 73—78. 1889.

Volt eine Stärke des Entladungsstromes von 0,0567 Ampère. Durch die Erfahrungen, die wir über die Stärke der Büschelentladung bei Gewittern haben, wird der Wahrscheinlichkeit eines solchen Werthes mindestens nicht widersprochen.

5. Diese Stromstärke herrscht nur bei der grössten möglichen Spannung; sie nimmt mit abnehmender Spannung bis zu Null ab. Stellen wir die Frage so, dass wir die Zeit bestimmen, in der die Wolke durch einen Blitzableiter entladen werden würde, so können wir daher annehmen, dass während dieser ganzen Zeit eine mittlere Entladungsstromstärke von 0,028 Ampère herrscht. Diese bringt dann in jeder Secunde 0,028 Coulomb zur Entladung, und danach wäre die gesammte Electricität der Wolke in 21 Min. ausgeglichen. Nun ist aber zur Verhinderung des Blitzschlages ja nur nöthig, dass die Spannung um einen ausreichend grossen Betrag unter den zur Funkenbildung erforderlichen Werth erniedrigt wird.

Könnten wir also die Wolke überhaupt mit einem geladenen Conductor vergleichen, so dürfte man sich auf Grund dieser Ergebnisse ernstlich die Frage vorlegen, ob es nicht möglich sein könne, durch Aufstellung einer hinreichend grossen Zahl von Blitzableitern das Entstehen von Gewittern überhaupt zu verhindern.

6. In Wahrheit ist ein solcher Vergleich unmöglich. Vielmehr muss man daraus, dass bei Gewittern die Blitzschläge sich in so kurzer Zeit folgen und oft in grosser Zahl gleichzeitig auftreten, auf die Wirksamkeit ganz ungeheurer Electricität erregender Kräfte in den Wolken schliessen. An derselben Stelle, wo wir soeben einen Blitz bemerkten, zeigt sich oft im nächsten Moment schon ein neuer. Gegenüber dieser gewaltigen Geschwindigkeit in der Wiederbildung neuer Ladungen ist die ausgleichende, Blitzschläge verhindernde Wirksamkeit der Spitzen völlig verschwindend, ganz abgesehen davon, dass es viele Fälle gibt, in denen der Einfluss der Spitzen überhaupt nicht zur Geltung kommen kann, wie bei der Hervorrufung eines Blitzschlages durch einen anderen.[1]) Auch zeigt die Erfahrung, dass keine Abnahme in der Intensität der Ge-

1) Ueber diesen Gegenstand vgl. man die Arbeit von O. Lodge: On Lightning Conductors, Electrician. Vol. XXI. p. 234. 1888, auch später ebenda.

witter zu bemerken ist, selbst wo sehr viele Spitzen vorhanden sind. Denn man dürfte nicht annehmen, dass eine Stadt mit ihren Kirchthürmen, Kaminen, hervorragenden Gebäuden und anderen Blitzableitern ganz ohne wahrnehmbaren Einfluss auf die Gewitter wäre, wenn nicht die Bildung neuer Electricitätsmengen mit so grosser Schnelligkeit erfolgte.

Zum Schluss bleibt mir die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Hertz, für die Anregung zu dieser Arbeit und die stete Förderung, die er mir zu theil werden liess, meinen innigsten Dank auszusprechen.

---

7. *Ueber Reflexion electrischer Drahtwellen; von Josef Ritter von Geitler.*

(Nach seiner Bonner Inaugural-Dissertation für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Nachdem durch V. Bjerknes[1]) die Dämpfung der electrischen Schwingungen im primären Hertz'schen Leiter untersucht worden war, lag der Gedanke nahe, die Dämpfung zu ermitteln, welche ein electrischer Wellenzug beim Fortschreiten an einer langen Drahtleitung erleidet.

So fasste ich denn im Herbst 1891 den Entschluss, die eben berührte Frage zu beantworten. Die Methode, welche ich zu benutzen gedachte, werde ich kurz auseinandersetzen; doch muss ich hier schon bemerken, dass, so einfach die Sache auf den ersten Blick scheinen dürfte, meine diesbezüglichen Versuche gleichwohl nicht den gewünschten Erfolg hatten, ja sogar, wie ich später einsah, und wie es sich auch aus dem Weiteren ergeben wird, den gewünschten Erfolg nicht haben konnten.

Dagegen stiess ich bei diesen Versuchen auf unerwartete Erscheinungen, deren Kenntniss bei Untersuchungen über electrische Drahtwellen überhaupt von Nutzen ist. Diese Erscheinungen bilden den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Zunächst wurde die von Hrn. Bjerknes[2]) angegebene Versuchsanordnung ziemlich unverändert wieder hergestellt. Sein mir freundlichst überlassenes Electrometer wurde im ersten Maximum vor dem Ende der ca. 100 m langen geschlossenen secundären Leitung angebracht und immer in dieser Stellung belassen. Meine Absicht war, zur Ermittelung der Dämpfung die Abnahme des Electrometerausschlages zu messen, wenn die Länge der secundären Leitung allmählich vergrössert wurde. Das einzige, was als Resultat dieser Ver-

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**. p. 513. 1891.

2) V. Bjerknes, l. c.

suche mitgetheilt werden kann, ist, dass die Dämpfung der verwendeten Wellen von ca. 10 m Länge in einer Leitung aus 1 mm starken Kupferdrähten, die in 5 cm Abstand gehalten waren, nicht erheblich ist. Wurden statt derartiger Kupferdrähte entweder 0,1 mm dicke Kupfer- oder Neusilber- oder Eisendrähte zur Verlängerung der Leitung benutzt, so genügten schon einige Meter derselben, um den Electrometerausschlag um weit mehr als die Hälfte zu verkleinern. Die letztere Erfahrung, dass in dünnen Drähten die Dämpfung eine sehr starke ist, kam mir bei späteren Versuchen zu statten.[1])

Da bei der grossen Unregelmässigkeit der primären Funken und der, wie ich mich überzeugt hatte, geringen Dämpfung bei Verwendung stärkerer Kupferdrähte einigermaassen exacte Messungen nur äusserst schwer ausführbar waren, so ging ich zu einer anderen Methode über.

Ich verfertigte mir ein Differentialelectrometer, mit Hülfe dessen ich durch eine einzige Ablesung Intensitätsunterschiede an Punkten messen konnte, welche durch ein beliebig langes Stück der Leitung voneinander getrennt waren. Die Beschreibung des Apparates und seiner Anwendung folgt in einem späteren Abschnitte.

Indem ich ferner an das Ende der Leitung ca. 60 m dünnen Eisendraht anschloss, in welchem sich die Welle erfahrungsmässig vollständig todtläuft, hoffte ich zu erreichen, dass jeder vom primären Kreise (Blondlot'sche[2]) Aufstellung) ausgesendete Wellenzug die secundäre Leitung nur ein einzigesmal durchlaufe, sodass in der Leitung nirgends stehende, sondern nur fortschreitende Wellen vorhanden wären. Das Differentialelectrometer schien dann sehr geeignet, um Intensitätsunterschiede der fortschreitenden Wellen zu messen, welche zwischen einem festgewählten und einem veränderlichen Punkte der Leitung stattfinden. Diese Methode schien die gestellte Frage leicht und schnell beantworten zu können.

Als ich diese Messungen auszuführen versuchte, erhielt ich aber sehr unregelmässige und wunderliche Resultate, sodass

---

1) Vgl. auch V. Bjerknes, Wied. Ann. **47.** p. 69. 1892.

2) R. Blondlot, Compt. rend. **114.** p. 283. 1892, oder Graetz, Rev. **1.** p. 308. 1892.

es mir anfangs ganz unmöglich war, dieselben zu erklären. Nachdem ich lange Zeit nach Fehlern des Electrometers etc. vergeblich gesucht hatte, fand ich endlich, dass mein Misserfolg einem eigenthümlichen Verhalten der electrischen Drahtwellen zuzuschreiben sei.

Ich hatte bei Aufstellung der ca. 280 m langen Leitung die Drähte zwar möglichst parallel gemacht, jedoch auf eine peinlich gleiche Grösse ihres Abstandes in allen Punkten nicht geachtet, da ich annahm, dass eine Veränderung dieses Abstandes ohne Einfluss sein müsse, solange sie klein gegen den ganzen Abstand wäre. Es zeigte sich nun, dass diese Annahme irrig gewesen war. Es fand sich vielmehr, dass die Wellen an solchen Stellen der Leitung, an welchen der Parallelismus der Drähte auch nur in geringfügiger Weise gestört war, eine theilweise Reflexion erleiden. Ich erkannte dies daran, dass sich vor jeder solchen Störungsstelle durch Interferenz der ursprünglichen und der reflectirten Welle ein System von Maximis und Minimis der Intensität ausbildet.

Durch diese Erkenntniss war nun zunächst die Unregelmässigkeit der in den ursprünglichen Versuchen erhaltenen Resultate hinlänglich erklärt. Auch war es mir nicht möglich, die Ursachen dieser Unregelmässigkeit zu umgehen und nur da, wo sehr lange, völlig gerade, mit grosser Sorgfalt aufgestellte Leitungen zur Verfügung stehen, wird man diese Versuche in der von mir beabsichtigten Form zur Ausführung bringen können.

Dagegen fand ich bei genauerem Zusehen ferner, dass solche Reflexionen nicht nur an Verengungen und Erweiterungen der Leitung stattfinden, sondern auch an solchen Stellen, wo ein Uebergang von dünnerem zu dickerem Draht oder umgekehrt stattfindet.

Aehnlich, wie eine Verengung der Leitung, wirkt auch ein Condensator, dessen Belegungen mit je einem Leitungsdrahte verbunden sind.

Die Grösse des reflectirten Theiles hängt von der Grösse der angebrachten Veränderung ab und wächst mit dieser (z. B. mit der Grösse des Condensators).

Die bei der Reflexion erlittene Phasenverschiebung ist nicht in allen Fällen dieselbe. Man erkennt dies an der Ent-

fernung des ersten Maximum oder Minimum von der Reflexionsstelle. Die Phasenverschiebung liegt für Verengungen, Condensatoren und den Uebergang zu dickerem Drahte zwischen 0 und $\lambda / 2$, für Erweiterungen oder den Uebergang zu dünnerem Draht zwischen $-\lambda / 2$ und 0. Die Grenzwerthe 0 und $\lambda / 2$ werden erreicht, wenn die Leitung an der betreffenden Stelle entweder ganz geöffnet (durchschnitten) oder durch einen quer übergelegten Draht vollständig geschlossen ist.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung von Einzelheiten über.

1. Die Versuchsanordnung (Fig. 1). Die Erregung der Wellen geschah nach der von Blondlot[1]) angegebenen Methode. Die Wellenlänge betrug $\lambda = 18{,}4$ m.

Um die Wirksamkeit der primären Funken wenigstens einigermaassen constant zu halten, erwies sich, wie schon Hr. Classen[2]) gefunden hat, ein gegen die Funkenstrecke gerichteter constanter Luftstrom als sehr zweckmässig.

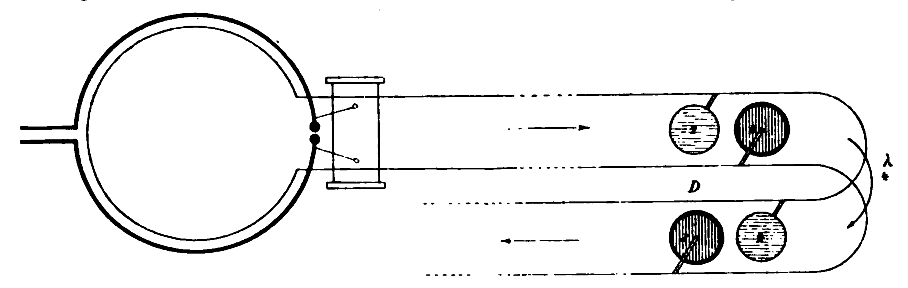


Fig. 1.

Die Drähte der secundären Leitung, deren Gesammtlänge 280 m betrug, waren durch Holzstücke mit entsprechend angebrachten Einschnitten überall in dem möglichst constanten gegenseitigen Abstand von 8 cm gehalten. Das Material der Drähte war auf eine Strecke von ca. 220 m 1 mm starker Kupferdraht; das Ende der Leitung bildeten aus dem oben erwähnten Grunde 60 m 0,1 mm starken Eisendrahtes.

Das Differentialelectrometer *D* befand sich ca. 140 m vom Anfange der Leitung entfernt. Es hatte die folgende Einrichtung:

1) R. Blondlot, l. c.

2) H. Classen, Wied. Ann. **39.** p. 647. 1890; vgl. auch Boltzmann, Wied. Ann. **40.** p. 399. 1890; A. Toepler, Wied. Ann. **46.** p. 478. 1892.

2. Das Electrometer (Fig. 2). In einem parallelepipedischen Glaskästchen von 12 cm Höhe, 7 cm Länge, 2 cm Breite hängt an einem äusserst feinen Quarzfaden, für dessen freundliche Ueberlassung ich Hrn. Dr. Eugen Blasius in Berlin zu bestem Danke verpflichtet bin, eine Doppelnadel aus dünngewalztem Aluminium. Die beiden Theile der Nadel sind bei *g* durch ein 5 mm langes dünnes Glasstäbchen starr verbunden. Die untere Nadel hat bei *s* einen kleinen Spiegel, um Ablenkungen der Nadel mit Fernrohr und Scala messen zu können. Da die Torsionskraft des Quarzfadens äusserst

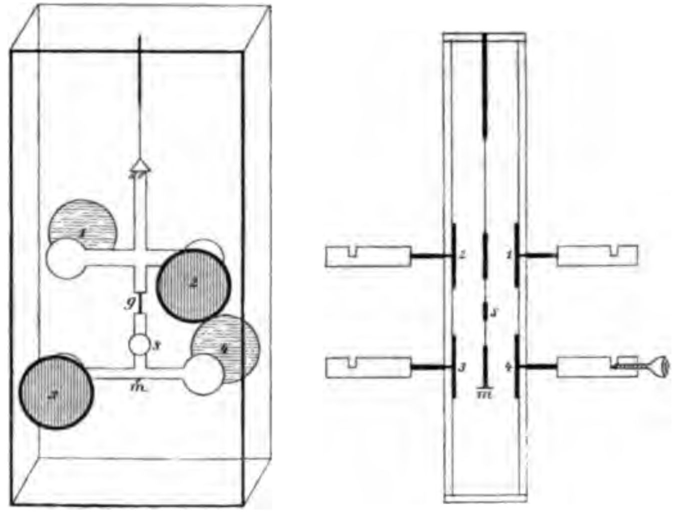


Fig. 2.

gering war, wurde die richtende Kraft eines 2 mm langen, bei *m* an der unteren Nadel befestigten Magneten benutzt, welcher mit Hülfe je eines vor und hinter dem Electrometer angebrachten Magneten eingestellt werden konnte. Zur feinen Einstellung diente ein dritter Magnetstab. An der Innenseite der vorderen und hinteren Glaswand sind Messingplättchen von 1,5 cm Radius angekittet. An diesen Plättchen befinden sich Ansätze, welche das Glas durchsetzen und mit den Leitungsdrähten verbunden werden können. An der vorderen Glaswand sind die Platten bei 2, 3, an der rückwärtigen bei 1, 4 angebracht.

Werden mithin die Platten 1, 2 mit der Leitung ver-

bunden, so wird die Electrometernadel — von oben gesehen — im Sinne des Uhrzeigers gedreht. Eine entgegengesetzte Drehung findet statt, wenn man die Platten 3, 4 mit der Leitung verbindet. Es ist also klar, dass, wenn man denselben Wellenzug auf beide Plattenpaare wirken lässt, der resultirende Ausschlag die Differenz der Intensitäten angibt, welche die Welle bei 1, 2, resp. 3, 4 besitzt, und zwar mit dem richtigen Vorzeichen, vorausgesetzt, dass die Stellung der Nadel ursprünglich eine solche war, dass bei gleichzeitiger, gleichstarker Einwirkung auf 1, 2, wie auf 3, 4 kein Ausschlag eintritt.

3. Bei den anfänglichen Versuchen waren die beiden Plattenpaare durch ein längeres Stück der Leitung (16 m) verbunden. Die Störungen wurden an diesem Theile der Leitung angebracht.

Späterhin traf ich eine zweckmässigere Anordnung. Die Länge des zwischen dem oberen und unteren Plattenpaare gelegenen Stückes der Leitung war $= \lambda / 4$. Die Störungen (hauptsächlich Condensatoren verschiedener Capacität) wurden, während alles andere unverändert blieb, an der Leitung hinter dem Electrometer angebracht und allmählich an der Leitung verschoben.

Es sei die Lage der Reflexionsstelle eine solche, dass das untere Plattenpaar des Electrometers sich im ersten Minimum befindet. Dann ist bei der getroffenen Anordnung am Orte des oberen Plattenpaares ganz bestimmt ein Maximum. Man erhält einen, und zwar den grössten Ausschlag im Drehungssinne der oberen Platten. Entfernt sich die Reflexionsstelle vom Electrometer immer weiter, so sinkt der Ausschlag mehr und mehr; er wird endlich Null, wenn das obere und untere Paar sich an Stellen gleicher Intensität befinden; bei fortgesetzter Entfernung der Reflexionsstelle stellt sich ein wachsender Ausschlag im Sinne der unteren Platten ein, welcher einen grössten Werth erreicht, wenn endlich die Stelle der oberen Platten einem Minimum, diejenige der unteren Platten einem Maximum entspricht etc. Die Electrometerausschläge geben somit ein getreues Bild der Intensitätsverhältnisse vor der gestörten Stelle; vorausgesetzt ist natürlich, dass bei ungestörter Leitung kein Ausschlag erfolgt.

Die Vortheile, welche die Anwendung des Differential-

electrometers mit sich bringt, sind unverkennbar. Eine besondere Annehmlichkeit liegt darin, dass man bei vielen Versuchen, wo nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird, in hohem Grade von der sonst sehr störenden unregelmässigen Wirksamkeit der primären Funken unabhängig gemacht wird. Wird das in die Nulllage gebrachte Electrometer mit der Leitung verbunden, so werden, bei beliebig gesteigerter Empfindlichkeit des Apparates, beliebig kleine Intensitätsunterschiede mit voller Sicherheit durch eine einzige Ablesung constatirt. Zweifel über das Vorzeichen sind ausgeschlossen, da der Sinn des Ausschlages der entgegengesetzte ist, je nachdem das eine oder das andere Plattenpaar stärker auf die Nadel wirkt. Auch der absolute Werth der Differenz lässt sich mit einiger Genauigkeit durch eine einmalige Ablesung ermitteln, wobei dann allerdings die Unregelmässigkeit der primären Funken nicht vernachlässigt werden kann.

Zu einer genauen Berechnung des Verhältnisses zwischen der Amplitude der ursprünglichen und reflectirten Wellen eignen sich die bisherigen Versuche nicht. Meine Versuchsanordnung litt nämlich an dem Mangel, dass die secundäre Leitung zu kurz, bez. die Dämpfung im primären Kreise eine zu geringe war. Infolgedessen kehrten die an den Unregelmässigkeiten der Leitung reflectirten Theile der Welle zum Ursprung der Leitung zurück, ehe noch der primäre Kreis vollständig aufgehört hatte, Schwingungen auszusenden; der letztere wurde daher (wie man sich durch geeignete Versuche überzeugen konnte) von der secundären Leitung beeinflusst, und zwar natürlich je nach der Grösse des reflectirten Theiles in verschieden hohem Maasse. Dadurch wurden quantitative Versuche unmöglich; deshalb begnüge ich mich damit, die qualitativen Versuchsergebnisse mitzutheilen.

4. Mit der in Nr. 3 beschriebenen anfänglichen Anordnung wurden Versuche über die Reflexion an Verengungen und Erweiterungen angestellt. Die letzteren wurden durch Holzstücke hergestellt, welche mit entsprechenden Einschnitten für die Drähte versehen waren (Fig. 3). Da die Nadel zu Beginn nicht in der Nulllage war, so entsprechen die Ausschläge sämmtlich dem Drehungssinne der oberen Platten. In der Fig. 4 ist die Entfernung der Verengung (Erweiterung) von

den oberen Platten in Metern als Abscisse, der zugehörige Ausschlag in Scalentheilen als Ordinate verzeichnet. Bei diesen Versuchen über Verengung (Curve I) war der Abstand der Drähte 8 cm, an der verengten Stelle 2 cm; das Umgekehrte

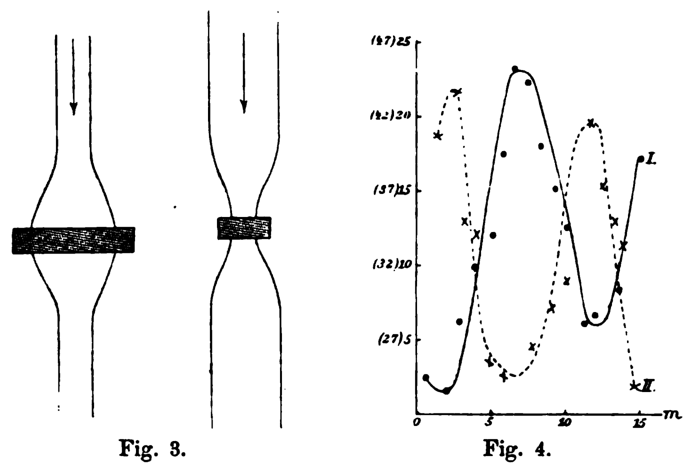


Fig. 3. Fig. 4.

gilt für die Erweiterung (Curve II). Die Ordinaten der Curve I sind in Fig. 4 aus Gründen der Raumersparniss alle um 22 Scalentheile verkleinert worden.

5. Im weiteren ist die in Nr. 3 erwähnte endgültige Anordnung vorausgesetzt.

Plattencondensatoren aus Zinkblech von verschiedener Grösse wurden in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise hinter dem Electrometer an verschiedenen Stellen der Leitung angebracht. In Fig. 6 sind die Abstände der Condensatoren von den unteren Electrometerplatten in Metern als Abscissen, die entsprechenden Ausschläge in Scalentheilen als Ordinaten angegeben. Die beobachteten Punkte der Curven sind in der Zeichnung kenntlich gemacht; sie entsprechen einer je einmaligen Ablesung. Ausschläge im Sinne der unteren Platten sind nach oben, solche im Sinne der oberen Platten nach unten aufgetragen. Man sieht, dass die Grösse des reflectirten Theiles

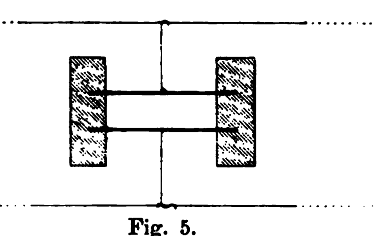


Fig. 5.

mit der Grösse der angebrachten Veränderung wächst, und dass die Phasenverschiebung, die in der verschiedenen Lage des ersten Minimum sich kundgibt. mit vergrösserter Capacität des Condensators sich $\lambda/2$ mehr und mehr nähert. Bei den grösseren der verwendeten Condensatoren (0,5 m², 1 m², 2 m² Oberfläche der einzelnen Belegung) gingen die Ausschläge in der Nähe der ersten Minima über die Scala hinaus — es liessen sich daher nur die Punkte feststellen, an welchen angebracht der Condensator keinen Ausschlag des Apparates zur Folge hatte. Die Lage derselben näherte sich mit wachsender Capacität immer mehr derjenigen, in welcher auch ein querübergelegter Draht (geschlossene Leitung) das Electrometer in Ruhe liess.

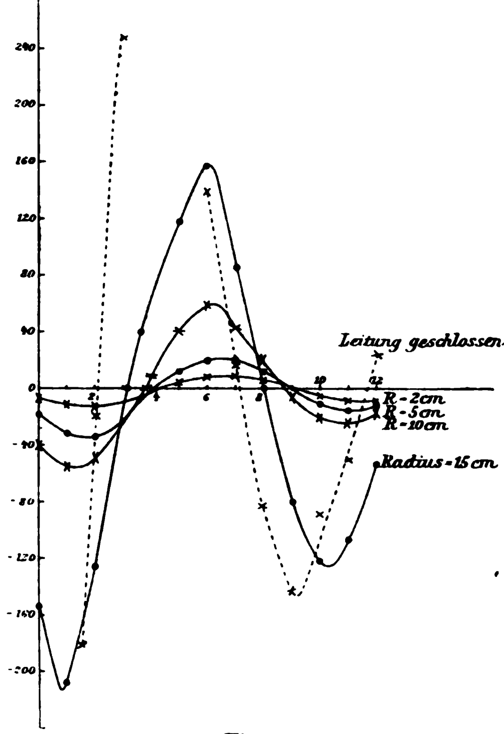


Fig. 6.

Damit die Curven in Fig. 6 die Vertheilung der Intensität längs der Leitung richtig darstellen, für den Fall, dass die Wellen von der positiven x-Seite her gegen den Nullpunkt kommen, in welchem der betreffende Condensator angebracht zu denken ist, müsste man, wie leicht einzusehen, die x-Axe in entsprechender Weise nach abwärts verschieben. Keines der Minima ist Null, den einzigen Fall der vollständig geschlossenen Leitung ausgenommen. Die Curven zeigen daher, in welcher Weise die Intensität, ohne an irgend einem Punkte ganz zu verschwinden, um den

mittleren Werth schwankt, welchen sie bei ungestörter Leitung hätte, und welcher — abgesehen von der Dämpfung im secundären Leiter — durch eine der x-Axe parallele Gerade dargestellt würde.

6. Auch über den Einfluss des Ueberganges von dickerem zu dünnerem Drahte, oder umgekehrt, machte ich orientirende Versuche, als deren Ergebniss ich mittheilen kann, dass die Grösse des reflectirten Theiles von dem Unterschiede der Querschnitte abhängt, sowie, dass die Phasenverschiebung des reflectirten Theiles beim Uebergange zu dünnerem Drahte dem an einer Erweiterung erlittenen, beim Uebergange zu dickerem Drahte jenem an einer Verengung entspricht. Nur beiläufig will ich bemerken, dass mein Electrometer empfindlich genug war, um die Reflexion anzuzeigen, welche stattfand, als ich jeden der beiden Leitungsdrähte auf eine Strecke von wenigen Centimetern mit einem in Zinkvitriollösung getränkten Bindfaden umwickelte.

7. Versucht man es, sich den Vorgang bei den beschriebenen Reflexionen zu erklären, so könnte man in dem Falle der Condensatoren auf folgenden Gedanken kommen: Die ankommende Welle verzweige sich an der Verbindungsstelle Condensator — Leitung. Ein Theil der Welle gehe an der Leitung weiter, der andere lade den Condensator. Dieser entlade sich wieder und der Entladungsstrom — wenn man so sagen darf — gehe zur Hälfte nach der positiven, zur Hälfte nach der negativen Seite der Leitung, wo er mit dem ankommenden Wellenzuge interferirt. Die verschiedene Ladungs- und Entladungsdauer der Condensatoren könnte die bei der Reflexion erlittene Phasenverschiebung erklären. Die Erfahrung bestätigt diese Anschauung durchaus nicht. Nach der letzteren müsste bei fortgesetzt wachsender Capacität des Condensators die Phasenverschiebung periodisch ab- und zunehmen; ausserdem aber müsste die mittlere Intensität der Wellen hinter dem Condensator in entsprechender Weise variiren, wie die Phasenverschiebung. Beiden Folgerungen wird durch die Erfahrung widersprochen. Bei den diesbezüglichen Versuchen wie auch in den oben beschriebenen verwendete ich Condensatoren von 2 cm Plattenabstand; der Radius der Platten betrug 1 bis 20 cm, ferner wurden Condensatoren von 1 m^2 und

2 m^2 Oberfläche der einzelnen Belegung verwendet. Weder bei der Phasenverschiebung, noch bei der Intensität der durchgelassenen Welle wurde eine periodische Zu- und Abnahme gefunden.

Ich habe diesen Punkt deshalb berührt, weil es thatsächlich gelingt, eine Versuchsanordnung herzustellen, welche mit der Methode der Condensatoren eine gewisse Aehnlichkeit hat und bei welcher die erwähnte Betrachtungsweise wirklich zutrifft.

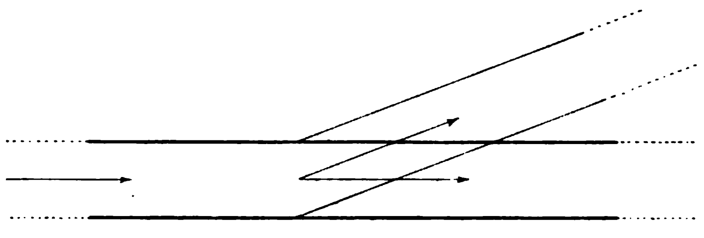


Fig. 7.

An irgend einer Stelle der Leitung wird *eine Zweigleitung* angebracht, wie dies in Fig. 7 angedeutet ist. Vergrössert man die Länge der Zweigleitung, so sieht man den Ausschlag eines hinter der Verzweigungsstelle an der Hauptleitung angebrachten einfachen Electrometers periodisch ab- und zunehmen.

Der Verlauf der Curve, welche den Electrometerausschlag als Function der Länge der Zweigleitung darstellt, ist genau der entgegengesetzte, wenn die Zweigleitung an ihrem Ende das eine mal geöffnet, das andere mal geschlossen ist. Die Erscheinung rührt offenbar davon her, dass der in die Zweigleitung gehende Theil der Welle bei der Reflexion am Ende derselben einen Phasenverlust 0 oder $\lambda / 2$ erleidet, je nachdem die Zweigleitung geöffnet oder geschlossen ist. Fig. 8 stellt den Electrometerausschlag hinter der Verzweigungsstelle als Ordinate, die Länge der entsprechenden Zweigleitung als Abscisse dar. Curve I gibt den Verlauf bei geöffneter, Curve II bei geschlossener Zweigleitung. Die Zweigleitung dürfte auch ein bequemes Mittel zur Messung von Wellenlängen darbieten.

Das Hauptergebniss der vorliegenden Arbeit lässt sich kurz in folgendem Satze aussprechen:

„Wird ein electrischer Wellenzug in einer aus zwei, im übrigen parallel laufenden, gleichen Drähten bestehenden Leitung fortgesendet, so erleidet derselbe überall dort eine mit einem gewissen Phasenverluste verbundene theilweise Reflexion, wo entweder der Parallelismus der Drähte gestört ist, oder wo ein Uebergang von dickerem zu dünnerem Leitungsdraht oder umgekehrt stattfindet, oder wo ein Condensator in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise mit der Leitung verbunden ist.

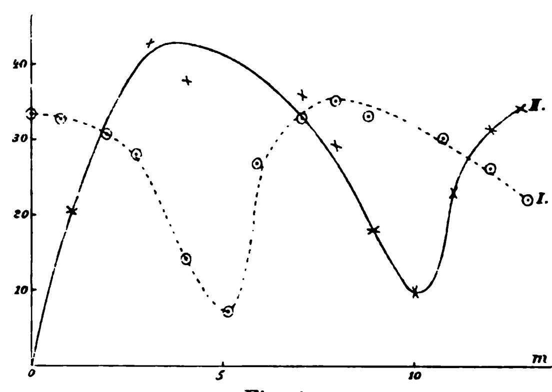


Fig. 8.

Zum Schlusse bleibt mir noch die angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Hertz für seine Rathschläge und die Liebenswürdigkeit, mit welcher er die Durchführung meiner Arbeit unterstützte, an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank zu sagen. [1]

1) *Nachtrag.* Durch Hrn. E. H. Barton in Bonn werde ich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass sich in die Formeln meiner Dissertation ein Fehler eingeschlichen hat, welcher jedoch die qualitativen Ergebnisse meiner Versuche ganz unberührt lässt.

Prag, im März 1893.

8. *Beitrag zur Verwendung des Differentialgalvanometers* [1]; *von M. Levy.*

(Mittheilung aus dem electrotechnischen Laboratorium der technischen Hochschule zu Darmstadt.)

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—17.)

Seit C. A. Becquerel[2]) im Jahre 1826 mit dem Vorschlage zu einem Differentialgalvanometer in die Oeffentlichkeit trat, ist dasselbe in mannigfacher Weise zur Messung von Widerständen benutzt worden, ohne dass indess die möglichen Combinationen erschöpft wären. Ich werde in Folgendem auf einige Verwendungsarten aufmerksam machen, deren ich in der bisherigen Literatur nicht Erwähnung fand.

Im Anschluss hieran soll eine vergleichende Untersuchung über die Empfindlichkeit der gebräuchlichsten Widerstandsmessmethoden angestellt werden.

I. Differentialgalvanometer in „Brückenschaltung".

Es verzweige sich ein Strom J in zwei Leiter vom Widerstande R und W; und P_1 habe (vgl. Taf. II, Fig. 1) gleiches Potential mit Q_1, P_2 mit Q_2 oder, wie ich der Einfachheit halber sagen will: es seien P_1 und Q_1, P_2 und Q_2 *„zugeordnete"* Punkte. Verbinden wir die Quadrantenpaare eines Electrometers mit den Punkten P_1 und Q_1, sowie P_2 und Q_2, so haben wir in beiden Fällen keinen Ausschlag. Gehen wir indess auf dem Drahte W von Q_1 nach Q_1' um einen bestimmten Widerstand w' vor, so wird das Electrometer eine Potentialdifferenz $i_w . w'$ anzeigen. Dieselbe Potentialdifferenz erhalten wir auch, wenn wir von Q_2 aus um dasselbe w' nach Q_2' vorgehen und P_2 nebst Q_2' an die beiden Quadrantenpaare anlegen. Gäbe es demnach ein *„Differentialelectrometer"* [3]), so könnte man bei Fest-

1) Auszug aus der Dissertation: Beitrag zur Verwendung des Differentialgalvanometers, Berlin 1892, Verlag von G. Schade (O. Francke).

2) C. A. Becquerel, Ann. de chim. et phys. Ser. II. **32**. p. 420. 1826, und Traité d'électr. et de magn. **3**. p. 74.

3) Ein solches ist neuerdings von Heerwagen benutzt worden. Vgl. Wied. Ann. **48**. p. 1. 1893.

halten von P_1 und P_2 zu einem beliebig gewählten Punkte Q_1' einen Punkt Q_2' durch eine Messung so finden, dass zwischen Q_1' und Q_2' absolut genau derselbe Widerstand liegt, wie zwischen den P_1 und P_2 „zugeordneten" Punkten Q_1 und Q_2. Wir werden sogleich sehen, dass wir auch eine genügende Annäherung an diesen Fall erhalten können, wenn wir statt des gedachten Differentialelectrometers ein Differentialgalvanometer verwenden und P_1 mit Q_1', P_2 mit Q_2' je durch einen seiner Zweige so verbinden, dass die entstehenden Ströme sich entgegenwirken.

Da die ganze Anordnung dann wie bei der Wheatstone'schen Brücke zu treffen, nur das einfache Galvanometer durch ein Differentialgalvanometer zu ersetzen ist, so habe ich diese Art der Schaltung desselben mit dem Namen „*Brückenschaltung*" belegt.

Für die Bestimmung kleinerer Widerstände — es sind darunter solche von etwa 1 Ω bis $^1/_{50}$ Ω verstanden, ohne dass diese Grenzen festlägen — gewährt das Differentialgalvanometer in Brückenschaltung die Möglichkeit, alle Zuleitungs- und Uebergangswiderstände unschädlich zu machen, und zwar mittels einer Einstellung und Benutzung der einfachen Hülfsmittel der Wheatstone'schen Methode.

Eine nähere Erläuterung gibt Fig. 2, wo ein Universalwiderstandskasten als gegeben vorausgesetzt ist. w und w_2 stellen die Uebersetzungs-, die Δu Uebergangs-, die Δz Zuleitungswiderstände dar; r_2 ist der Vergleichswiderstand, woraus r_1 und w_1 gebildet werden, ist belanglos; wir haben nur darauf zu achten, dass w_1 / W ungefähr gleich r_1 / R ist, und ferner die Uebersetzung w / w_2 so zu wählen, dass $\Delta u_5 + \Delta z_3 + \Delta u_6$ gegen r_2 vernachlässigt werden können. Dann erfolgt die Berechnung wie bei der Brücke nach der Formel

$$x : w = R : W = r_2 : w_2. \tag{1}$$

Es fragt sich, wie gross bei Anordnungen dieser Art der Fehler ist, der durch die Abweichung der Punkte von den „zugeordneten" — wir wollen ihn kurz den *Zuordnungsfehler* nennen — bewirkt wird.

Zur experimentellen Untersuchung dieser Frage habe ich die Fehler beobachtet, die sich ergaben, als man zwei Wider-

stände von $^1/_{10}$ resp. $^1/_{20}$ S. E. bei verschiedenen Uebersetzungsverhältnissen (von (1 : 100 bis 1 : 1000) und Zuordnungsfehlern bestimmte. Die Versuchsanordnung war nach dem Schema der Fig. 3 getroffen. Als Universalwiderstandskasten (U. W. K.) diente ein solcher von Siemens & Halske; ein weiterer einfacher Widerstandskasten (W. K.) gestattete r_1 zu variiren und so Zuordnungsfehler von gewünschter Grösse hervorzurufen. Das ziemlich empfindliche Galvanometer war in Wiedemann'scher Form von Plath in Potsdam hergestellt; die verwandten Spulen zeigten einen Widerstand von rund 400 S. E., sie waren zu je zweien parallel gegen einander geschaltet, sodass der Widerstand eines jeden Zweiges bei Zimmertemperatur etwa 200 S. E.[1]) betrug.

Das Resultat der Untersuchung war:

1. Je kleiner die Widerstände der Verzweigung gegenüber dem Galvanometerwiderstande sind, desto kleiner wird auch bei gleicher procentualer Abweichung von der Zuordnung[2]) der Fehler der Widerstandsbestimmung.

2. Der Fehler der Widerstandsbestimmung steigt im wesentlichen im geraden Verhältniss mit dem procentualen Zuordnungsfehler an, dem wiederum bei derselben Hauptstromstärke der durch den einzweigigen Strom im Galvanometer hervorgerufene Ausschlag proportional ist. Man kann sich demnach für jede Widerstandscombination schnell ein Bild des zu erwartenden Fehlers machen, indem man den unbekannten Widerstand bei zwei verschiedenen einzweigigen Ablenkungen a_1 und a_2 bestimmt. Ergeben diese Bestimmungen eine procentuale Differenz α, so kann für einen einzweigigen Ausschlag von 1 cm der Fehler mit etwa $\alpha / a_2 - a_1$ angesetzt werden.

3. Für einen einzweigigen Ausschlag von 1 cm — Differenz der beim Commutiren erhaltenen Einstellungen — war der Fehler der Widerstandsbestimmung durchgängig kleiner als $^1/_{100}$ Proc., im Mittel 0,0072 Proc. Da es nun immer leicht und schnell möglich ist — z. B. mittels eines blanken Drahtes und einer verschiebbaren Klemme — den Widerstand w_1 so

1) Mit Rollen von geringerem Widerstande hätte man noch höhere Empfindlichkeit erzielen können.

2) Diese berechnet sich bei dem anfangs angeführten Beispiel (vgl. Taf. II, Fig. 1) zu $100\,w' / W$.

zu reguliren, dass jener Ausschlag 1 bis 2 cm nicht überschreitet, so ist wohl für die meisten Fälle der Zuordnungsfehler als belanglos zu betrachten.

Dies ist das günstige Ergebniss der Fehlerbestimmungen.

Ich gehe jetzt dazu über, Versuche zu beschreiben, die ich zum Zwecke eines Vergleiches mit einer anderen sehr gebräuchlichen Methode, nämlich der Thomson'schen, angestellt habe.

Die Versuchsanordnung (vgl. Taf. II, Fig. 4) war im Ganzen dieselbe, wie sie schon p. 198 angegeben, nur traten noch einige neue Verbindungen hinzu, welche die Messung nach der Methode von Thomson gestatten — diese erfolgte mittels einer Doppelbrücke Siemens & Halske'scher Construction. Die ganze Einrichtung war so getroffen, dass man ohne Vermittelung von Schrauben allein vermittels einiger Quecksilbercontacte beliebig auf Einstellung und Controlle des Differentialgalvanometers oder auf Messung des Widerstandes nach einem der beiden Verfahren schalten konnte. Die Reihenfolge der Messungen war: Abgleichung des Differentialgalvanometers; Bestimmung des Widerstandes nach Thomson, mit dem Differentialgalvanometer (Uebersetzung ψ_1), nach Thomson, mittels Differentialgalvanometer (ψ_2) etc.; Controlle des Differentialgalvanometers. So wurden Temperaturschwankungen am leichtesten unschädlich gemacht.

Nach Anbringung sämmtlicher Correctionen, bezüglich der Aichung und der Temperatur, ergaben sich folgende Werthe:

A. Widerstand No. I.

a) Methode von Thomson.

	0.093726 S. E.
	0,093732 „
	0.093727 „
im Mittel	0,093728 S.E.

b) Differentialgalvanometer in Brückenschaltung.

$\psi_1 = 1:300$	0,093752 S. E.
$\psi_2 = 1:500$	0,093714 „
$\psi_3 = 1:1000$	0,093748 „
im Mittel	0,093738 S.E.

Abweichung der beiden Mittelwerthe von einander 0,0107 Proc.

B. Widerstand No. II.

a) Methode von Thomson.

	0,050703 S. E.
	0,050649 „
	0,050738 „
	0,050696 „
im Mittel	0,050696 S.E.

b) Differentialgalvanometer in Brückenschaltung.

$\psi_1 = 1:300$	0,050686 S. E.
$\psi_2 = 1:500$	0,050693 „
$\psi_3 = 1:1000$	0,050673 „
im Mittel	0,050684 S.E.

Abweichung der beiden Mittelwerthe von einander 0,0237 Proc.

C. Widerstand No. III.

a) Methode von Thomson.

	0,034301 S. E.
	0,034286 „
	0,034335 „
	0,034265 „
im Mittel	0,034297 S.E.

b) Differentialgalvanometer in Brückenschaltung.

$\psi_1 = 1:500$	0,034260 S. E.
$\psi_2 = 1:1000$	0,034266 „
$\psi_3 = 1:2000$	0,034292 „
im Mittel	2,034273 S.E.

Abweichung der beiden Mittelwerthe von einander 0,0759 Proc.

Zu diesen Zahlen ist noch zu bemerken, dass man den doppelseitigen Ausschlag im Galvanometer, welcher dem einzweigigen Strome entsprach, nicht über 2 cm werden liess, was weder besondere Mühe noch Zeit erforderte.

Die erreichte Uebereinstimmung ist wohl als eine sehr gute zu bezeichnen, zumal wenn man die Anhäufung auch an sich kleiner Fehler durch die vielfachen Aichungen und Calibrirungen bedenkt.

Wenn ich daher nun zu einem abschliessenden Vergleiche der beiden Methoden schreiten soll, so möchte ich diese Frage als eine rein praktische behandeln: eine solche der vorhandenen Hülfsmittel. Dann ist aber zu bedenken, dass in vielen electrotechnischen und physikalischen Laboratorien zwar ein empfindliches Differentialgalvanometer und ein Universalwider-

standskasten, selten aber ein Apparat, ja auch nur ein Normaldraht vorhanden ist, der ohne weiteres die Anwendung der Thomson-Methode (oder auch der Kohlrausch'schen, welche genauere Werthe liefern würde) gestattete. Wir können uns somit kurz dahin äussern:

Die Anwendung des Differentialgalvanometers anstatt des einfachen Galvanometers erhöht den Messbereich der Brückenmethode. Sie empfiehlt sich von dort an abwärts, wo Zuleitungs- und Uebergangswiderstände von Bedeutung werden und wird in ihrer unteren Grenze durch die gewünschte Empfindlichkeit bestimmt.

Die Anwendung des Differentialgalvanometers in Brückenschaltung verlangt ausser einem differential schaltbaren Galvanometer keine anderen Hilfsmittel, als die gewöhnliche Brückenmethode.

Der durch Abweichung von der Zuordnung entstehende Fehler ist auch bei grösseren Differenzen nicht bedeutend, kann aber ohne Complication der Messung beliebig klein gemacht werden.

Das Differentialgalvanometer in Brückenschaltung lässt sich auch in Anwendung bringen, um ganz kleine Widerstände unabhängig von allen Contact und Uebergangswiderständen zu messen.

Eine solche Anordnung, bei der die Hülfsmittel des Matthiessen und Hockin'schen Verfahrens verwendet werden, aber nur zwei Einstellungen statt vier erforderlich sind, zeigt Fig. 5, wo N ein calibrirter Draht ist. Für die Berechnung gilt $x : n = w_1 : w_2$. Bei dieser Schaltung fallen die Zuordnungsfehler praktisch gänzlich fort.

II. Abänderung der Heaviside'schen Schaltung des Differentialgalvanometers im Nebenschluss.

Für die Abgleichung von Widerständen mittlerer Grösse, speciell für die Calibrirung von Widerstandskästen, lässt sich mit Vortheil das Differentialgalvanometer in Schaltung von Fig. 6 verwenden.

Parallel zu den zu vergleichenden Widerständen r und r_2 liegen die beiden Zweige des auf Moment und Widerstand abgeglichenen Differentialgalvanometers hintereinander gegeneinander geschaltet; w ist ein einfacher Verbindungsdraht von kleinem Widerstande. Die Messung geschieht in der Weise,

dass man r_2 so lange ändert, bis bei Stromschluss keine Ablenkung der Nadel mehr erfolgt; dies sei erreicht durch den Widerstand r_2'. Sodann vertausche man zur Eliminirung kleinerer Einstellungsfehler die beiden Galvanometerzweige durch Umlegen des Commutators K_2 und erhalte r_2'', dann ist

$$r = \frac{r_2' + r_2''}{2}. \tag{3}$$

Verwendet man dies Verfahren zur Calibrirung von Stöpselrheostaten, so hat man nicht nöthig, vor Herstellung der eigentlichen Schaltung das Galvanometer abzugleichen, sondern kann sofort die endgültige Anordnung treffen, die in Fig. 6 dargestellt ist. Die Abgleichung auf Moment erfolgt durch Aufheben der Brücke w. Ist die Abgleichung geschehen, so lege man die Brücke wieder an, ziehe als r und r_2 zwei nominell gleiche Stöpselwiderstände, z. B. 2 Hunderter, überzeuge sich durch Verwendung des Commutators K_2 von ihrer annähernden Uebereinstimmung[1]) und stelle jetzt das Differentialgalvanometer so ein, dass bei Stromschluss keine Ablenkung mehr erfolgt. Dann ist die Abgleichung genau genug hergestellt, indem die noch verbleibende Differenz durch das Commutiren ausgeglichen wird.

Es wurde mit dieser Anordnung eine Calibrirung des Universalwiderstandskastens (U. W. K.) und zwar in folgender Reihenfolge vorgenommen:

$$\begin{aligned}
5000 &= 2000 + 1000 + 1000' + 1000'' + \alpha \\
2000 &= 1000 + 1000'' = \beta \\
1000 &= 1000'' + \gamma \\
1000' &= 1000'' + \delta \\
500 &= 200 + 100 + 100' + 100'' + \alpha' \\
\ldots &\quad \ldots
\end{aligned}$$

Die Correctionen α, β, γ, δ, α' ... erhielt man durch Inter- bez. Extrapolation, indem man bei dem zweiten Theile der Widerstandsbestimmung die Widerstände 1000″, 100″, 10″, die sich aus den kleinen Widerständen zusammensetzten, um einen entsprechenden Betrag, meist $^1/_2$ Proc. des ganzen, verringerte. Absichtlich wurden bei jeder Messung die Widerstände 1000″, 100″, 10″ benutzt, um möglichst viele Stöpsel zu ziehen

1) Die erhaltene Ausschläge müssen zu beiden Seiten etwa gleich sein.

und so die Stöpselfehler auszuschliessen, die für genaue Calibrirungen am allergefährlichsten sind.

Zum Vergleiche wurden die grösseren Widerstände des U. W. K. ausser mit dem Differentialgalvanometer auch nach dem Wheatstone'schen Verfahren calibrirt und zwar mittels einer von Passavant[1]) für seine „Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit" benutzten Brücke.

Die auf diesen verschiedenen Wegen erhaltenen sehr gut übereinstimmenden Resultate sind nach Reduction auf die gleiche Temperatur in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Bezeichnung des Widerstandes	Aichung mittels	
	des Differentialgalvanometers	der Brückenmethode
5000	5000,20	5000,15
2000	1999,78	1999,46
1000	999,93	999,84
1000′	999,79	999,75
1000″	1000,31	1000,20
500	500,11	500,06
200	199.95	199,96
100	100,01	100,02
100′	100,04	100,04
100″	100,03	100,01
100_1	100,03	100,02
100_2	100,04	100,02
100_3	100,04	100 02
1000_1	999,76	999,93
1000_2	999,76	999,78

III. Verwendung des Differentialgalvanometers zur galvanischen Calibrirung von Brückendrähten.

Strouhal und Barus[2]) schlugen im Jahre 1880 eine Methode zur galvanischen Calibrirung von Drähten vor, welche die genaue Abgleichung von Hülfswiderständen überflüssig machen sollte. Mit den gleichen Hülfsmitteln und derselben Zahl von Ablesungen erreicht man jedoch eine höhere Genauigkeit unter Anwendung eines von Heerwagen[3]) angegebenen Verfahrens. Ist z. B. die Zahl der Abschnitte, in denen die Calibrirung vor sich gehen soll, $n = 10$, so gibt diese Methode

1) H. Passavant, Inauguraldissertation. Leipzig 1890. Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit.

2) Srouhal u. Barus, Wied. Ann. **10.** p. 326. 1880.

3) Heerwagen, Zeitschr. f. Instr. **11.** p. 167 ff. 1889.

bei 19 Ablesungen noch grössere Genauigkeit, als die Strouhal-Barus'sche bei dreifacher Wiederholung, d. h. bei 54 Ablesungen.

Ich werde jetzt zeigen, dass es mit Hülfe des Differentialgalvanometers sogar möglich ist, dieselbe Genauigkeit mit nur 10 Einstellungen zu erreichen: Die betreffende Schaltung geht aus Fig. 7 hervor. Setzt man voraus, dass die Nadel des Differentialgalvanometers keine Ablenkung erfährt, wenn $k_1 i_1 = k_2 i_2$ ist, so erhält man für jene Schaltung die Bedingungsgleichung

$$(4) \qquad k_2 x [W(w + g_1) - w^2] = k_1 w [R(x + g_2) - x^2].$$

Diese Gleichung ergibt, dass einem und demselben w bei constanten Werthen g_1, g_2, R, W immer ein und dasselbe x entspricht, unabhängig von der Einstellung des Differentialgalvanometers und davon, zwischen welchen Punkten des Zweiges W oder R man die Widerstände w oder x abgreift. Man braucht demnach keine bifilar gewickelten, annähernd gleichen n Hülfswiderstände, noch ihre Versetzung mehr, sondern ist auch ohnedies im Stande, lauter Abschnitte von gleichem Widerstande aneinanderzureihen. — Zur Ausführung der Calibrirung — es sei der Draht R in n Abschnitten zu calibriren — wähle man den Widerstand w so, dass ihm ein x von etwa der Grösse R/n entspricht. Dieses x greift man zunächt von einem Verzweigungspunkte, z. B. P_0, aus ab, dann stehe der zweite Contact auf a_1; hierauf belässt man diesen Contact in seiner Stellung a_1 und grenzt mit dem anderen nach Umkehr der Stromrichtung in einem der beiden Zweige ein weiteres x, bis a_2 reichend, ab. Analog fortschreitend reiht man $n/2$ äquivalente Abschnitte aneinander, bis man in der Mitte angelangt ist — n sei der Einfachheit halber als gerade angenommen, für ungerade n sind die Aenderungen nur geringfügiger Art —; jetzt wiederholt sich dasselbe Verfahren von dem anderen Verzweigungspunkt P_{00} aus, bis man nach weiteren $n/2$ Einstellungen von neuem die Mitte erreicht hat.

Die Berechnung ist bei dieser Methode sehr einfach: Es seien die beiden Einstellungen in der Mitte $a_{n/2}$ und $a_{n'/2}$ um die Länge d gegen einander verschoben, und mögen die anderen Einstellungen a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$ heissen, so sind die Punkte, durch welche der Draht in

$$\frac{1}{n} l \text{ bez. } \frac{n-1}{n} \cdot l, \quad \frac{2}{n} l \text{ bez. } \frac{n-2}{n} \cdot l \ldots$$

getheilt wird:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & + \frac{d}{n} & \text{bez.} & a_{n-1} & - \frac{d}{n} \\ a_2 & + 2\frac{d}{n} & \text{bez.} & a_{n-2} & - 2\frac{d}{n} \\ \vdots & \vdots & ,, & \vdots & \vdots \\ a_m & + m\frac{d}{n} & \text{bez.} & a_{n-m} & - m.\frac{d}{n}; \\ \vdots & \vdots & ,, & \vdots & \vdots \end{array}$$

demnach betragen die Correctionen

$$\begin{array}{lll} \text{bei } \frac{1}{n} l \ldots & \frac{1}{n} l - a_1 - \frac{d}{n} \\ ,, \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ ,, \quad \frac{m}{n} l \ldots & \frac{m}{n} l - a_m - m\frac{d}{n} \\ \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ ,, \quad \frac{n-m}{n} l \ldots & \frac{n-m}{n} l - a_{n-m} + m\frac{d}{n} \\ \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ ,, \quad \frac{n-1}{n} l \ldots & \frac{n-1}{n} l - a_{n-1} + \frac{d}{n}. \end{array}$$

Setzen wir, wie dies auch für obige die anderen Methoden betreffenden Angaben geschah, voraus, dass die Empfindlichkeit der Anordnung die absolut richtige Einstellung gestattete, so ist jedes a nur mit dem Ablesungsfehler ε behaftet; nur die Differenz d wird durch zwei Ablesungen erhalten, hat demnach den Fehler $\varepsilon\sqrt{2}$.

Hieraus ergibt sich als wahrscheinlicher Fehler für die Correction bei

$$\frac{m}{n} \cdot l \text{ bez. } \frac{n-m}{n} \cdot l$$

(5) $$c_m = \sqrt{\varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon^2 \left(\frac{m}{n}\right)^2} = \varepsilon\sqrt{1 + 2\left(\frac{m}{n}\right)^2}.$$

Aus dieser Wurzel berechnen sich für $n = 10$ folgende Werthe (des besseren Vergleiches wegen seien die entsprechenden den anderen Verfahren angehörigen Zahlen ebenfalls angeführt):

Correction	1 u. 9	2 u. 8	3 u. 7	4 u. 6	5	
Strouhal u. Barus	0,09	1,59	1,90	2,07	2,12	
Heerwagen [1])	1,06 (1,03)	1,11 (1,09)	1,14 (1,12)	1,15	0,71	$=\sqrt{\frac{1}{2}}$
Differentialgalvan.	1,01	1,04	1,09	1,15	0,71	

Zur praktischen Erprobung dieses Verfahrens wurde ein Brückendraht aus Neusilber von 1 m Länge und 0,5 mm Durchmesser calibrirt, indem man parallel zu ihm den Universalwiderstandskasten (U. W. K.) schaltete. Als w zog man in einem Falle 10 S. E.; dann war, damit x etwa gleich $0{,}1\,R$ wurde, d. h. die Calibrirung in 10 Theilen erfolgte, $W = 86$ S. E. Die Correctionen der zweiten Rubrik wurden mit demselben w, aber einem etwas anderen W gewonnen, die der dritten mit $w = 20$ S. E. und $W = 182$ S. E. und mit umgekehrter Stromrichtung im Nebenzweige W, sodass eine Umsetzung von w innerhalb W eintrat, (vgl. Fig. 8).

	I.	II.	III.	Mittel
	+ 1,23 mm	+ 1,24 mm	+ 1,23 mm	+ 1,233 mm
	+ 0,67 „	+ 0,70 „	+ 0,72 „	+ 0,697 „
	+ 0,90 „	+ 0,84 „	+ 0,85 „	+ 0,863 „
	+ 0,67 „	+ 0,79 „	+ 0,75 „	+ 0,737 „
	+ 0,27 „	+ 0,37 „	+ 0,34 „	+ 0,327 „
	+ 0,34 „	+ 0,38 „	+ 0,40 „	+ 0,373 „
	− 0,24 „	− 0,19 „	− 0,23 „	− 0,220 „
	− 0,38 „	− 0,35 „	− 0,36 „	− 0,363 „
	− 0,71 „	− 0,71 „	− 0,67 „	− 0,697 „
Mitttl. Abweichg. vom Mittel:	0,0213 mm	0,0147 mm	0,0304 mm	0,0220 mm

Als derselbe Draht nach dem Verfahren von Heerwagen, bez. Strouhal-Barus calibrirt wurde, erhielt man folgende Werthe als mittlere Abweichungen vom Mittel:

Heerwagen	0,028 mm	0,027 mm	0,027 mm	0,027 mm
Strouhal-Barus	0,024 „	0,034 „	0,036 „	0,031 „

Das günstigste Resultat wurde, wie man sieht, bei der Verwendung des Differentialgalvanometert beobachtet.

Wir können somit die Ergebnisse dieses Abschnittes dahin zusammenfassen:

1) Heerwagen, l. c. p. 167.

Die in Fig. 7 dargestellte Schaltung des Differentialgalvanometers gestattet dessen Verwendung, auch ohne dass es auf Moment oder Widerstand abgeglichen ist, setzt daher kein Differentialschaltung zulassendes Galvanometer voraus; macht das Vorhandensein von n Hülfswiderständen und ihre Vertauschung unnöthig; gibt bei n Ablesungen eine noch etwas höhere Genauigkeit, als die Methode von Heerwagen bei 2n —, eine weit grössere, als die Methode von Strouhal-Barus bei 2n — 2 Einstellungen; ermöglicht es, die Aequivalentlängen von einem beliebigen Anfangspunkt aus abzugreifen und aneinanderzureihen; lässt endlich eine sehr einfache Berechnung der Correctionen zu; verlangt dagegen statt eines einzigen zwei Contacte.

IV. Galvanische Calibrirung von dickeren Drähten oder Stäben mittels des Differentialgalvanometers.

Bei der Calibrirung von dickeren Drähten oder Stäben, z. B. der zur Messung kleiner Widerstände dienenden Normaldrähte grösseren Durchmessers, handelt es sich selten darum, eine in ihren Endpunkten festgelegte Drahtlänge in gleiche Widerstandstheile zu zerlegen, sondern den relativen Widerstand der mittleren Abschnitte eines längeren Drahtes oder Stabes zu bestimmen. In diesem Falle wird man sich mit grossem Vortheil der von Braun[1]) eingeführten Schneiden von constantem Abstande bedienen und zwar in Verbindung mit dem Differentialgalvanometer.

Dieses ist hier in zwei Schaltungen anwendbar, nämlich:

1. als Differentialgalvanometer im Nebenschluss (Parallelschaltung der Widerstände), welche Schaltung schon oben (vgl. p. 204 angegeben ist (vgl. Fig. 7);

2. als Differentialgalvanometer im Nebenschluss (Hintereinanderschaltung der Widerstände) (vgl. Fig. 9).

Keine der beiden Methoden verlangt, solange die zu vergleichenden Widerstände gegen den des Galvanometers klein sind, was hier immer der Fall, dessen Einstellung, sei es auf Moment, sei es auf Widerstand.

Für Verfahren 1 ergibt sich nämlich aus Gleichung (4),

---

1) Braun, Centralz. für Opt. u. Mechan. 4. p. 134. 1883.

dass, wenn w^2 gegen $W(w + g_1)$ und x^2 gegen $R(x + g_2)$ vernachlässigt werden dürfen, folgende Beziehung besteht:

$$x = \frac{k_1 w . R(g_2 + x)}{k_2 W(w + g_1)}.$$

Dann ist mit einer zweiten Vereinfachung

$$(6) \qquad x = \left(\frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{R}{W}\right) \cdot w,$$

d. h. man darf den Widerstand x — für keine Aenderungen dem Widerstande w proportional setzen.

Der experimentelle Nachweis hierfür ergab sich in folgender Weise: Es wurde ein Neusilberdraht von 5 mm Dicke, der bei 50 cm Länge ca. 0,01 Ω Widerstand hatte, in 10 Abschnitten calibrirt. Zu diesem Zwecke befestigte man an einem Holzklotze in einem Abstande von 5 cm zwei Messingschneiden und löthete an diese die Verbindungsdrähte an, die zu einem Zweige des Differentialgalvanometers führten. Die sonstige Anordnung ist aus Fig. 10 ersichtlich; durch Regulirung des Widerstandes W vermittels $W K_1$ war erreicht worden, dass der Contact C ca. 50 cm auf dem Brückendrahte (vgl. p. 206) abgrenzte — eine Calibrirung des Brückendrahtes ist für diesen Zweck im allgemeinen unnöthig —, sodass der Ablesungsfehler gegen diese Länge vernachlässigt werden konnte.

Man stellte zwei Versuchsreihen an:

A. Der Draht N wurde bei vollständig abgeglichenem Galvanometer calibrirt, d. h. etwa:

$$k_1 = k_2, \; g_1 = g_2;$$

sodann wurde in einem Zweige eine Widerstandsänderung um etwa 5 Proc. vorgenommen, d. h. es war:

$$k_1 = k_2, \; g_1 \text{ ca.} = 0{,}95\, g_2.$$

Columne 1 und 2 unter A. geben die beobachteten Werthe wieder.

B. Die eine Rolle des Galvanometers wurde um etwa 1 cm aus der Stellung gleichen Momentes verrückt, und bei dieser neuen Stellung wurden wiederum zwei Calibrirungen vorgenommen: die erste mit gleichem Widerstand beider Zweige

$$k_1 = \nu k_2, \; g_1 = g_2;$$

die zweite mit

$$k_1 = \nu k_2, \; g_1 \text{ ca.} = 0{,}95\, g_2.$$

Die beiden Columnen unter B. stellen das Ergebniss dieser Beobachtungen dar.

A.		B.	
1	2	1	2
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0032	1,0030	1,0035	1,0033
0,9980	0,9979	0,9991	0,9989
1,0066	1,0064	1,0068	1,0068
1,0171	1,0177	1,0174	1,0174
1,0002	1,0005	1,0002	1,0002
1,0029	1,0030	1,0033	1,0030
0,9981	0,9980	0,9983	0,9981
1,0176	1,0180	1,0166	1,0165
1,0266	1,0267	1,0266	1,0265

Die Uebereinstimmung der einander entsprechenden Werthe tritt deutlich zu Tage, somit bilden die Versuche thatsächlich eine Bestätigung der Behauptung:

Die Calibrirung ist unabhängig von der Einstellung des Differentialgalvanometers, sofern diese während der Dauer des Versuches constant bleibt.

Für die andere, auf p. 207 unter 2 erwähnte Schaltung ergeben sich bei den Galvanometerwiderständen g_1 und g_2, den galvanometrischen Constanten k_1 und k_2 folgende Beziehungen (Fig. 9):

$$\frac{k_1 x}{x + g_1} = \frac{k_2 w}{w + g_2}$$

$$x = \frac{k_2 g_1 w}{k_1 g_2 + (k_1 - k_2) w},$$

und, sobald man $(k_1 - k_2) w$ gegen $k_1 g_2$ vernachlässigen darf,

(7) $$x = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{g_1}{g_2} w = \text{const.}\, w.$$

Da $k_1 - k_2$ und w / g_2 hier immer klein sind, so ist auch jene Bedingung wohl immer erfüllt, d. h. w ist den Aenderungen von x proportional.

Um auch letzere Methode experimentell zu untersuchen, wurde ein Kupferstab von 4,0 mm Durchmesser und 90 cm Länge in neun Abschnitten nach obigem und nach diesem Verfahren mit Hülfe desselben Brückendrahtes (vgl. p. 206) calibrirt, wobei man für die relativen Widerstände der einzelnen Abschnitte nachstehende Werthe erhielt:

Abschnitt	Verfahren 1	Verfahren 2
1	1,0000	1,0000
2	1,0012	1,0008
3	1,0015	1,0007
4	0,9974	0,9974
5	0,9979	0,9974
6	1,0011	1,0019
7	1,0009	1,0007
8	1,0014	1,0009
9	1,0018	1,0020

Mit Rücksicht darauf, dass der absolute Widerstand eines solchen Abschnittes etwa $^1/_{7000}\ \Omega$ betrug, sind die Differenzen, die im Mittel 0,00043, d. h. 0,00000006 Ω ausmachen, als äusserst gering anzusehen. Es darf daher auch die Anwendbarkeit dieses Verfahrens als bewiesen gelten.

Für die Entscheidung der Frage, welche von beiden Schaltungen man vorziehen soll, ist die Erwägung von grosser Wichtigkeit, dass Temperaturschwankungen bei dem letzteren Verfahren (ebenso bei dem Kirchhoff'schen) bedeutendere Fehler hervorzubringen vermögen, wenn man nicht die nöthigen Controlleinstellungen macht. Denn während der Galvanometerdraht aus Kupfer besteht, sind die Uebersetzungswiderstände meist aus einem Material mit geringem Temperaturcoefficienten hergestellt. Es wird also eine Aenderung der Temperatur um nur 0,1° C. eine Uebersetzung von etwa 1:10 schon um $^1/_{25}$ Proc. beeinflussen.

Deshalb wird sich meist die Anwendung des durch Fig. 10 verdeutlichten Verfahrens empfehlen. Es gibt wohl kein anderes, das gleich bequem, schnell und mit gleich geringen Hülfsmitteln die genaue Calibrirung dickerer Drähte oder Stäbe gestattet.

V. Die Empfindlichkeit der gebräuchlichen Widerstandsmessmethoden.

In Folgendem mögen zunächst die für die Empfindlichkeit der gebräuchlicheren Widerstandsmessmethoden gültigen Formeln — dieselben sind zum Theil schon bekannt — mitgetheilt werden. Die Zusammenstellung hat den Hauptzweck, einen bequemen Vergleich der unter gegebenen Umständen mit verschiedenen Methoden erreichbaren Empfindlichkeit zu gestatten, und war es daher wesentlich, die veränderte Schal-

tung oder Wahl der Spulen eines und desselben Galvanometers in einfacher Weise in die Formeln einzuführen.

Der Kürze halber sind nur die vereinfachten Formeln mitgetheilt, zumal die allgemeinen für den praktischen Gebrauch vielfach zu umständlich sind; die Specialisirung besteht zumeist darin, dass der Widerstand entweder des Batteriezweiges oder der eigentlichen Messcombination gegen den Gesammtwiderstand vernachlässigt sind.

Methode	Empfindlichkeitsgleichung		Voraussetzung
	Brücke		
heatstone'- he Brücke (Fig. 11)	$\delta' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{\psi}{1+\psi} \cdot \frac{1}{r + r_3 + g(1+\psi)}$	(8a)	ϱ wird vernachlässigt
	$\delta'' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{1}{g(1+\psi) + r + r_3} \cdot \frac{r_3}{r + r_3}$	(8b)	r sowie $\frac{r}{\psi}$ klein gegen ϱ
iomson'sche ppelbrücke (Fig. 12)	$\delta'' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{1}{g(1+\psi) + 2 r_3}$	(9b)	Messung kleiner Widerstände
	Differentialgalvanometer		
Brücken- schaltung (Fig. 13)	$\delta' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{\psi}{1+\psi} \cdot \frac{1}{g(1+\psi) + r + r_3}$	(10a)	Es bleiben x'' gegen g, ϱ und x' unberücksichtigt; $r = \psi r_2$
haltung von Heaviside (Fig. 14)	$\delta' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{1}{2(g+r)}$	(11a)	$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = 0$
	$\delta_1' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{1}{2r}$	(11aa)	$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = 0$; r gross gegen g
	$\delta'' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{1}{g}$	(11b)	r klein gegen g und ϱ
haltung von Kirchhoff (Fig. 15)	$\delta' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{\psi}{1+\psi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(g'+r)^2 + (g''+r)^2}}$	(12a)	$\varrho = 0$
	$\delta'' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g''^2}}$	(12b)	ϱ allein bestimmt die Hauptstromstärke
sprüngliche Schaltung (Fig. 16)	$\delta' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{r}{(g+r)^2}$	(13a)	ϱ wird vernachlässigt
	$\delta_1' = (\alpha k) E \frac{dr}{r} \cdot \frac{1}{r}$	(13aa)	ϱ wird vernachlässigt; ϱ gross gegen g

In der Tabelle sind der besseren Uebersicht wegen durchgehends folgende Bezeichnungen verwandt worden:

r für den unbekannten Widerstand;

ψ für sein Verhältniss zum Normalwiderstande (Uebersetzungsverhältniss);

dr/r für die relative Aenderung der Abgleichung;

k für die Ablenkung, welche die eine Spule durchfliessende Stromeinheit im Galvanometer hervorbringt;

α für eine von der Spulenschaltung abhängige Zahl (vgl. u.);

δ für die thatsächliche Gesammtablenkung der Galvanometernadel.

Alle anderen Bezeichnungen gehen aus den Figuren deutlich hervor.

Zu dieser Tabelle ist noch ergänzend zu bemerken, dass für die in Fig. 6 dargestellte Schaltung des Differentialgalvanometers, sowie für den übergreifenden Nebenschluss (Fig. 17) dieselben Formeln wie für die Heaviside'sche Schaltung gelten, unter den Annahmen, dass bei ersterem Verfahren $2w/g + r = 0$ gesetzt, bei letzterem ϱ_1 gegen ϱ vernachlässigt werden darf. Ferner mag noch darauf hingewiesen werden, dass, sobald der Widerstand der Messcombination gegen den des Batteriezweiges klein ist, die Empfindlichkeit bei allen Verfahren dem absoluten Werthe dr der Abgleichungsänderung und dem Ausdrucke E/ϱ, d. h. der Messstromstärke, proportional wächst, was auch leicht verständlich ist. —

Der Factor α, der in allen diesen Formeln als eine galvanometrische Constante wiederkehrt, ermöglicht es, die Empfindlichkeit für die verschiedensten Schaltungen der Galvanometerspulen zu vergleichen. Die Entscheidung über seine Grösse gründet sich darauf, dass, wenn n_1, n_2, n_3, n_4 die Windungszahlen der vier Spulen, $i_1 \ldots i_4$ die letzteren durchfliessenden Ströme und $c_1 \ldots c_4$ galvanometrische Constanten sind,

$$\delta = c_1 n_1 i_1 + c_2 n_2 i_2 + c_3 n_3 i_3 + c_4 n_4 i_4$$

wird. Setzt man der Einfachheit halber $c_1 n_1 = c_2 n_2 = \ldots = cn = k$, wo k die gleiche Bedeutung hat wie oben, *so ist α allgemein gleich der Zahl der hintereinandergeschalteten Abtheilungen.*

Der Beweis hierfür ergibt sich daraus, dass für jede aus b

parallel geschalteten Spulen bestehende Abtheilung der Constanten α eine Einheit überwiesen werden muss, indem der in dieser Abtheilung verlaufende Strom die Ablenkung

$$c \cdot \frac{i}{b} \cdot b n = 1 \cdot i k$$

hervorruft. Befinden sich a Abtheilungen hintereinander, so ist $\delta = a i k$ und $\alpha = a$.

Um experimentell darzuthun, dass man mit Hülfe obiger Tabelle die Empfindlichkeit verschiedener Methoden in einfacher Weise vergleichen kann, wurden die Ausschläge beobachtet, die man bei Aenderung der Abgleichung der Widerstände 5000, 1000, 100 und 10 S. E. um 1 Proc. erhielt unter Anwendung

a) des Differentialgalvanometers in ursprünglicher Schaltung (13a);

b) des Differentialgalvanometers in Schaltung von Fig. 6 (11 a);

c) der Wheatstone'schen Brücke (8a).

Bei a) und b) bestand jeder Zweig aus zwei parallel geschalteten Spulen ($\alpha = 1$; $g = 200$); bei c) waren einmal alle Spulen (c_1) parallel ($\alpha = 1$; $g = 100$), sodann nur je zwei Spulen (c_2) parallel ($\alpha = 2$; $g = 400$); immer waren $r_3 = 100$, $\psi = 1$ und ϱ zu vernachlässigen. Um einen Vergleich zwischen beobachteten und berechneten Resultaten zu ermöglichen, sind die für $r = 5000$ S. E. nach Methode a) erhaltene Ablenkung (5,23 cm) und der aus $\alpha r / (g + r)^2$ berechnete Werth $1 \cdot 5000 / (200 + 5000)^2$ gleich 1 gesetzt, und auf diese Einheiten die berechneten und beobachteten Ablenkungen bezogen. In der Tabelle selbst stehen der grösseren Uebersichtlichkeit wegen nur diese Verhältnisszahlen.

Widerstand	Methode *a*		Methode *b*		Methode *c*			
					c_1		c_2	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
5000	1	1	0,522	0,520	0,51	0,508	0,92	0,908
1000	3,76	3,75	2,25	2,26	2,08	2,07	2,85	2,84
100	6,02	6,08	8,98	9,04	6,77	6,89	5,42	5,42
10	1,23	1,23	12,9	12,9	8,73	8,82	5,96	6,20

Die Uebereinstimmung tritt deutlich zu Tage. —

Wir wollen jetzt auf den günstigsten Galvanometerwiderstand eingehen, behufs Ableitung einer einfachen, für die meisten Widerstandsmessungen gültigen Regel.

Zu diesem Zwecke mag zunächst der Einfluss der Spulenschaltung bei Verwendung des einfachen Galvanometers besprochen werden. Es lässt sich nämlich zeigen, dass von allen möglichen Schaltungen für die grösste Empfindlichkeit nur in Betracht kommen:

Hintereinanderschaltung aller Spulen ($\alpha = 4$; $g = 4\gamma$, wenn γ den Widerstand einer Spule bedeutet); Parallelschaltung aller Spulen ($\alpha = 1$; $g = \gamma / 4$); Parallelschaltung je zweier Spulen ($\alpha = 2$; $g = \gamma$). Zum Nachweise schreiben wir die Gleichungen für Brücke und Doppelbrücke in der Form:

$$(14) \qquad \delta = (c_1\, n) \frac{c\, \alpha}{a\, g + b},$$

in der c_1 eine Constante, n die Windungszahl einer Spule, a, b und c Functionen der Widerstände, mit Ausnahme von g, sind. δ wird also um so grösser, je kleiner g im Verhältniss zu α ist. Wir brauchen somit nur diejenigen Schaltungen in Betracht zu ziehen, die für ein und dasselbe α den kleinsten Werth von g aufweisen; diese sind a) $\alpha = 1$, $g = \gamma / 4$; b) $\alpha = 2$, $g = \gamma$; c) $\alpha = 4$, $g = 4\gamma$ und endlich d) $\alpha = 3$, $g = 2{,}5\,\gamma$. (Drei Abtheilungen, von denen die eine aus zwei parallel geschalteten Spulen besteht.)

Der weitere Nachweis beschränkt sich somit darauf, zu zeigen, dass Schaltung d) niemals vortheilhafter ist als b) oder c), oder, wenn wir die betreffenden Werthe für α und g einsetzen, dass

$$\frac{1}{a\,.\,\gamma + \frac{b}{4}} \gtreqless \frac{1}{a\,.\,\frac{2{,}5\,\gamma}{3} + \frac{b}{3}} \gtreqless \frac{1}{a\,.\,\frac{\gamma}{2} + \frac{b}{2}}\,.$$

Setzt man $a\,.\,\gamma = (1 \pm \delta)\, b\, 2$, so erhält man thatsächlich

$$9 \pm 6\,\delta \lesseqgtr 9 \pm 5\,\delta \lesseqgtr 9 \pm 3\,\delta\,.$$

Die Behauptung ist also bewiesen; sie gewinnt erhöhte Wichtigkeit, wenn man bedenkt, dass es, vom Einfluss der Isolation abgesehen, gleichgültig ist, ob man den günstigsten Widerstand durch veränderte Schaltung der gleichen oder durch Wahl anderer Rollen herstellt.

Wir leiten nunmehr die Formeln für den günstigsten Widerstand des Galvanometers — gerade die Wahl dieses Widerstandes steht in der Praxis meist offen, während die

übrigen häufig durch andere Umstände bedingt werden — allgemein für alle Empfindlichkeitsgleichungen ab, die nach Gleichung (14) gebildet sind, indem wir setzen für $n \ldots n\lambda$; für $g \ldots g\lambda^2$ und den Maximalwerth von λ suchen für

$$\frac{n\lambda . c}{a g \lambda^2 + b}.$$

Dieser ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{b}{a g}}.$$

Soll dann $\lambda = 1$ werden, d. h. die vorliegende Schaltung die günstigste sein, so wird der günstigste Widerstand

$$g_0 = \frac{b}{a}. \tag{15}$$

Die maximale Empfindlichkeit δ_0 ergibt sich mit Hülfe der Beziehungen

$$g = \frac{n . d_m . \pi}{\varrho \cdot q}; \quad n\, d_m\, \pi . q = \text{const.} = V.$$

Hieraus

$$n = \sqrt{g} . \frac{\sqrt{\varrho V}}{d_m \pi}$$

und

$$\delta_0 = \frac{\tau_m}{2 d_m \pi} . \sqrt{\varrho V} \frac{d r}{r} E . \frac{c}{\sqrt{a b}} = K \frac{d r}{r} E . \frac{c}{\sqrt{a b}}, \tag{16}$$

wo bedeuten:

τ_m die Ablenkung, welche die in der mittleren Wendung (Durchmesser d_m) fliessende Stromeinheit im Galvanometer bewirkt;

n die Gesammtwindungszahl [1] ($n\tau_m = \alpha k$);

V, ϱ, q Gesammtvolumen, Leitungsfähigkeit und Querschnitt des Kupfers;

a, b, c die den Empfindlichkeitsformeln zu entnehmenden Functionen der Widerstände;

K eine galvanometrische Constante, die bei Verwendung des Galvanometers in Differentialschaltung durch $K/\sqrt{2}$ ersetzt werden muss (da aus V der Werth $V/2$ wird). Mit

---

1) Parallelschaltung von Spulen drückt sich durch Vervielfachung des Querschnittes und Verminderung der Windungszahl aus.

Hülfe dieser Gleichungen können wir jetzt für die verschiedenen Methoden die Werthe von g_0 und δ_0 zusammenstellen, wobei der Kürze halber nur die wichtigen Formeln angeführt werden mögen.

Methode	Formel		Voraussetzung
	Brücke		
Wheatstone'sche Brücke	$g_0 = \frac{r + r_3}{1 + \psi}$	(17)	allgemein gültig
	$\delta_0' = K \frac{dr}{r} E \cdot \frac{\psi}{\sqrt{(1+\psi)^3 (r + r_3)}}$	(17a)	$\varrho = 0$
	$\delta_0'' = K \frac{dr}{r} E \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{r_3}{r + r_3} \frac{1}{\sqrt{(1+\psi)(r+r_3)}}$	(17b)	ϱ ist sehr gross
Thomson'sche Doppelbrücke	$g_0 = \frac{r + 2 r_3}{1 + \psi}$	(18)	allgemein gültig
	$\delta_0'' = K \frac{dr}{r} E \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{(1+\psi) 2 r_3}}$	(18b)	Messung kleiner Widerstände
	Differentialgalvanometer		
in Brückenschaltung	$g_0' = \frac{r + r_3}{1 + \psi}$	(19')	ϱ und $\varkappa'$, ebenso $\varkappa''$ gegen g werden vernachlässigt
	$\delta_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot K \frac{dr}{r} E \cdot \frac{\psi}{\sqrt{(1+\psi)^3 (r + r_3)}}$	(19b)	
im Nebenschluss	$g_0' = r$	(20')	$\varrho = 0$
	$\delta_0' = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{dr}{r} E \cdot \frac{1}{2 \sqrt{r}}$	(20a)	
	$g_0'' = 3 r$	(20b)	r ist klein gegen ϱ
in ursprünglicher Schaltung	$g_0 = \frac{r}{3}$	(21)	allgemein gültig
	$\delta_0' = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{dr}{r} E \cdot \frac{\sqrt{27}}{8 \sqrt{r}}$	(21a)	$\varrho = 0$

Zu dieser Tabelle muss noch bemerkt werden, dass die für die Heaviside'sche Schaltung gegebenen Werthe unter den schon früher erwähnten Bedingungen auch für den über-

greifenden Nebenschluss und die Schaltung von Fig. 6 gültig sind, dass endlich die für die ursprüngliche Schaltung gültigen Formeln mittels Gleichung (15) und (16) nicht abgeleitet werden können.

Eine Interpretation der in dieser Tabelle für den günstigsten Widerstand gefundenen Ausdrücke führt unter Berücksichtigung anderer bisheriger Resultate zu dem Satze:

Für die Brückenmethode (mit einfachem Galvanometer und Differentialgalvanometer), für die Doppelbrücke und für sämmtliche Schaltungen, in denen das Differentialgalvanometer im Nebenschluss verwandt wird, gewährt dasjenige Galvanometer resp. Differentialgalvanometer bei sonst gleicher Widerstandscombination die grösste Empfindlichkeit, dessen Widerstand gleich dem Gesammtwiderstande der mit ihm parallel verlaufenden Zweige gewählt ist. Ob man diesen Widerstand durch Wahl anderer Rollen von congruentem Wickelungsraum und gleichem Kupfergewichte oder durch verschiedene Schaltungsarten an einem und demselben Rollenpaare herstellt, ist gleichgültig. In letzterem Falle kommen bei Verwendung des einfachen Galvanometers nur in Betracht: Hintereinanderschaltung aller Spulen, Parallelschaltung aller Spulen und Parallelschaltung je zweier Spulen.

Diese Regel mag noch mit wenigen Worten erläutert werden:

Für die Brückenmethode, verlangt sie, soll (vgl. Fig. 11)

$$\frac{1}{g_0} = \frac{1}{r + r_3} + \frac{1}{r_2 + r_4}$$

sein; dies entspricht der Schwendler'schen[1]) und der oben abgeleiteten Regel

$$g_0 = \frac{r + r_3}{1 + \psi}.$$

In der Doppelbrückenschaltung laufen mit dem Galvanometer die Zweige $r_3\, r\, r_3$ und $r_3/\psi\; r/\psi\; r_3/\psi$ parallel, demnach soll (vgl. Fig. 12)

$$\frac{1}{g^0} = \frac{1}{2\,r_3 + r} + \frac{\psi}{2\,r_3 + r}$$

sein, wie auch die Formel verlangt.

Verwendet man das Differentialgalvanometer im Neben-

1) Schwendler, Pogg. Ann. **130.** p. 574. 1867.

schluss, so fordert obige Regel, dass $g_0 = r$ sei. Dies ist identisch mit (20') und kommt praktisch auf dasselbe hinaus, wie die für die Messung kleiner Widerstände erhaltene Regel, (20b) dass man $g_0 = 3r$ d. h. so klein, als irgendwie erlaubt, wählen möge.

Aus diesen für die Empfindlichkeit abgeleiteten Beziehungen lassen sich mannigfache weitere Schlussfolgerungen ziehen:

Wir könnten z. B. leicht die Frage entscheiden, ob für die Calibrirung von Widerstandskästen die einfache Wheatstone'sche Methode oder das Differentialgalvanometer im Nebenschluss (Fig. 6) empfindlicher ist; *und zwar würde sich in diesem Falle die Verwendung des Differentialgalvanometers als empfehlenswerther erweisen.*

Eine wichtigere Ueberlegenheit, die wir daher auch genauer besprechen wollen, zeigt das Differentialgalvanometer für die Messung kleiner Widerstände. Dies wird deutlich hervorgehen, wenn wir schreiben

$$\delta_0 = \left(K.\frac{dr}{r}E\frac{r}{\varrho}\right)\frac{c}{a\sqrt{g_0}} = F.\frac{c}{a\sqrt{g_0}}$$

und einführen (vgl. p. 215)

$$n\tau_m = \alpha k = \frac{2K}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{g}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes erlangt Gleichung (11b) die Gestalt

$$\delta'' = F.\sqrt{\frac{2}{g}}$$

(Differentialgalvanometer im Nebenschluss), und Gleichung (12b)

$$\delta'' = F.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{g'^2+g''^2}{g}}}$$

(Kirchhoff), wo g den Widerstand einer Galvanometerhälfte für sich, g' und g'' dasselbe wie früher bedeuten.

Hierzu kommt (Gleichung 18b)

$$\delta_0'' = F.\frac{1}{(1+\psi)\sqrt{g_{01}}} \quad \text{(Thomson).}$$

Die Eigenart der Methode gestattet es, beim übergreifenden Nebenschluss und dem Kirchhoff'schen Verfahren g sehr klein zu nehmen, g' und g'' wird man, soweit angängig, nahe gleich

g wählen, während $g_{01} = 2\,r_3 / 1 + \psi$ sich nach der Grösse des Uebersetzungsverhältnisses und des kleinsten Uebersetzungswiderstandes richtet, der jedenfalls nicht weniger als ca. 10 Ω betragen sollte, damit die Uebergangswiderstände die Uebersetzung nicht beinflussen.

Es lässt also bei der Messung kleiner Widerstände das Differentialgalvanometer im Nebenschluss grössere Empfindlichkeit zu, als die Thomson'sche Doppelbrücke, und zwar steht in erster Reihe das Kohlrausch'sche, in der zweiten das Kirchhoff'sche Verfahren.

Auf Grund dieses Ergebnisses und eines Vergleiches der Formeln (8a), (11a), (13a) lässt sich dieser Satz mit Gültigkeit für die beiden hier zumeist behandelten und praktisch wichtigen Specialfälle, dass der Widerstand des Batteriezweiges entweder zu vernachlässigen oder allein maassgebend ist für den Gesammtwiderstand, noch wie folgt verallgemeinern:

Bei der Abgleichung von Widerständen beliebiger Grösse erreicht man unter Verwendung der jedesmaligen günstigsten Galvanometerwiderstände mit Hülfe des Differentialgalvanometers eine grössere Empfindlichkeit, als mit der Brücke oder ihrer Abart der Doppelbrücke. [1])

Diese Beispiele mögen genügen, um die Verwendbarkeit der beiden Empfindlichkeitstabellen zu verdeutlichen.

---

1) Vgl. auch G. Wiedemann, Die Lehre von der Electricität. p. 462. 1882.

9. *Selbstthätige Blutgaspumpe; von A. Kossel und A. Raps.*

Die grossen Vortheile, welche die Anwendung einer selbstthätig arbeitenden Quecksilberluftpumpe bei der Bestimmung der im Blute und in anderen Flüssigkeiten enthaltenen Gase bietet, veranlassten uns, die in dieser Zeitschrift [1]) angegebene selbstthätige Quecksilberluftpumpe auch für derartige Zwecke anwendbar zu machen. [2])

Die hier auseinandergesetzte Vorrichtung macht die mechanischen Handleistungen und die Anwesenheit des Experimentators vollständig entbehrlich; derselbe braucht nur die zu entgasende Flüssigkeit in die zuvor von der Pumpe selbstthätig evacuirten Räume einzulassen. Die Pumpe sammelt dann die Gase selbstthätig in einer Glaskugel auf, aus welcher dieselben nach vollendeter Entgasung des Blutes nur in ein Eudiometergefäss geschafft zu werden brauchen.

Da die Theile der Blutgaspumpe, welche das selbstthätige Heben des Quecksilbers und die Evacuirung besorgen, vollständig mit denjenigen der früher beschriebenen Quecksilberluftpumpe übereinstimmen, so werden sie hier nicht mehr auseinandergesetzt, sondern es wird hinsichtlich derselben auf die soeben erwähnte Abhandlung verwiesen. Hier sollen nur die Vorrichtungen beschrieben werden, welche zum Aufsammeln und Trocknen der ausgepumpten Gase dienen; ferner die Räume, in welche die zu entgasenden Flüssigkeiten eingeleitet werden.

Fig. 1 stellt die Vorrichtung zum selbstthätigen Heben des Quecksilbers dar, Fig. 2 (theilweise durchschnitten) die Blutgaspumpe selbst. Die beiden Figuren gehören eigentlich zusammen, sie sind nur der leichteren Uebersicht wegen ge-

---

1) A. Raps, Wied. Ann. **43.** p. 629. 1891.

2) Blutgaspumpen, bei welchen das Geschäft des Quecksilberhebens schon wesentlich erleichtert ist, aber doch der Experimentator beständig zugegen und aufmerksam sein muss, haben H. Kronecker Zeitschr. f. Instr. 1889, p. 280 u. H. Hüfner, Wied. Ann. **1.** p. 629. 1877 beschrieben.

trennt angegeben. (Man muss sich das Rohr *h* der Glaspumpe als Fortsetzung des in Fig. 1 gezeichneten Rohres *h* denken.) Fig. 2 ist vollständig identisch mit der in Fig. 2 der eben erwähnten Abhandlung gezeichneten Glasluftpumpe, bis auf die Theile, welche an das Gefäss *S* angesetzt sind. Auf die etwa

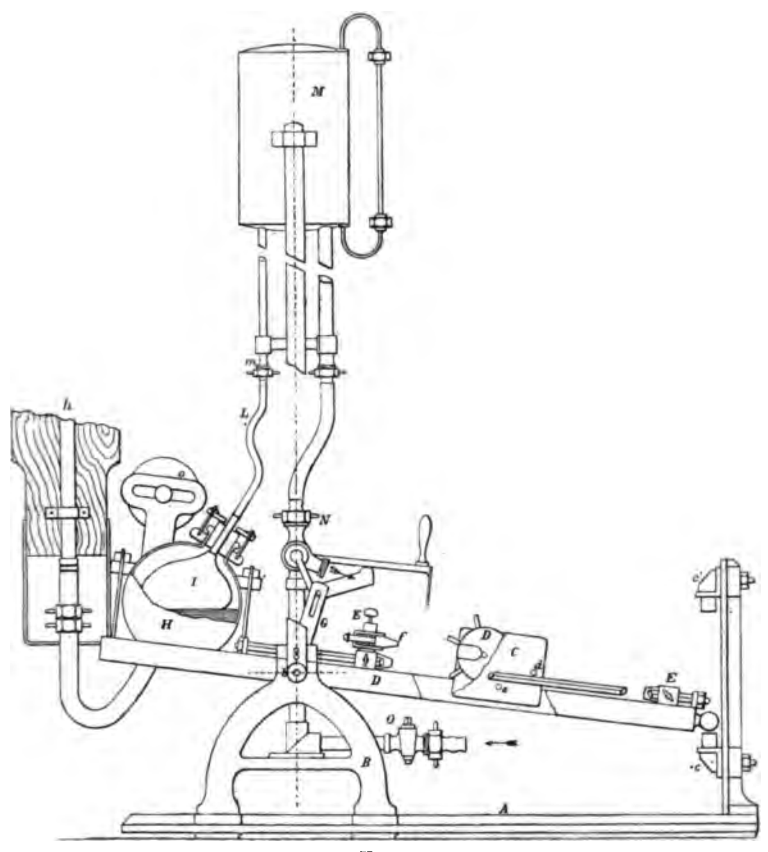


Fig. 1.

$^1/_4$ l fassende abgeplattete Glaskugel *S* ist ein Dreiwegehahn *s* aufgesetzt, welcher die Kugel sowohl mit der Wasserluftpumpe (durch das Rohr *s''*), als auch mit dem Auslassrohr *s'* zu verbinden gestattet. Das Rohr *s* ist in das weitere Gefäss *Y* in der aus Fig. 2 zu ersehenden Weise eingeschmolzen.

Es soll nun angenommen werden, dass die Pumpe (Fig. 2)

die mit ihr verbundenen Räume *u*, *v'*, *v* so weit als nöthig leer gepumpt habe und der Dreiwegehahn *s* so gestellt sei, dass *S* und *s'* durch *s''* mit der Wasserluftpumpe in Verbindung stehen. Dann herrscht in *S* ein Luftdruck, welcher der Tension des Wasserdampfes bei der jeweiligen Temperatur gleichkommt. Da die Blutgase aber nachher in dem Raume *S* aufgesammelt und nach vollendeter Aufsammlung in das Eudiometer *Z* geschafft werden sollen, so muss *S* ganz luftleer gemacht werden, damit nicht etwa die noch in *S* enthaltene Luft auch in das

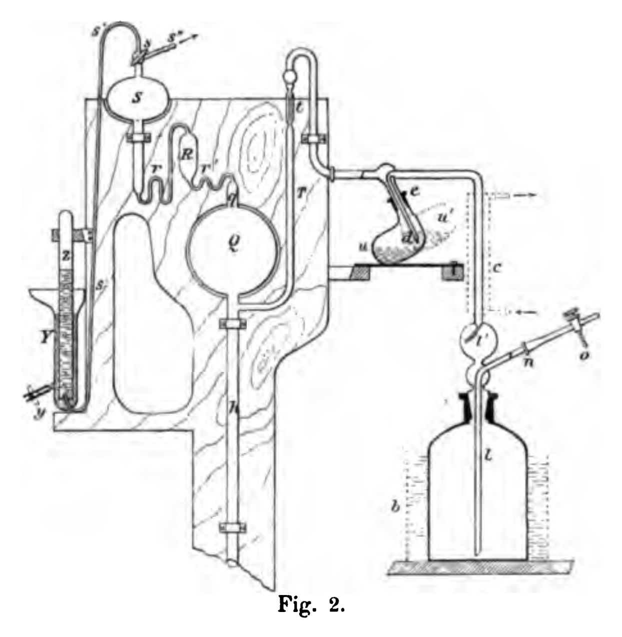


Fig. 2.

Eudiometer gelange. Zu diesem Zwecke wird durch Drehung des Dreiwegehahnes *s* die Verbindung von *S* mit der Wasserluftpumpe aufgehoben und *S* mit *s'* verbunden, dann die Wippe *D* der Pumpe mit dem Fusse oder einem untergeschobenen Brette so lange festgehalten, bis das Quecksilber *S* ganz erfüllt und die Luft durch *s'* herausgedrängt hat. [1]) Nunmehr wird die

1) Man sperrt die Wasserleitung passend in dem Augenblicke ab, in welchem das Wasser bis an das Ende des Wasserstandrohres am Luftcompressor gestiegen ist. Der dann vorhandene Druck genügt, um das Quecksilber überzutreiben.

Wippe losgelassen. Das Eudiometerrohr ist während dieser Zeit selbstverständlich noch nicht in *Y* eingesetzt. Nachdem nun die Luft aus *S* entfernt ist, sperrt man durch eine achtel Drehung des Hahnes *s*, *s'* gegen *S* ab, füllt *Y* ganz mit Quecksilber an und taucht das ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Eudiometerrohr *Z* ganz in *Y* ein, indem man darauf achtet, dass *Z* über dem herausragenden Ende von *s'* steht. Dann lässt man nach Lösung des Quetschhahnes *f* das überflüssige Quecksilber durch *Y* (bis zu dessen Einmündestelle) ablaufen und stellt die Verbindung zwischen der Kugel *S* und dem Auslassrohr *s'* durch passende Drehung des Hahnes *s* wieder her. Die Pumpe ist nun zur Aufnahme der zu entgasenden Flüssigkeit bereit, welche in das grosse Schaumgefäss *v* eingelassen wird, dessen Einrichtung aus der Zeichnung genügend hervorgeht.[1]) Ein grosser Vortheil der selbstthätigen Einrichtung besteht darin, dass die Räume *v* und *v'* beliebig gross gemacht werden können, ohne dass die Mühe des Experimentators dadurch vermehrt wird; die Entleerung nimmt nur eine längere Zeit in Anspruch. Durch die Vergrösserung der Räume wird nicht nur eine schnellere Abgabe der Blutgase bewirkt, die nach Pflüger bekanntlich von grosser Wichtigkeit ist, sondern auch die Gefahr des Ueberschäumens erheblich herabgesetzt. An den Schliff *n* kann ein passend gebohrter Hahn *o*, ein Geppert'scher Messapparat oder dgl. angesetzt werden. Das Schaumgefäss *v* hat einen sehr grossen Durchmesser und einen flachen Boden, damit eine schnelle Entleerung der Gase aus der dünn ausgebreiteten Blutschicht stattfindet und ein Einschliessen von Gas durch das eingetrocknete Blut möglichst vermieden wird. Das Gefäss *v* kann in ein grösseres *l* eingesetzt werden, welches noch zu weiterer Beschleunigung der Entgasung mit warmem Wasser gefüllt wird. Auch ein Liebig'scher Kühler *c* kann angebracht werden, welcher ein zu schnelles Eintrocknen des Blutes verhindern soll.

Eigenthümlich angeordnet ist das Trockengefäss *u*. Dasselbe ist in einem schräg gestellten Zapfen *d* luftdicht eingeschliffen und kann (auch bei höchstem Vaccuum) um denselben gedreht werden. In das Gefäss wird soweit concentrirte

1) An Stelle des grossen Schaumgefässes können für andere Zwecke kleinere Gefässe angesetzt werden.

Schwefelsäure eingegossen, dass dieselbe (in der Stellung des Gefässes *u*) das Rohr *d* gerade berührt. Wird das Gefäss um 180° gedreht (d. h. in die in Fig. 2 gestrichelt angegebene Lage *u'* gebracht), so taucht die Mündung des Rohres *d* einige Centimeter tief unter die Oberfläche der Schwefelsäure. Kurz bevor man nun das Blut in *v* einlässt, wird das Gefäss in die Lage *u'* gebracht. Jetzt müssen die Blutgase, ehe sie in die Pumpe *Q* gelangen, durch die Schwefelsäure hindurchstreichen und gelangen vollständig getrocknet in die Pumpenkugel *Q*. Nachdem nun die Tension der Blutgase so gering geworden ist, dass sie die kleine Flüssigkeitssäule in *u'* nicht mehr zu überwinden vermögen, wird *u'* um 180° gedreht und die Gase haben vollständig freien Zutritt zu der Pumpe. Das Rohr *d* ist unten etwas erweitert und abgeschrägt, damit nicht etwa ein capillar eingezogener Flüssigkeitstropfen dasselbe verstopfen könne. Das Gas wird durch diese Vorrichtung, welche sich sehr leicht entfernen und reinigen lässt, ausgezeichnet getrocknet und macht ein zweites, mit Phosphorsäureanhydrid gefülltes Gefäss für die meisten Zwecke vollständig entbehrlich.

Nachdem nun sämmtliches Gas aus dem Blute ausgepumpt und in den Raum *S* geschafft ist, wird es in das Eudiometer *Z* übergedrückt, wo ebenso verfahren wird, wie vorhin bei der Luftentleerung der Kugel *S* angegeben wurde.

Berlin, Phys. Inst. u. chem. Abth. d. Phys. Inst. d. Univ.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1893. ANNALEN № 6.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 49.

1. *Ueber electrische Widerstandsbestimmung mit Wechselströmen; von F. Kohlrausch.*

Ich möchte durch diese Mittheilung die obige Methode, besonders auch die von mir mit derselben ausgeführten Bestimmungen endgültig gegen Bedenken sichern. Zu dem Zwecke sollen die für die Richtigkeit innezuhaltenden Bedingungen nach den verschiedenen Seiten experimentell untersucht werden. Schwierigkeiten, welche bisher nicht überwunden sind, entstehen hauptsächlich bei sehr grossen Widerständen. Hierüber kann ich eine Anzahl von neuen Erfahrungen beibringen, die manche Hindernisse beseitigen.

Veranlasst wurde ich zu der neuen kritischen Behandlung des Verfahrens durch die frühere Arbeit von Hrn. M. Wien.[1]) Seitdem ist freilich schon Hr. Elsas[2]) den Einwendungen von Wien mit Versuchen entgegengetreten. Ferner schliesst im letzten vorjährigen Hefte der Annalen Wien[3]) selbst seine Kritik, die in dem ersten Aufsatz bei dem Leser Bedenken gegen die Methode erregen konnte und theilweise erregt hat, damit ab: „es soll mit dem Vorstehenden kein Einwand gegen die K'sche Methode zur Messung von Flüssigkeitswiderständen mit Wechselstrom und Hörtelephon erhoben werden ... Es sollte nur nachgewiesen werden, dass methodische Fehler auftreten *können* . . . Dieselben sind secundärer Natur und meist klein; in meinem Falle hielten sie sich immer innerhalb 0,1 Proc.“

Hiermit hat Wien seine Bedenken zurückgenommen; wenigstens entspricht diese Bemerkung ziemlich genau der Ansicht, welche ich über die Methode gewonnen und vertreten hatte.

1) M. Wien, Wied. Ann. **42.** p. 593. 1891.
2) Elsas, Wied. Ann. **44.** p. 666. 1891.
3) Wien, Wied. Ann. **47.** p. 636. 1892.

Es ist aber doch nicht überflüssig, meine experimentelle Prüfung zu veröffentlichen. Denn die Theorie führt, wegen des von Wien erörterten gleichzeitigen Vorhandenseins verschiedener Schwingungsperioden in den meisten Wechselströmen zu keiner quantitativen Fehlerbestimmung. Die von Elsas angestellten Versuche betreffen einzelne Puncte und beziehen sich auf seinen Differentialinductor, für welchen nach Wien andere Verhältnisse gelten wie für die gebräuchlichere Brückenanordnung. Weiter wird sich Gelegenheit geben, manches weniger bekannte zu betonen und einiges neue mitzutheilen.

Endlich aber steht oder stand Wien mit seinen Bedenken nicht allein. Z. B. äussert Hr. R. Lohnstein[1]) in einer neuen Arbeit über Uebergangswiderstände zwischen Metallplatten und Electrolyten: „Es ist anzuerkennen, dass die von F. Kohlrausch eingeführte Wechselstrommethode ... unter Beobachtung aller erforderlichen Cautelen eine für *praktische* Zwecke im allgemeinen ausreichende Genauigkeit zu erreichen gestattet. Anders steht die Sache, wenn es sich darum handelt, aus den so gewonnenen Zahlen weitergehende theoretische Schlussfolgerungen zu ziehen . . .“ Hr. Lohnstein scheint somit die Resultate einer grossen Reihe von Arbeiten verschiedener Verfasser in Zweifel zu ziehen.

Bei diesen Gelegenheiten werden ältere Versuche von Bouty und Foussereau, mit colossalen Differenzen und scharfen Einwänden gegen die Methode der Wechselströme immer noch in's Feld geführt, die zu beleuchten demnach nicht überflüssig erscheint.

Ich möchte mir aber doch auch erlauben, auf einen Umstand hinzuweisen, welchen die Kritiker der Wechselstrommethode wohl nicht hinreichend beachtet haben. Diejenigen zahlreichen Beobachter, welche, im Anfange ebenfalls theilweise misstrauisch, diese Methode zu ausgedehnten Messungen gebrauchten, haben sich durchweg mit derselben befreundet. Fehler durch das Verfahren werden nicht gefunden, während solche sich doch unter den Augen umsichtiger Beobachter in Widersprüchen fühlbar gemacht haben würden. Auch sind ja kritische Experimentaluntersuchungen über das Verfahren selbst

1) R. Lohnstein, Wied. Ann. **47.** p. 299. 1892.

2) Bouty u. Foussereau, Journ. d. phys. (2) **4.** p. 419. 1885.

schon früher ausgeführt worden, z. B. von Tollinger, Ostwald, Sheldon, und wiederholt von mir selbst. Stets hatte sich ergeben, dass bei Beobachtung der erforderlichen Cautelen die Methode reichlich so genau arbeitet wie die theoretischen Schlussfolgerungen dies erfordern. Ich glaube, man unterschätzt diese Arbeiten, wenn man sie bei der Kritik unbeachtet lässt.[1])

Die bleibenden Schwierigkeiten, Unsicherheiten und gelegentlich vorkommenden kleinen Differenzen bei der Bestimmung des Leitungswiderstandes von Electrolyten mit Wechselströmen sind mehr von der chemischen als von der electrischen Seite solcher Arbeiten verschuldet und auf der letzteren mehr durch die absoluten Ausmessungen und den Temperatureinfluss als durch die Widerstandsvergleichungen.

Auf der chemischen Seite der Arbeit aber liegen in der Reindarstellung, der quantitativen Analyse, gelegentlich in der Veränderlichkeit der Lösungen, bei grosser Verdünnung in dem Einfluss der Electroden oder der Gefässwände, in der Beschaffenheit des Wassers etc. Schwierigkeiten, die nicht immer zu beseitigen sind, und Fehlerquellen von oft erheblichem Betrage.

Für das electrische Verfahren kann ich die mir zugeschriebene Verantwortung — natürlich innerhalb der meinerseits innegehaltenen Grenzen und unter den von mir betonten Bedingungen — vollständig übernehmen, wie das folgende noch einmal zeigt.

Die Forderung, welche an das Verfahren zu stellen ist, beschränkt sich im wesentlichen darauf, dass *zwischen verschiedenen Widerstandsgefässen, wenn man dieselben mit verschiedenen* (in jedem Falle natürlich mit zwei gleichen) *Flüssig-*

1) Auch Hr. Wien selbst hatte eine vortreffliche Bestätigung ausgeführt. Er gibt nämlich am Schlusse seiner früheren Abhandlung (Ann. XLII, 621) eine Reihe von Messungen an verdünnten Schwefelsäuren mit dem optischen Telephon. Er findet für das spec. Gewicht 1,220 die Leitfähigkeit 691,4; in meiner Tabelle (Pogg. Ann. **159.** p. 242. 1876) steht für dieselbe Concentration 691,1. Die beste Leitfähigkeit ist nach Wien 691,9 für 1,224; ich hatte abgeleitet 691,4 ebenfalls für 1,224 (l. c. p. 260). Wie vortrefflich eine solche Uebereinstimmung ist, zeigt die Ueberlegung, dass die Abweichung durch einen Unterschied der beiderseitigen Thermometer von $^1/_{20}$ Grad erklärt werden würde. Wien's Curvenstück fügt sich überhaupt sehr gut in meine Curve ein.

keiten füllt, immer dasselbe Verhältniss der Widerstände gefunden wird. Denn man ermittelt die Widerstandscapacität eines oder mehrerer Gefässe zunächst mit anderweitig einwurfsfrei auf ihr Leitvermögen untersuchten Flüssigkeiten und bestimmt aus dieser Capacität empirisch das Leitvermögen anderer Lösungen und die Capacität anderer Gefässe. Vorausgesetzt ist, dass eins von den verglichenen Gefässen hinreichend grosse Electroden hat, um die Polarisation auszuschliessen, was nur eine quantitative Frage ist und sich ausserdem bei der Vergleichung selbst entscheiden lässt.[1])

Auch das Verhalten der Drahtwiderstände gegen die Wechselströme wird bei der oben genannten Untersuchung zum grossen Theile mit erkannt. Einige besondere Beobachtungen darüber sollen aber auch mitgetheilt werden.

Endlich ist es natürlich nicht überflüssig, die Widerstandscapacitäten der Gefässe, mit denen zuerst Grotrian und ich, später ich allein und ausserdem viele Beobachter die beobachteten Widerstände in Leitungsvermögen umgerechnet haben, mit den jetzigen besseren Mitteln noch einmal zu bestimmen und auf die jetzt besser definirten Grundeinheiten zurückzuführen. Das soll Gegenstand einer anderen Mittheilung werden.

Das hier meist gebrauchte Inductorium ist von der früher angegebenen[2]) durch Hartmann und Braun ausgeführten Form mit massivem Eisenkern, mit Platinstift-Quecksilberunterbrechung unter destillirtem Wasser mit etwa 85 Unterbrechungen in der Minute. Die Erregung wurde gewöhnlich durch einen Accumulator bewirkt. Der Platinstift ist mit dem negativen Pole verbunden. Die innere Rolle hat 5, die äussere im Ganzen 30 Ohm Widerstand.

1) Die von Hrn. Lohnstein bei electromotorischen Kräften von der Ordnung 0,00001 Volt an blanken Zinkelectroden beobachteten recht erheblichen „Uebergangswiderstände" kommen ohne Zweifel bei unseren unvergleichlich grösseren Kräften nicht in Betracht. Zwischen aufgelockerten Electroden, denen die platinirten wohl analog sind, unterwerfen sich auch den kleinen Kräften gegenüber, wie Lohnstein zeigt, die Flüssigkeiten dem Ohm'schen Gesetz. Ich darf erwähnen, dass Nippoldt und ich schon 1869 (Pogg. Ann. **138.** p. 374) für Kräfte bis 0,00001 Volt herab für Zinklösungen das Ohm'sche Gesetz prüften und bestätigt fanden.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **11.** p. 653. 1880.

Die „Brückenwalze" hat einen 3 m langen Draht von 10 Ohm. Das Telephon sitzt *an den Enden des Brückendrahtes.* An den letzteren konnte beiderseitig der $4^1/_2$ fache oder einseitig der 9fache Widerstand vorgeschaltet werden.

Das Prüfungsmaterial, obwohl es an sich kein Interesse bietet (die Concentrationen der Lösungen sind nur genäherte Angaben), muss natürlich, um durchsichtig zu sein, theilweise in Zahlen wiedergegeben werden.

1. Die Genauigkeit der Einstellung.

Hr. Wien sagt (p. 602): „jedenfalls kommt man (mit dem Hörtelephon) nicht über eine Genauigkeit von $^1/_{10}$ Proc. hinaus." Später (p. 615) wird eine Beobachtung an Schwefelsäure mit optischem Telephon und Hörtelephon mitgetheilt, für das erstere 0,018 Proc. für das letztere 0,25 Proc. als mittlerer Einstellungsfehler gefunden. Aehnliche Ungenauigkeiten wie die letztere sind mir nun bei Tausenden von Einstellungen niemals begegnet, wenn nicht Contactfehler vorhanden waren, oder vielleicht das Inductorium dem Telephon sehr nahe gestanden hätte, oder das Minimum der Tonstärke so wenig ausgeprägt war, dass ich solche Beobachtungen nicht als einwurfsfreie ausgeben mochte. Dass irgend etwas bei den genannten Beobachtungen nicht in Ordnung war, möchte ich auch aus der Abweichung von $^1/_2$ Proc. der Mittelwerthe von Hörtelephon und optischem Telephon schliessen, besonders da, wie gesagt, Hr. Wien in seiner späteren Abhandlung äussert, dass die Abweichungen innerhalb 0,1 Proc. blieben. Es wäre wohl zweckmässig gewesen, jene frühere Beobachtungsreihe später noch einmal zu erläutern.

Wenn ich von dieser Reihe absehe, und mit Wien eine Einstellungsgenauigkeit von 0,1 Proc. annehme, so wäre dieselbe ja bei Widerständen von Electrolyten im allgemeinen ausreichend, da sie einer Aenderung der Temperatur um etwa $^1/_{20}$ Grad entspricht. Ich hatte aber eine grössere Genauigkeit angegeben[1]) und habe um dies zu prüfen, einige Beobachtungsreihen angestellt, die ich hier mittheile. Es wurden

1) F. K., Wied. Ann. **26.** p. 181. 1885.

Lösungen von $KHSO_4$[1]) ($^1/_5$ normal) in einem kleinen und dann in einem grösseren Gefäss mit einem Stück von 100 S. E. verglichen. Dem Brückendraht der Walze war beiderseitig der $4^1/_2$ fache Betrag seines Widerstandes vorgeschaltet, sodass 1 Sc. T. etwa $^1/_{2500}$ Aenderung des Widerstandes entsprach. Die Gefässe standen in der Luft.

Das grössere Gefäss hatte Electroden von 30 cm², das kleinere solche von 10 cm². Die Einstellungen, welche mit geschlossenen Augen ausgeführt wurden, ergaben hintereinander die Widerstände:

kleines Gefäss		grosses Gefäss		berechnet	
93,507	+ 0,012	98,251	+ 0,010	98,2520	− 0,0010
93,499	+ 0,004	98,251	+ 0,010	98,2497	+ 0,0013
93,496	+ 0,001	98,247	+ 0,006	98,2474	+ 0,0019
93,499	+ 0,004	98,247	+ 0,006	98,2451	− 0,0004
93,496	+ 0,001	98,243	+ 0,002	98,2428	+ 0,0002
93,492	− 0,003	98,240	− 0,001	98,2405	− 0,0005
93,488	− 0.007	98,236	− 0,005	98,2382	− 0,0022
93,492	− 0,003	98,236	− 0,005	98,2359	+ 0,0001
93,492	− 0,003	98,236	− 0,005	98,2336	+ 0,0024
93,488	− 0,007	98,228	− 0,013	98,2313	− 0,0033
93,495		98,241			

Die Abweichungen entsprechen einem mittleren Fehler von ± 0,0066 bez. ± 0,0078 Proc. Nun sieht man aber noch auf den ersten Blick, dass der grösste Theil der Abweichungen von einem Gange der Temperatur herrührt. Unter Annahme eines gleichmässigen Ganges sind für das grosse Gefäss die unter berechnet geschriebenen Werthe berechnet, welche mittlere Abweichungen von ± 0,0020 Proc. (entspr. ± 0,05 Sc. T. oder ± 0,002°) ergeben, also 50mal kleiner als ± 0,1 Proc. Das Minimum ist in der That so scharf, dass nur die Grenze der mechanischen Einstellungsgenauigkeit in Betracht kommt. Auch andere Beobachter, welche ich einzustellen bat, erreichten dieselbe Genauigkeit.

Also unter günstigen Verhältnissen gibt das Hörtelephon jede irgend noch nützliche Genauigkeit.

---

1) Dieser Körper ist wegen der geringen Temperatureinwirkung für solche Versuche am geeignetsten (Wied. Ann. **6.** p. 41. 1879).

2. Fehler von den Widerstandsrollen.

Die grösste Einschränkung der Messungen mit Wechselströmen liegt nach meiner Ansicht in den Widerstandsrollen. Es ist ein Verdienst Hrn. Wien's, dass er die hierher gehörigen Fragen, welche ich nur für die Selbstinduction zusammen mit der Polarisation in einfachem Stromkreise behandelt hatte[1]), im Anschluss an Entwickelungen von Oberbeck für die Brückenschaltung behandelt und dadurch die Möglichkeit gegeben hat, die Erscheinungen zu übersehen, den Betrag der Fehler zu schätzen und die Hindernisse besser zu beseitigen als früher möglich war.

Durch Unachtsamkeit können hier merkliche Fehler entstehen.[2]) Die Selbstinduction von Rollen lässt sich durch sorgfältige Wickelung bis auf einen kleinen Betrag vermeiden und ist in besseren Rheostaten kaum vorhanden. Es ist auch zu beachten, dass der Einstellungsfehler dem Quadrate des

---

1) F. K., Pogg. Ann. **148**. p. 149. 1872; M. Wien, Wied. Ann. **47**. p. 627. 1892.

2) Wir sind übrigens von vornherein vorsichtig und einwurfsfrei zu Werke gegangen. Bei den ersten Arbeiten, die ich zunächst mit Grotrian, später allein ausgeführt habe, sind immer geradlinig alternirend gespannte Rheostatendrähte gebraucht worden und zwar wurden die Gefässe so gewählt, dass Widerstände von etwa 50 bis 1000 Ohm zur Messung kamen. Später überzeugte ich mich davon, dass Siemens'sche Rheostatendrähte inductionsfrei gewickelt waren und benutzte auch diese oder selbstgewickelte Rollen. Aber über Rollen von etwa 2000 Ohm konnte man in der Regel nicht hinübergehen, ohne dass das Ton-Minimum seine Präcision empfindlich einbüsste. Für die Messung sehr grosser Widerstände wie am Wasser und an Lösungen von 1/10000 Molecül war das freilich unbequem. Man bemerkte dann bald, dass es die mit der Drahtlänge wachsende Capacität war, welche störte, wie man schon daraus schliessen konnte, dass sorgfältig bifilar gewundene Rollen oft ungünstiger wirkten als regellos bifilar aufgelaufene Drähte.

Aus Neugier habe ich oft auch grössere Widerstände als 2000 (4000 bis 10000, die letzteren aus 4 Stücken zusammengefügt) eingeschaltet. Zuweilen findet man auch hier das Minimum ganz gut, offenbar durch Compensation der Rollencapacität durch diejenige der Flüssigkeitszellen (§ 6, b). Aber auch wenn es schlecht war, ergab die Einstellung mitten zwischen benachbarten Punkten gleicher Tonstärke stets Widerstände, welche innerhalb 1 Proc. übereinstimmten. Da dies für die betreffenden Messungen am Wasser und an den verdünntesten Lösungen genügte, so reichten also die Mittel für meine Zwecke vollkommen aus.

Quotienten aus Selbstinduction durch Widerstand proportional ist (Wien p. 627), sodass auch für grosse Rollen keine Fehlerquelle von Belang vorliegt.

Anders mit der Capacität. Diese kommt in dem Fehler mit dem Widerstande multiplicirt vor. Da sie ausserdem selbst cet. par. der Drahtlänge proportional ist und ferner bei bifilarer Wickelung den grössten Betrag erreicht, so folgt, dass dieser Fehler mit wachsendem Widerstande der bifilaren Rheostatenrollen immer wachsen muss, dass also grosse Rollen unbrauchbar sein müssen. Ich habe schon früher festgestellt, dass Siemens'sche Rheostatenrollen in der Regel höchstens bis zu etwa 2000 Ohm anwendbar waren, wenn man ein anständiges Minimum haben will (vgl. die Anm.). Solange das letztere aber noch besteht, findet man Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen mit verschiedenen Rollen. Wien hat gezeigt, dass dies mit der Theorie stimmt. Das Minimum wird durch die Obertöne, wenn man die noch zulässigen Beträge von Selbstinduction oder Capacität überschreitet, so rasch verwaschen, dass man bei Messungen von selbst an der Ueberschreitung gehindert wird.

Die Hrn. Bouty und Foussereau fanden mit Rollen von 100000 Ohm Fehler von 20 Proc. Nun ja, 100000 Ohm bilden eben einen Betrag, der durch die Capacität einer bifilar gewundenen Rolle das Zulässige weit übersteigt. Man kann kaum umhin, mit Hrn. Elsas zu fragen, wie eine Einstellung denn noch möglich war? Ich konnte mit einer 100000 Ohm-Rolle von Siemens und Halske durchaus nicht mehr beobachten. Wenn die Hrn. Bouty und Foussereau weiter sagten, dass dies „eine Fehlerquelle ist, mit welcher die Physiker, welche die Methode der Wechselströme angewandt haben, sich nicht genügend vorher beschäftigt zu haben scheinen", so erklärt sich dies, soweit meine Person in Frage kommt, wohl daraus, dass mein ausführlicherer Aufsatz (über verdünnte Lösungen) erst etwa gleichzeitig mit dem ihrigen erschienen ist. Vielleicht hätten die Verfasser den Physikern eine solche Unaufmerksamkeit gar nicht zutrauen sollen.

Ich constatire noch, dass Hr. Chaperon[1]) als Grenze

1) Chaperon, Compt. rend. **108.** p. 799. 1889 I.

von für Wechselströme brauchbaren gewöhnlichen Rheostatenwiderständen ebenfalls 2000 bis 5000 Ohm nennt.

Als experimenteller Beleg für meinen Siemens'schen Rheostaten dienen folgende Vergleichungen. Die Abweichungen geben in Procenten den Ueberschuss des mit dem Telephon über das mit dem Galvanometer gefundene Widerstandsverhältniss.

Das Minimum war bei den grossen Widerständen von 1000 an schlecht, bei dem letzten sehr schlecht; man nahm die Mitte zwischen Punkten gleicher Tonstärke.

Stücke:	$\frac{\Sigma\,0{,}1 \text{ bis } 0{,}4}{1}$	$\frac{1+3}{4}$	$\frac{\Sigma\,1 \text{ bis } 4}{10}$	$\frac{10+30}{40}$	$\frac{\Sigma\,10 \text{ bis } 40}{100}$
Abweich.:	− 0,1	− 0,02	+ 0,020	+ 0,012	− 0,001 %

Stücke:	$\frac{100+300}{400}$	$\frac{\Sigma\,100 \text{ bis } 400}{1000}$	$\frac{1000+\Sigma\,100 \text{ bis } 400}{2000}$
Abweich.:	− 0,002	+ 0,016	+ 0,08 %

Stücke:	$\frac{1000+2000}{3000}$	$\frac{1000+3000}{4000}$
Abweich.:	+ 0,12	+ 0,33 %.

Wegen etwaiger Bedenken über die Selbstinduction in dem aufgewundenen Brückendraht theile ich noch Vergleichungen von Stücken mit, die nahe im Verhältniss 10 : 1 standen. Die Vergleichungen wurden theilweise mit Vorschaltung des 9fachen Widerstandes des Brückendrahtes, theilweise ohne dieses Mittel der Genauigkeitsvermehrung gemacht. Die Abweichungen geben wie oben in Proc. den Ueberschuss des mit dem Telephon über das mit constantem Strom gefundene Verhältniss.

	$\frac{40}{4}$	$\frac{100}{10}$	$\frac{200}{20}$	$\frac{400}{40}$	$\frac{1000}{100}$	$\frac{2000}{200}$	$\frac{4000}{400}$
	+ 0,03	±	+ 0,02	+ 0,04	+ 0,02	− 0,24	+ 0,4 %
Ohne Vorschaltung:			+ 0,14	+ 0,09	+ 0,11	− 0,07	− 0,5 %.

Bis zu 1000 hinauf kann ich also diesen Siemens'schen Rheostaten mit gleichem Erfolg mittels Wechselströme wie mittels constanter Ströme calibriren. Oberhalb 1000 kommen Fehler, die schliesslich auf 0,5 Proc. steigen, sich aber auch durch ein äusserst schlechtes Minimum anzeigen.

Alternirend gewickelte Widerstände nach Chaperon. Erst durch die Bemerkung von Elsas bin ich mit der von Chaperon (l. c.) vorgeschlagenen Anordnung grosser Widerstände bekannt geworden, welche die grosse Capacität derselben durch

ein einfaches Mittel beseitigt, ohne die Inductionslosigkeit damit zu beeinträchtigen; nämlich dadurch, dass unifilar gewickelt aber nach jeder Lage die Richtung des Wickelns umgekehrt wird. Das ist in der That ein vorzügliches Mittel, durch welches mindestens Widerstandsrollen von 30000 Ohm noch für Wechselströme geeignet erhalten werden können.

Da die Capacität auch bei kurz dauerndem „constantem" Strom stört oder Fehler gibt, so sollten alle grossen Widerstände von 1000 an in der Chaperon'schen Weise gewickelt sein. Die Wickelung ist aber, wenn man nicht mit Maschine arbeitet, mühsam. Man wird leichter so arbeiten, dass man wie früher die einzelnen Lagen bifilar wickelt, wodurch man des lästigen Zählens überhoben wird, sie aber durch Löthen derart miteinander verbindet, dass die Chaperon'sche Anordnung entsteht.

Stücke von etwa 1000, 13000 und 30000 Ohm, nach Chaperon gewickelt, liessen sich telephonisch mit einem ganz brauchbaren Minimum untereinander vergleichen und ihre so gefundenen Verhältnisse stimmten mit den galvanometrisch ermittelten innerhalb 0,15 Proc. Abweichung überein.

Chaperon selbst fand ebenfalls bei Stücken von 25000 Ohm, welche mit einer Maschine gewickelt waren, noch ein tadelloses Minimum.

Hierin liegt ein sehr grosser praktischer Fortschritt.

Es mag aber, wie auch Elsas erwähnt, darauf hingewiesen werden, dass man einen ähnlichen Vortheil erreicht, wenn man grosse Widerstände aus einzelnen kleineren Rollen zusammensetzt. Fünf hintereinander geschaltete, bifilar gewöhnlich gewickelte Tausender gaben ein brauchbares Minimum und gute Uebereinstimmung des Resultats mit dem aus den einzelnen Rollen abgeleiteten, während ein Stück von 5000 für das Telephon fast unbrauchbar war. Elsas hält die kleineren Rollen, die er hintereinander schaltete, für sorgfältiger gewickelt als die grossen. Es ist aber offenbar die geringere Capacität bei der Hinterschaltung, die hier wirksam ist (vgl. auch § 8).

3. Polarisation.

Die aus der Polarisation erwachsenden Schwierigkeiten sind nicht erheblich. Da vielfach gerade nach dieser Seite

Einwände erhoben worden sind, so habe ich derselben besondere Aufmerksamkeit zugewandt. Es wird sich zeigen, dass Fehler, welche hieraus entspringen könnten, mit noch einfacheren Mitteln vermieden werden, als ich früher angenommen hatte.

Der relative Einstellungsfehler an der Brücke wächst nach Wien mit dem Quadrat der Polarisationsconstante und dem reciproken Quadrat der Widerstände, ähnlich, wie ich für unverzweigte Leitung früher gefunden hatte. Es ist also von vornherein ausgeschlossen, mit gegebenen Electroden beliebig kleine electrolytische Widerstände messen zu wollen. Das letztere verbietet sich aber auch schon deswegen, weil die Zuleitungswiderstände, welche aus leicht biegsamen Drähten, aus den Platinstielen der Electroden und den Blechen selbst bestehen, im allgemeinen eine Grösse von mindestens einigen Hunderteln Ohm haben werden, welche noch dazu nicht immer genau zu ermitteln ist.

Unter 10 Ohm herunterzugehen wird sich also schon aus diesem Grunde bei genaueren Messungen nicht empfehlen.

Ich werde im Folgenden zeigen, dass platinirte Electroden von etwa 30 cm^2 unter diesen Umständen immer ausreichen, dass für grössere Widerstände (50 Ohm) aber auch 10 cm^2 genügen, ja dass auch blanke Electroden für manche Zwecke brauchbar sind.

Die zu stellende Frage ist: geben zwei Widerstandsgefässe immer dasselbe Widerstandsverhältniss zweier untereinander gleicher Füllungen, wenn man verschiedene Flüssigkeiten einfüllt? Die Frage nach dem Ausschluss der Polarisation lässt sich entscheiden entweder dadurch, dass man Gefässe von ungleicher Widerstandscapacität oder dass man Electroden von verschiedener Grösse nimmt.

3a. Platinirte Electroden von 35 cm^2 in sehr verschiedenen Gefässen. Die durch Röhren verbundenen Electrodengefässe sind 4 cm weit. Die Röhre von A ist 25 cm lang und $5^1/_2$ mm weit, diejenige von B 15 cm lang und 2 cm weit. Mit Quecksilber gefüllt würde B nahe 0,0005 S. E., A den 22 mal grösseren Werth 0,011 S. E. darstellen.

Jede von den vier Electroden besteht aus einem dem Gefäss conform cylindrisch gebogenen Platinblech von $6^1/_2$ cm

Höhe und $4^{1}/_{2}$ cm Breite, oben und unten durch Kreissegmente versteift.[1])

Die beiden Gefässe wurden in der Brücke sowohl direct miteinander als mit den Brückenwiderständen 1, 10, 100, 1000 S. E. verglichen, wobei sie Widerstände von 8 bis 300000 S. E. zeigten. Mit den ersten drei Lösungen standen sie gemeinsam im Bade von destillirtem Wasser. $MgSO_4$-Lösung, die in dem Gefässe *A* 2700 S. E. hatte, gab im Bade schon ein schlechtes Minimum (vgl. § 7) und wurde daher ausserdem in einem geschlossenen Kasten mit Luft gemessen, ebenso wie die letzten drei Lösungen.

Die Zuleitungswiderstände betrugen: zu *A* 0,035, zu *B* 0,030 S. E. Dieselben sind in der vorletzten Spalte abgerechnet.

Zur Vermehrung der Genauigkeit war für die directe Vergleichung immer, für die Vergleichung mit den Rheostatenwiderständen natürlich nur theilweise an den Brückendraht ein neunmal grösserer Widerstand angeschaltet.

	Widerstand		$\frac{W_A}{W_B}$	Widerstands-verhältniss W_A / W_B		Ab-weichung vom Mittel in Procent
	in *A*	in *B*		direct beob.	corr. weg. Zuleitung	
	S. E.	S. E.				
HCl max.	171,45	7,591	22,586	22,597	22,683	+ 0,02%
H_2SO_4 max.	177,02	7,822	22,631	22,602	22,686	+ 0,03%
$NaCl$ gesätt.	611,78	26.987	22,669	22,655	22.679	±
$MgSO_4$ max.	2721,3	120,16	22,647	22,569	—	—
			trocken:	22,703	22,708	+ 0.13%
$KHSO_4$ $^{1}/_{50}$ norm.	18480	815,27	22,667	22,666	22,667	− 0,05%
KCl $^{1}/_{100}$ norm.	100210	4442,6	22,556	22,652	22.652	− 0.12%
Leitungswasser	337400	14950	22,57	22,56	(22,56)	
					22,679	

Wie man sieht, stimmen erstens die Verhältnisse W_A / W_B der 4. Spalte, welche durch Vergleichung mit den Rheostatenwiderständen der Brücke erhalten worden sind, mit den durch directe Vergleichung der beiden Gefässe erhaltenen

1) Es ist das die seit der Arbeit mit Grotrian von mir meistens gebrauchte Electrode. In der ersten Mittheilung steht irrthümlich 25 statt 35 cm^2. (Pogg. Ann. **154.** p. 5. 1875).

Verhältnissen der 5. Spalte so gut überein, wie das bei diesen Beobachtungen erwartet werden darf. Die wegen der Zuleitungswiderstände corrigirten Zahlen der vorletzten Spalte, auf welche es hauptsächlich ankommt, zeigen in den ersten Versuchen kaum eine Abweichung von einander. Nachher, als bei den grossen Widerständen die Gefässe, wegen der Ladungserscheinungen im Bade, in Luft beobachtet werden mussten, kommen keine Abweichungen vor, die nicht durch $^1/_{20}{}^0$ Temperaturunterschied erklärt werden könnten. Ein solcher ist nicht ausgeschlossen.

Der letzte Werth mit 337 000 S. E. ist nicht als gleichwerthig anzusehen, da hier das Minimum der Einstellung recht undeutlich wurde (vgl. § 6).

Also kann man *die 35 cm² grossen platinirten Electroden* mindestens *bis zu 8 Ohm abwärts* bei unseren Wechselströmen für *polarisationsfrei* erklären.

Das Ergebnis übertrifft sogar meine Erwartungen. Unbedenklich spreche ich hiernach jedermann die Berechtigung ab, in der Polarisation ein Hinderniss genauer Widerstandsbestimmung mit Wechselströmen zu suchen.

3b. Kleine platinirte Electroden von 10 cm². Das vorige Doppelgefäss B wurde mit einem kleinen a von nur 10 cm² Electrodenfläche in demselben Bade stehend verglichen, wegen der etwaigen Erwärmung von a unter kurz dauerndem Stromschluss. Die Zuleitungswiderstände betrugen 0,037 bez. 0,062 S. E. Die diesbezügliche Correction kann aus dem genähert angegebenen Widerstande in a controllirt werden.

Füllung	W_a	W_a / W_B gefund.	W_a / W_B corrigirt
$KHSO_4$ 20 Proc. ca.	16 S E	0,7944	0,7928
„ 10 „ „	27 „	0,7936	0,7926
„ 3 „ „	77 „	0,7921	0,7918
„ 0,7 „ „	255 „	0,7920	0,7919

Hier spricht sich ein die Versuchsfehler wohl etwas übersteigender Gang in dem Sinne aus, dass für die kleinen Widerstände an den kleinen Electroden ein merklicher Einfluss der Polarisation vorhanden war. Der Fehler bleibt aber kleiner als 0,13 Proc.

Weiter verglich man dasselbe grössere Gefäss B mit einem anderen kleinen b von 10 cm² grossen Electroden. Die Capa-

citäten von *B* und *b* waren so wenig verschieden, dass man die Genauigkeit der Einstellung durch beiderseitiges Anschalten des 4,5 fachen Widerstandes an den Brückendraht verzehnfachen konnte. Die Zuleitungswiderstände betrugen 0,021 bez. 0,066 : S. E. Das Minimum war bei den mittleren Widerständen gut, bei den kleinsten mässig gut, bei den grössten sehr mässig.

Füllung		W_B	W_b / W_B gefunden	W_b / W_B corrigirt
$KHSO_4$	doppelt normal	17,7 S. E.	0,9543	0,9517
„	halb „	53,5 „	0,9524	0,9515
„	zehntel „	212 „	0,9518	0,9515
„	fünfzigstel „	816 „	0,9513	0,9513

Die Abweichungen bleiben unter $^1/_{20}$ Proc.

Die platinirten Electroden von 10 cm² sind also für mässig grosse Widerstände (sicher von 50 Ohm aufwärts) als polarisationsfrei zu benutzen. Meine frühere Befürchtung, dass die Fehler 1 Proc. betragen könnten, war übertrieben.

3c. Blanke oder schwach platinirte Electroden. Blanke Electroden wird man ohne Noth nicht anwenden. Auch sie geben aber noch für manche Zwecke brauchbare Resultate.

Ich will voranschicken, dass ich gelegentlich an kleinen Gefässen, die für sehr schlecht leitende Flüssigkeiten bestimmt waren, in dem Zustande, in welchem dieselben aus der Glaswerkstätte kamen, ein ganz unbrauchbares Minimum fand. *Reinigen der Platinelectroden mit Alkohol und concentrirter Schwefelsäure beseitigte diesen Uebelstand grösstentheils.*

Gefäss *B* wurde mit platinirten, ein anderes *C* mit neuen, noch blanken Electroden versehen; alle Electroden hatten 35 cm². Die Anordnung der Versuche ist wie in 3a.

	Widerstand in *B*	Widerstand in *C*	$\frac{W_C}{W_B}$	Verhältniss W_C / W_B direct	Verhältniss W_C / W_B corr. weg. Zuleitung	Abweichung von 0,4565 in Procent
	S. E.	S. E.				
$KHSO_4$ dopp. nrm.	ca. 18	ca. 8	—	0,4626	0,4617	+ 1,1 %
K Cl gesätt.	19,258	8,870	0,4606	0,4621	0,4612	+ 1,0 %
$KHSO_4$ halb norm.	55,51	25,422	0,4580	0,4582	0,4579	+ 0,2 %
$KHSO_4$ $^1/_{50}$ norm.	869,8	397,10	0,4566	0,4569	0,4569	+ 0,09%
Electroden dünn platinirt:						
$KHSO_4$ dopp. nrm.	18,199	8,330	0,4577	0,4582	0,4572	+ 0,15%
$KHSO_4$ halb norm.	55,26	25,235	0,4566	0,4568	0,4565	±

Hier ist deutlich zu sehen, dass die kleinen Widerstände von etwa 8 Ohm zwischen den blanken Electroden zu gross gefunden wurden. Der Fehler beträgt etwa 1 Proc. Für 25 Ohm ist er bereits auf etwa $^1/_3$ Proc. gesunken. Das Minimum erschien aber auch für den kleinen Widerstand miserabel, für den mittleren immer noch schlecht genug, während es für den grösseren ziemlich gut war.

Dem entsprechend setzt die nachher erfolgte Platinirung den kleinen Widerstand um fast 1 Proc. herunter.

Es ist aber zu beachten, dass die dünne, mit einem Strom in saurer Platinchloridlösung ausgeführte Platinirung nicht ausgereicht hat, den Einfluss der Polarisation bei dem kleinen Widerstande ganz zu beseitigen. Man bekommt für die bestleitende Füllung immer noch einen 0,15 Proc. zu grossen Werth. Die Electroden waren hier schwarz aber noch glänzend. Das Minimum war bei 25 Ohm tadellos scharf, bei 8 Ohm nicht vollkommen, aber immer noch recht gut.

Dieselben Electroden lieferten, später, gründlich platinirt, die Reihe von 3a, bei welcher kein Einfluss der Polarisation merklich war.

Man soll also das Platiniren bis zu mattem Aussehen fortsetzen. Es gelingt hierbei nicht immer, ein tiefes Schwarz zu erzielen, sondern oft nur ein Grau. Das ist nach meinen Erfahrungen nicht nachtheilig.

Verschiedene Inductorien und Telephone. In der gesättigten KCl-Lösung, wo zwischen den blanken Electroden die Polarisation noch deutlich auftritt, habe ich noch versucht, ob in einem solchen Falle das angewandte Inductorium oder Telephon den Ort des Minimums beeinflusst. Sieben verschiedene Inductorien von etwa 60 bis 140 Unterbrechungen in 1 Sec., und zwar theilweise zwischen Platin und Quecksilber in Luft sowohl wie unter Wasser, theilweise zwischen Platin und Platin, auch mit Abänderung der Stromerreger, und ebenso viele Telephone unterschiedlicher Construction von 3 bis 60 Ohm Widerstand gaben nur Schwankungen von W_C / W_B zwischen 0,460 und 0,463. Bei dem schlecht ausgeprägten Minimum muss ich unentschieden lassen, ob die Unterschiede wirklich vorhanden waren, oder nur in der Unsicherheit der Einstellung lagen.

Kleine blanke Electroden. 1. Das Gefäss *a* (§ 3b) mit 10 cm² grossen Electroden war vor dem Platiniren, mit einem Füllungswiderstand von etwa 15 Ohm, mit *B* verglichen worden. Das Verhältniss hatte sich $a/B = 0{,}801$ statt des richtigen 0,792 ergeben, also um 1,1 Proc. zu gross.

2. In Gefäss *B* wurden neben den grossen platinirten Electroden kleinere blanke von 10 cm² angebracht und der Widerstand abwechselnd zwischen beiden Paaren gemessen. Das gefundene Verhältniss glatt/platinirt war für den

Widerstand		7,3	24,3	50	200	750 Ohm
gl. / plat.	=	1,035	1,016	1,0070	1,0052	1,0053 „
Fehler	=	+ 3 Proc.	+ 1,1 Proc.	+0,2 Proc.	0	0

also für 50 Ohm schon beinahe der richtige Werth. Bei 50 Ohm war das Minimum zwischen den glatten Electroden noch schlecht, bei 7,3 kaum brauchbar.

3. Ein Fläschchen mit zwei einander nahe stehenden Electroden von je 9 cm² gab bei gleicher Temperatur mit einem vor der Platinirung sehr schlechten Minimum:

	Füllung	Blank	Platinirt
K Cl	0,05 normal	24,97 Ohm	24,74 Ohm
„	0,02 „	59,99 „	59,97 „
„	0,01 „	116,8 „	116,2. „

Nach den obigen Resultaten ist zu schätzen, *dass zwischen blanken Platinelectroden der Fehler, um welchen der Widerstand einer Flüssigkeit zu gross gefunden wird, unter 1 Proc. bleibt, wenn das Product aus Widerstand und Electrodenfläche nicht unter etwa 250 Ohm cm² sinkt.* Es bleibt also auch für solche Electroden immerhin noch ein Gebiet der Anwendbarkeit übrig.

Erlaubt man sich, diese Schätzung auch auf die Metallplatten galvanischer Elemente anzuwenden, so würde für Daniell-Elemente etc. gewöhnlicher Form die Widerstandsbestimmung mit Wechselstrom und Telephon einigen Procenten Fehler unterliegen. Da die Polarisation an dem Kupfer und Zink wohl kleiner ist, als an Platin, so wird der wirkliche Fehler vermuthlich kleiner sein.

Man darf aber diese Resultate nicht etwa auf den Sinusinductor mit einer Umdrehungszahl 85/Sec. übertragen. Für die 7,3 Ohm unter Nr. 2 bekommt man da 25 Proc. Fehler. Die discontinuirlichen Ströme des Unterbrechungsinductoriums wirken eben nicht wie ein Sinusstrom gleicher Periode. Nach

der Correctionsformel von Wien müsste man die Schwingungszahl des Sinusstromes auf etwa 250 steigern, um den Fehler bis auf 3 Proc. zu reduciren wie bei dem Inductorium.

4. Zusammenwirken von Polarisation und Rheostatenfehlern.

Zur Sicherheit habe ich auch hierüber einige Versuche ausgeführt. Mit einem gewöhnlich bifilar gewundenen Stück von 1000 S. E. und einem nach Chaperon (p. 233) hergestellten Stück von 1092,2 S. E. wurden Gefässe von verschiedenen Electroden verglichen.

Electrodenfläche	Füllung	Aus der Vergleichung mit 1000	Aus der Vergleichung mit Ch.
10 cm^2 platinirt	$KHSO_4$ 0,01 normal	1947,6 S. E.	1948,4 S. E.
10 cm^2 „	$KHSO_4$ 0,01 „	1170,2 „	1170,4 „
30 cm^2 „	$KHSO_4$ 0,01 „	894,66 „	894,98 „
10 cm^2 glatt	„Wasser“	13 315 „	13 312 „

Die Abweichungen bleiben unter $^1/_{20}$ Proc. Das Minimum war bei den Vergleichungen mit 1000 mässig, mit Ch. gut.

5. Vergleichung von Bestimmungen mit dem Inductionsapparate und dem Sinusinductor, dem Dynamometer und dem Telephon.

Die Gefässe A und B von § 3a wurden mit diesen verschiedenen Combinationen bestimmt. Nur Sinusinductor und Telephon waren nicht zusammen zu verwenden wegen der bekannten Unempfindlichkeit des Telephons für die matten Töne. Der Sinusinductor hatte etwa 80 Drehungen pro Secunde.

Man fand, bei Füllung mit gesättigter NaCl-Lösung, also mit Widerständen von etwa 580 und 25 Ohm, das Verhältniss A/B

		corrigirt
mit Sinusinductor und Dynamometer	22,652	22,676
„ Inductionsapparat und Dynamometer	22,669	22,693
„ „ „ Telephon	22,675	22,699
		22,689

Aus den früheren Beobachtungsreihen war abgeleitet 22,679.

Die Abweichungen blieben also innerhalb 0,1 Proc.

Auch die Stücke 1, 10, 100, 1000 zweier Rheostaten, galvanometrisch, telephonisch und dynamometrisch miteinander verglichen, gaben innerhalb der Ablesefehler gut übereinstimmende Verhältnisse.

6. Sehr grosse Widerstände.

Dass an grossen Flüssigkeitswiderständen (von 100 000 Ohm) noch mit gutem Erfolg beobachtet werden kann, habe ich früher gezeigt[1]) und es folgt noch einmal aus der Tabelle zu 3a. Das reinste Wasser, in Gefässen von geeigneter Capacität untersucht, führt nun auf Widerstände von dieser Ordnung. Genauigkeit von 1 Proc. dürfte hier ausreichen, sodass also für die Untersuchung wässeriger Lösungen alles erforderliche vorliegen würde.

Wenn die Hrn. Bouty und Foussereau (l. c.) hier grosse Schwierigkeiten fanden und die Messung mit Wechselströmen sogar „complètement illusoires“ nannten, so wird das vermuthlich darauf hinauskommen, dass ihre Widerstände, deren Betrag sie nicht angeben, noch viel grösser waren. Andernfalls ist nicht zu verstehen, dass „die Auslöschung des Tones auf einer beträchtlichen Strecke des Rheostaten stattfand“. Die Tonstärke lässt bei 100 000 Ohm und bei geeigneter Anordnung gar nichts zu wünschen.

Einige Bemerkungen über derartige Widerstände und über die Möglichkeit, noch weiter hinaufzugehen, mögen aber noch folgen.

a) *Fernwirkung des Inductoriums.* So möchte ich noch einmal auf eine hier zu beachtende Vorsichtsmaassregel hinweisen. Ein Inductorium gebräuchlicher Form wirkt auf ein Telephon noch aus beträchtlichem Abstande magnetisirend[2]), das meinige, bei Erregung durch einen Accumulator, aus 1 m Abstand ganz kräftig, aus $1^1/_2$ m noch gerade merklich, aus $^1/_2$ m so stark, dass man den dritten Oberton noch deutlich hörte, wenn man das Telephon ohne Schluss der Leitungsdrähte in die Richtung der Kraftlinien hält. Contact der Drähte vermindert die Tonstärke. Senkrecht zu den Kraftlinien bleibt der Ton natürlich aus.[3])

Bei der Messung grosser Widerstände ist nun erstens der Beobachtungsstrom im Telephon schwach. Weiter ist die

---

1) F. K., Wied. Ann. **26.** p. 186. 1885.

2) Leonh. Weber, Wied. Ann. **8.** p. 519. 1879.

3) Die Lage der Kraftlinien um einen Electromagnet lässt sich so mit beachtenswerther Annäherung bestimmen, was unter Umständen nützlich sein kann.

telephonische Fernwirkung des Inductoriums um so kräftiger, je weniger secundären Strom es selbst entwickelt, sodass die Störung mit der Grösse der eingeschalteten Widerstände unverhältnissmässig stark wachsen wird. Diese Störung ist aber nicht etwa harmlos in der Weise, dass sie den zur Einstellung dienenden Ton einfach überlagerte, sondern die Fernwirkung auf das Telephon vermischt sich mit dem Einstellungston in verwickelter Weise.

Nämlich, wenn ein Minimum im mathematischen Sinne auch für die *Tonstärke* im Telephon existirt, insofern diese dem Quadrate der Stromamplitude proportional ist, so gilt dies nicht für die *Stromschwingungen* selbst, welche vielmehr bei dem Passiren der Minimumstellung durch Null gehen. Ihre Phase schlägt dabei um. Eine gleichzeitige andere Anregung des Telephons von der gleichen Periode muss also ähnliche Wirkungen haben, wie die Störungen der Capacität, Selbstinduction oder Polarisation in einem Brückenzweige.

Die Beobachtung bestätigt dies. Das Telephon, in mässigem Abstand (60 cm) vom Inductionsapparate gehalten, zeigt die Güte des Minimums von seiner Richtung abhängig. Das letztere wird im allgemeinen schlechter, kann aber bei einer geneigten Stellung gegen die Kraftlinien auch einmal etwas besser werden, was begreiflich ist. Denjenigen Beobachtern, welche anfangs vielleicht nicht an die Fernwirkung des Inductoriums gedacht haben, kann es zur Beruhigung dienen, dass auch hier der Ort des Minimums durch die erstere weniger beeinflusst wird, als seine Güte.

Bei kleinen zu messenden Widerständen kommen die Störungen wenig zur Wirkung, *bei grossen aber achte man darauf, dass das Inductorium hinreichend weit (mindestens 1 m) von der Brücke aufgestellt sei.* Ich stelle, um zugleich Induction von dem Apparat auf den Brückendraht auszuschliessen, die *Axe des Inductoriums senkrecht zu derjenigen der Brückenwalze.* Ausserdem halte man das *Telephon senkrecht zu den Kraftlinien des Inductionsapparates.*

Abgesehen hiervon aber und abgesehen von der Capacität grosser Widerstandsrollen (§ 2) sind bei grossen Widerständen Störungen vorhanden, welche man wohl auf die folgenden Ursachen zurückzuführen hat.

b) *Capacität der Flüssigkeitswiderstände.* Die electrostatische Capacität c der Flüssigkeitszelle, als Condensator zwischen den Electroden betrachtet, kann für eine Flüssigkeit von grosser Dielectricitätsconstante K nahe proportional K/γ gesetzt werden, wenn γ die Widerstandscapacität der Zelle bezeichnet. Der Widerstand w der gefüllten Zelle ist gleich $\gamma . s$, wenn s den specifischen Widerstand der Flüssigkeit bedeutet.

Setzen wir mit Wien die störende Wirkung der Capacität bei dem Wechselstrom proportional $c^2 . w^2$ und führen für c und w die obigen Beziehungen ein, so wird die störende Wirkung also proportional

$$K^2 . s^2 .$$

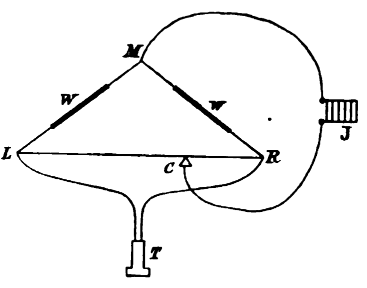
Dieselbe muss also mit wachsendem specifischen Widerstand immer zunehmen und macht sich in der That bei reinem Wasser wegen dessen, durch Cohn und Arons nachgewiesener hoher Dielectricitätsconstante durch Undeutlichwerden des Minimums recht merklich.

Man kann den Einfluss durch einen neben den metallischen Vergleichswiderstand geschalteten Condensator (§ 8) grösstentheils compensiren. Nothwendig ist dies jedoch bei dem praktisch vorkommenden Wasser noch nicht, insofern Einstellen auf den Punkt geringster Tonstärke eine Sicherheit auf 1 Proc. gewährt und grössere Genauigkeit hier wegen der Veränderlichkeit des Leitvermögens kaum einen Werth hat.

c) *Statische Ladungen der Brücke.* Durch Unsymmetrie des Inductoriums oder der Leitungen, wohl auch durch Influenz der primären auf die secundäre Rolle des Inductoriums, entstehen mehr oder weniger unregelmässige Ladungen der Brücke. Man kann dieselben an der Brückenwalze beobachten, wenn man dieselbe nur mit dem Inductorium verbindet, die Drahtenden der Walze nicht geschlossen. Ein Telephon werde mit dem einen Ende nach der Erde abgeleitet. Man stellt sich in die Nähe der Brücke und hält das Telephon ans Ohr, während man abwechselnd den anderen Zuleitungsdraht frei lässt und mit der anderen Hand berührt. Im letzteren Zustande tönt das Telephon, zuweilen sehr laut, offenbar von den auf dem eigenen Körper influenzirten Ladungen, die durch das Telephon zu- und abfliessen.

Bei der Verbindung des Telephons mit der Brücke selbst fliesst nun ein Theil der Ladung der Brücke durch das Telephon (vgl. auch § 9). Bei kleinen zu messenden Widerständen sind die „zufälligen Ladungen" wohl minder stark und finden ihre Ausgleichung bez. ihren Abfluss auf bequemerem Wege, als durch das Telephon. Bei grossen aber (sagen wir von der Ordnung 100 000 Ohm und mehr) fliesst ein Theil durch das Telephon und verursacht ein unregelmässiges rauhes Geräusch, bald mehr, bald weniger stark, durch Commutiren der Pole des Inductoriums beeinflusst, zuweilen ohne ersichtlichen Grund rasch wechselnd, bei sehr grossen Widerständen (10^6) das Minimum unter Umständen ganz unkenntlich machend.

Die Störung lässt sich nun stark vermindern dadurch, dass man einzelne, *durch Probiren zu ermittelnde Punkte der Leitung mit der Erde verbindet.* Elsas machte schon die Bemerkung, dass es für die Güte des Minimums einen Unterschied bringt, wenn man die Flüssigkeit mit dem inneren oder dem äusseren Ende seines Inductors verbindet und dass man durch die Ableitung der geeigneten Endklemme des Inductors eine Verbesserung des Minimums erhält (l. c. p. 673).



W sei der grosse Widerstand. Man versucht z. B., ob Erdleitung an *L*, *M*, *R* oder *C* genügend verbessert. Im allgemeinen hilft *C*, oder auch, wenn *w* wie gewöhnlich klein ist, *R* am besten, während *L* oder *M* häufig das Geräusch noch vermehren. Es kann aber auch anders sein.

Ich bringe wohl ein schmales Pinselchen, das Ende eines feinen Kupferdrahtkabels, an den Messdraht der Brückenwalze, an welchem man meistens eine Gegend findet, in welcher die Ableitung das Minimum für eine genaue Einstellung genügend verbessert. Verlegt man die Erdleitung von hier aus längs des Messdrahtes, so ändert sich neben der Verschlechterung des Minimums auch der Ort desselben ein wenig, und zwar in meinem Falle nach der Seite, nach welcher die Erdleitung verschoben wurde. Die Verschiebung konnte einer relativen

Aenderung des berechneten Widerstandes innerhalb etwa 1 Proc. entsprechen.

Mit dem obigen Kunstgriff liess sich bei Widerständen bis zu 10^6 Ohm noch leidlich einstellen, während sonst von etwa 100 000 an schon erhebliche Störungen merklich werden konnten und für 10^6 zuweilen von einem Tonminimum kaum noch die Rede war.

Als Proben dienen die folgenden Vergleichungen des kleinen Doppelgefässes *a* (p. 237) mit einem kleinen einfachen Gefäss *b* von etwa 36mal kleinerer Capacität mit Electroden von 10 cm² in etwa $1^1/_2$ cm Abstande im Petroleumbade.

Man leitete immer denjenigen Punkt ab, welcher das bestausgeprägte Minimum zeigte. Bis zu 100 000 hinauf wurde der Ort des Minimums durch die Erdleitung überhaupt kaum beeinflusst, bei 300 000 wurde ohne Ableitung ein etwa $1^1/_2$ Proc. grösseres *a*/*b* gefunden; der Ort geringster Tonstärke schwankte in diesem Falle nicht unerheblich. Bei 1 500 000 steigerten sich die Schwankungen ohne Erdleitung und die Abweichung stieg gelegentlich auf 10 Proc.

Füllung	Widerstand in *a*	Widerstand in *b*	$\frac{W_a}{W_b}$	$\frac{W_a}{W_b}$ direct
	S. E.	S. E.		
K Cl m = 0,005 ca.	8346	233,7	35,71	35,68
KH SO_4 = 0,001 „	11598	324,9	35,70	35,73
K Cl = 0,0004 „	98430	2764	35,61	35,71
K Cl = 0.0001 „	312100	8833	35,33	35,42
Destillirtes Wasser	1558000	45300	34,4	34,3

Die letzten Zahlen für destillirtes Wasser ($k = 3 \cdot 10^{-10}$) sind Mittelzahlen von verschiedenen Füllungen, die von 34,0 bis 35,2 schwankten. Solche Schwankungen können schon durch das Umgiessen von Wasser entstehen.

Bis zu 100 000 S.E. hinauf zeigt sich das gefundene Verhältniss *a*/*b* merklich constant, man mochte dasselbe durch directe Vergleichung oder durch Widerstandsbestimmung mit Drahtrollen (1000, 13 000, 33 000 S.E. immer mit befriedigender Uebereinstimmung), mit dem 3 m langen Draht auf der Walze allein oder mit Anschaltung des 9fachen Widerstandes ermittelt haben. Bei 300 000 S.E. wird *a*/*b* um etwa 1 Proc., bei 1 500 000 S.E. um 4 Proc. kleiner gefunden.

Diese Abweichungen können von der individuellen Anordnung herstammen und vielleicht unter anderen Umständen ausbleiben. Aber es erscheint auch nicht ausgeschlossen, dass sie unter anderen Umständen grösser sein können. *Bis auf weiteres also ist es gerathen, die zu messenden Widerstände nicht unnöthig zu steigern* und sich bei solchen von mehreren Hunderttausenden auf Fehler von Procenten, bei noch grösseren Widerständen auf grössere Entstellungen gefasst zu halten (vgl. auch § 9).

Ich suchte die Ursache der Störung durch das rauhe Geräusch anfangs in unregelmässigen Oberflächenladungen der Flüssigkeiten in den Gefässen. Deren Einfluss scheint aber nicht erheblich zu sein, wie daraus hervorgeht, dass man mit grossen Gefässen keine schlechteren Resultate erzielt (Tab. zu 3a), als mit den zuletzt behandelten kleinen.

7. Einfluss des Bades.

Aehnliche Störungen, wie die im vorigen beschriebenen, können bei grossen Widerständen durch das Bad bewirkt werden, in welchem die Gefässe zu stehen pflegen. Ich habe bei der Untersuchung sehr verdünnter Lösungen schon früher aufmerksam hierauf gemacht.[1]) Es handelt sich auch hier jedenfalls um Ladungserscheinungen. Ein Gefäss mit schlecht leitender Füllung im Bade ist ähnlich einer Holtz'schen Verstärkungsröhre und zwar einer solchen von grosser Capacität, weil die Glaswände im Interesse rascher Temperaturausgleichung dünn gewählt werden.

Die Störung tritt bereits ein, wenn nur der Boden der Gefässe von dem Bade bespült ist, ja wenn die Aussenwand auch nur mit einem Schwamm befeuchtet ist. Sie wird bereits bei kleineren Widerständen merklich, als die in 8 behandelte. Sie wächst, im Gegensatz zu § 6 am Schluss, mit der Grösse der Gefässe.

In den kleinen Gefässen *a* und *b* liessen sich Widerstände bis 300 000 Ohm im Wasserbade wenigstens angenähert bestimmen. Solche von $1^1/_2$ Millionen freilich gaben im Bade gegen Luft Abweichungen bis 10 Proc. Bei dem grossen Ge-

1) F. K., Wied. Ann. **26.** p. 172. 1885.

fässe hörte für 300 000 Ohm die Möglichkeit einer Messung im Bade schon vollkommen auf und bei $1^1/_2$ Millionen genügte es, den Boden der Gefässe mit Wasser zu bespülen, um das Minimum ganz zu verderben. Aehnlich wirkte ein untergelegtes Stanniolblatt. Einhüllen jedes der beiden Gefässe in Stanniol verschlechtert; unvergleichlich viel stärker ist aber die Verschlechterung, wenn man beide Hüllen miteinander verbindet. Schon Berühren eines Gefässes mit dem Finger wirkt nachtheilig.

Dies alles bestätigt zum Ueberfluss noch die Auffassung, dass man es hier mit Condensatorerscheinungen an den Glaswänden zu thun hat.

Ueber ein Mittel der Verbesserung (vgl. § 8).

Ob das Badegefäss aus Metall oder Glas bestand, ob die *Badeflüssigkeit destillirtes Wasser oder eine besserleitende Flüssigkeit war, machte keinen merklichen Unterschied.* Ich ging selbst bis zu $^1/_2$proc. Salzsäure, die bis 20 mal besser leitete als die Flüssigkeit, deren Widerstand bestimmt wurde. In solchen Bädern wurden z. B. die Gefässe *B* und *C* miteinander bez. mit Metallwiderständen, wenn sie Füllungen von 2700 bez. 1230 Ohm hatten, mit der üblichen Abweichung innerhalb 0,1 Proc. verglichen. Mit 15 000 bez. 6800 Ohm traten im Bade Abweichungen bis 1 Proc. ein. Das an sich schlechte bez. oft wechselnde Minimum liess sich durch Ableitung nur theilweise verbessern. Das kleine Gefäss mit 12 000 Ohm verhielt sich im schlecht oder gut leitenden Bade gleich mässig. Geeignete Erdleitung verbesserte das an sich schon brauchbare Minimum noch erheblich.

Für die Ladungsvorgänge leitete also ein Bad aus destillirtem Wasser merklich ebensogut wie ein solches aus etwa 7000 mal besser leitender Salzsäure.

Petroleum andererseits verhielt sich merklich wie Luft, d. h. das mehr oder weniger vollkommene Minimum wurde weder in seiner Güte noch in dem Orte durch das Petroleum beeinflusst. Man kann sich also mit Petroleumbädern oder ähnlichem helfen; angenehm freilich ist diese Aushilfe nicht.

8. Verbesserungen durch Zuschaltung eines Condensators.

Das Hinderniss genauer Messung grosser Widerstände lag sowohl bei den Drahtrollen wie bei den Flüssigkeitszellen grossentheils in der Capacität. Man muss dasselbe durch eine in einem nebenliegenden Brückenzweige angebrachte Capacität eliminiren bez. vermindern können. Schaltet man zu diesem Zwecke einen Condensator neben den Zweig, so werden dessen Ladungen den Condensatorladungen an den Electroden (§ 6b) analog wirken und deren Störung compensiren können. Auch die Flaschenladungen an den Bechern eines Doppelgefässes werden im Bade sich den Ladungen nebengeschalteter Condensatorplatten ähnlich verhalten.

Anders aber die Ladungen von Drahtrollen, die sich über die ganze Länge des Widerstandes vertheilen, während die Ladungen des Condensators ja neben den Enden des Widerstandes sitzen. Hier ist die Analogie nur eine recht rohe und entsprechend wird auch die Compensation nur eine rohe sein können.

Einige, theilweise gewiss verbesserungsfähige Versuche sollen hier mitgetheilt werden.

Der veränderliche Condensator wurde aus einer horizontal isolirt gelegten Metallscheibe und einer durch paraffinirtes Papier oder Glimmerscheiben verschiedener Dicke davon getrennten Platte (1 dm^2 etwa) gebildet, welche letztere man zur Regulirung der Capacität über den Rand der unteren Platte hinaus verschob.

Drahtwiderstände. Mit dem Condensator liess die Vergleichung der grössten Stücke des Siemens'schen Rheostaten, welche für sich ein sehr schlechtes Minimum ergeben und zu Fehlern über 0,1 Proc. geführt hatte (§ 2), sich mit einem überall recht brauchbaren Minimum und mit Fehlern von höchstens $^1/_{30}$ Proc. ausführen.

Grosse Widerstände von Wasser oder verdünnten Lösungen im Betrage von 10000 bis 300000 Ohm zeigten, mit Condensatorschaltung neben den nach Chaperon gewickelten Vergleichswiderständen, ein viel besseres Minimum. Bifilar gewundene Drahtwiderstände verlangen natürlich nach Umständen den Condensator umgekehrt neben der Flüssigkeitszelle, um

das Minimum zu verbessern. (Gelegentlich findet man bei solcher Vergleichung, dass die beiderseitigen Capacitäten sich von selbst recht gut compensiren.)

Auch grosse *Widerstände im Wasserbade*, z. B. bis 300 000 Ohm in dem kleinen Gefäss *b* (in dem grossen nicht) wurden mit nebengeschaltetem Condensator bequemer vergleichbar oder überhaupt erst vergleichbar.

Das mit dem Condensator verschärfte Tonminimum hat aber bei erheblicherem Betrage der compensirenden Capacität oft eine beiderseitig verschiedene Klangfarbe des Tones, was dann trotz der Schärfe der Einstellung zu einiger Vorsicht im Vertrauen auf die Genauigkeit mahnt. Die obigen ca. 300 000 Ohm z. B. wurden im Wasserbade unter solchen Umständen um $^1/_2$ bis 2 Proc. kleiner gefunden als im Petroleumbade, sodass man dem letzteren die Genauigkeit anlangend doch den Vorzug geben wird.

9. Unsymmetrien des Telephons.

Diese kommen ebenfalls bei grossen Widerständen zur Geltung. Bei einer Vergleichung von Flüssigkeitszellen im Betrage von 70 000 bez. 300 000 Ohm mit Metallwiderständen fand ich einmal eine Ortsänderung des Tonminimums, wenn der Strom commutirt wurde, entsprechend einer scheinbaren Widerstandsänderung im ersteren Falle gegen $^1/_2$ Proc., im letzteren bis zu 4 Proc. Die Unsymmetrie machte sich auch geltend, wenn das Telephon allein commutirt wurde. Das Inductorium hatte Platinunterbrechung, aber auch bei anderen trat ähnliches hervor, allerdings in verschiedenem Maasse und auch mit der Zeit an Grösse veränderlich.

Die Erscheinung auf ihre Ursachen zurückzuführen, kostete einige Mühe, weil ich erst in einer, wie ich jetzt glaube, ganz unbegründeten Richtung suchte. Da der Wechsel eintrat, wenn der *primäre Strom commutirt wurde* und da weiter das Vorzeichen des Unterschiedes wechselte, wenn man *die Spule auf dem Telephon umsteckte*, ja endlich sogar, wenn man nur den *Telephonmagnet ummagnetisirte*, so suchte ich die Ursache der Unsymmetrie in einem Verhältniss des im Telephon erregten Magnetismus zur Stromrichtung des Oeffnungs- bez. Schliessungsstromes.

Bestärkt wurde ich in dieser Ansicht (welche ja eine ganz interessante Thatsache enthalten würde) dadurch, dass ein Telephon, einfach mit Widerständen von mehreren Millionen — die letzteren symmetrisch um das Telephon vertheilt — in den Kreis eines Inductoriums eingeschaltet, deutlich eine *verschiedene Tonstärke gab, wenn man lediglich den Strom commutirte;* und zwar den primären oder den secundären. Ummagnetisiren des Telephons änderte im allgemeinen auch hier das Vorzeichen des Wechsels.

Und dabei stimmte an mehreren Telephonen überein, dass der Ton stärker war, wenn der Oeffnungsstrom den Magnetismus verstärkte.

Schliesslich genügte aber diese Regel doch nicht für alle Erscheinungen und ich bin schliesslich zu der Ansicht gekommen, dass dieses Zusammentreffen wohl nur Zufall war.

Sieht man von der Möglichkeit einer magnetischen Unsymmetrie ab, so käme erstens die von Winkelmann[1]) bei der Bestimmung von Dielectricitätsconstanten hervorgehobene mögliche Ursache einer Unsymmetrie in Frage, die man wohl am kürzesten als verschiedene Capacität der Telephonleitung von den beiden Enden bis zum Mittelpunkt der Spule bezeichnet. Allein hierdurch wäre der umkehrende Einfluss des ganzen Stromwechsels schwerlich, derjenige des Ummagnetisirens überhaupt nicht zu erklären. Man wird einen Grund suchen müssen, der nicht mit dem Magnetismus das Vorzeichen wechselt.

Ein solcher würde offenbar durch *electrostatische Ladungen* des Telephons gegeben sein, welche die Ströme begleiten. Dass solche auftreten, ist schon in § 6c hervorgehoben worden. Ihre Ursache mag zusammengesetzter Art sein. Eine Rolle spielt vielleicht die Influenzwirkung der primären auf die secundäre Spule des Inductoriums. Die Ladungen theilen sich der Spule bez. dem Magnet des Telephons mit und wirken nun in derselben Periode auf die Membran wie der Messungsstrom, aber im Gegensatz zu dem letzteren wenig beeinflusst von einer kleinen Verschiebung des Brückencontactes. Verstärkt die electrostatische Anregung die Bewegung der Membran z. B. wenn der Contact links von der richtigen Nullstellung steht,

1) Winkelmann, Wied. Ann. **46.** p. 671. 1891; vgl. auch Leonh. Weber (l. c.).

so wird sie rechts abschwächen; das wirkliche Minimum erscheint nach rechts verschoben.

Die von mir beobachteten Erscheinungen lassen sich alle auf diese Auffassung zurückführen, z. B. der Vorzeichenwechsel der Unsymmetrie bei dem Commutiren der magnetischen Anregung, also Commutiren sei es des Hauptstromes sei es des Telephons gegen die übrige Leitung, sowie bei dem Umstecken der Telephonspule oder der Ummagnetisirung des Telephons.

Commutirt man bloss die Pole an der secundären Rolle, so kommen noch die Vertheilungs- und Isolationsverhältnisse der Verzweigung in Betracht und man kann nicht mit Bestimmtheit sagen, was geschehen wird. In der That fand ich bei einem Inductorium, dass Polwechsel an der inducirten Rolle die vorhandene kräftige Unsymmetrie beinahe zum Verschwinden brachte.

Es stimmt ferner mit der Annahme electrostatischer Ladungen des Telephons die Thatsache, dass die Unsymmetrie von der Art, wie man das Telephon hält, abhängt; ob dasselbe nur an einzelnen Punkten berührt oder mit der ganzen Hand gehalten wird, ob man an einem Dosentelephon die Metallkapsel oder den isolirenden Rand fasste, bei einem Stangentelephon (in Hartkautschukkapsel), ob der Magnet isolirt oder abgeleitet wurde. [1])

Eine weitere, und zwar eine werthvolle Folgerung besteht darin, dass die Unsymmetrie *eliminirt* werden wird, wenn man *eine zweite Einstellung mit commutirtem Telephon ausführt und das Mittel aus beiden Ablesungen nimmt.* Man halte dabei das Telephon beide Male in gleicher Weise.

An einigen Beispielen soll eine ungewöhnlich grosse Unsymmetrie untersucht und die letzte Folgerung geprüft werden. Das kleine Inductorium hatte Eisendrahtbündel mit verschiebbarer dämpfender Hülse und Platinunterbrechung in Luft. Das Telephon von der ursprünglichen Bell'schen Form hatte Hartkautschukfassung, die letztere war aber in Stanniol gehüllt.

1. Man verglich Drahtwiderstände von etwa 1000, 12 000, 30 000 und 50 000 Ohm, deren Betrag galvanometrisch bestimmt worden war, einzeln oder in Summen zusammengefasst telepho-

---

1) Auf die Herstellung von Apparaten, bei denen die Unsymmetrie wegfällt, denke ich später zurückzukommen.

nisch miteinander. Die Einzelbestimmungen der Verhältnisse gaben Abweichungen bis $\pm 3\frac{1}{2}$ Proc bei den grössten Widerständen 50000 / 42000. Je kleiner die Stücke, desto kleiner war auch die Abweichung, z. B. 0,3 Proc. bei 30000 / 13000. Ueberschieben der Metallhülse über den Kern verminderte die Unsymmetrie bedeutend. Ein Dosentelephon zeigte viel kleinere Unsymmetrien. Die Mittel aus Einstellungspaaren mit commutirtem Telephon gaben höchstens 0,4 Proc. Fehler, welcher Betrag sich grösstentheils durch die (trotz zugezogenem Condensator) theilweise sehr verwaschenen Minima erklären lässt.

2) Eine Flüssigkeitszelle (Gefäss *b*) von etwa 300 000 Ohm im Petroleumbad wurde mit einer Rolle von etwa 12 000 Ohm (alternirend unifilar gewickelt; p. 233) verglichen. Man fand, auf gleiche Temperatur reducirt, die paarweise gewonnenen Mittel und die Abweichungen der Einzelablesungen in Proc. daneben geschrieben:

		Das Telephon ummagnetisirt:
Ohne Condensator	323 800 $\pm$ 4 %	325 500 $\mp$ 2,2 % dann 324 700 $\mp$ 3,2 %
Mit „	324 100 $\pm$ 4 %	323 700 $\mp$ 4 % dann 324 300 $\mp$ 4 %

Während die Einzelwerthe bis 4 Proc. vom Hauptmittel (324 400) abweichen, stimmen die Paarmittel bis auf höchstens 0,4 Proc. Abweichung.

3) Drei Flüssigkeitswiderstände von ca. 600, 60 000 und 300 000 Ohm wurden mit Metallwiderständen von ca. 1000, 13 000 und 30 000 Ohm verglichen. Man wandte entweder das gebräuchliche, von Hartmann & Braun gelieferte Inductorium mit massivem Eisenkern und mit Quecksilberunterbrechung unter destillirtem Wasser an oder ein kleines Inductorium mit Platinunterbrechung in Luft, mit Eisendrahtbündel, und zwar jedesmal mit und ohne eingeschobene dämpfende Hülse. Die Unsymmetrien gingen bei 300 000 bis zu $\pm$ 2 Proc., bei 60 000 bis $\pm \frac{1}{2}$ Proc., bei 600 blieben sie innerhalb der Fehlergrenze der Einstellung ($\frac{1}{20}$ Proc.). Die Abweichungen der paarweise genommenen Mittel mit commutirtem Telephon erreichten beziehungsweise nur $\pm$ 0,3, $\pm$ 0,1 und $\pm$ 0,02 Proc. Das Inductorium mit massivem Kern lieferte hier die geringsten, das andere ohne Dämpferhülse die grössten Abweichungen.

Bei kleinen Widerständen also wurde gar keine Umsymmetrie gefunden. Bei grösseren überzeuge man sich, ob keine solche

vorhanden ist, bez. man *commutire bei jeder Messung das Telephon und nehme das Mittel aus den beiden gefundenen Minimumstellungen des Brückencontactes.*

Ich will übrigens bemerken, dass z. B. bei den letzten Versuchen erst eine Reihe von Proben in den Verbindungen und den Telephonen gemacht werden musste, ehe man eine beträchtliche Unsymmetrie hergestellt hatte. Eine solche wird also nicht häufig vorkommen.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

Ueber den Apparat vgl. p. 228 und 229.

Die Genauigkeit der Einstellung an der Brücke reicht unter günstigen Umständen bis zu weniger als 1 / 10 000 Fehler.

Ist das Minimum durch Polarisation, Selbstinduction oder Capacität unscharf, aber noch gut zu erkennen, so liefert — in Uebereinstimmung mit meinen früheren Erfahrungen, mit denjenigen von Elsas und von M. Wien in dessen zweiter Mittheilung — sein Ort (der Mittelpunkt zwischen zwei benachbarten Punkten von gleicher Tonstärke) das Widerstandsverhältniss nahe richtig.

Solange nicht die vorzügliche unifilar abwechselnde Wicklungsweise von Widerstandsrollen nach Chaperon sich verbreitet hat, welche Widerstände von mindestens 30 000 Ohm für das Telephon geeignet herstellen lässt, sind die folgenden Erfahrungen an *bifilar gewickelten Rheostaten gebräuchlicher Art* von Interesse:

Stücke bis etwa 1000 Ohm liessen sich überhaupt fehlerfrei verwenden. Solche bis 4000 Ohm zeigten bei Vergleichungen Fehler bis etwa $^1/_3$ Proc. bei einem schliesslich wegen der Capacität sehr schlechten Minimum. Der Fehler wächst nach Wien mit dem Quadrate der Capacität und des Widerstandes.

In Uebereinstimmung mit Elsas zeigt es sich vortheilhafter, grössere Rheostatenwiderstände aus mehreren Stücken zusammenzusetzen als einzelne Rollen zu verwenden. Ursache ist die im letzteren Falle grössere Capacität.

Geeignete Nebenschaltung eines kleinen verstellbaren Condensators im Nachbarzweig verbessert bei gewöhnlichen Rheostatenwiderständen bis 10 000 Ohm das Minimum bedeutend und lässt die Fehler verschwinden.

Die *Selbstinduction* gut gewickelter Rollen — deren fehlerhafter Einfluss nach Wien mit dem Quadrate des Quotienten aus Selbstinduction und Widerstand wächst, bereitet keine Schwierigkeiten.

Polarisation. Der Fehler nimmt mit wachsender Grösse der Electrode und des Widerstandes ab. *Blanke* Platinelectroden von 10 bez. 35 cm^2 Fläche gaben in Flüssigkeitszellen von 8 oder 25 Ohm Fehler von etwa 3 oder 1 Proc. bez. etwa 1 oder $^1/_3$ Proc. Wenn das Product aus Electrodenfläche und Widerstand 250 Ohm . cm^2 erreicht, so wird der zu befürchtende Fehler nicht über 1 Proc. betragen. Verschiedene Inductorien und Telephone zeigten in dieser Beziehung keinen merklichen Unterschied.

Gut platinirte Electroden von 10 bez. 35 cm^2 konnten mindestens bis zu Widerständen von 50 bez. 8 Ohm abwärts als polarisationsfrei (mit Fehlern unter 0,1 Proc.) verwendet werden.

Für gute Platinirung genügt nicht ein dünner Anflug von Platinschwarz, sondern die Electrode soll *matt* erscheinen.

Sinusströme gleicher Periode (85 / Sec.) sind von der Polarisation viel stärker beeinflusst, so dass mit Sinusinductor und Dynamometer für 8 Ohm zwischen blanken Electroden von 10 cm^2 etwa 25 Proc. Fehler entstanden. Platinirte Electroden von 35 cm^2 dagegen gaben mit Sinusströmen und Unterbrechungsströmen merklich dasselbe Resultat.

Grosse Widerstände. Hier treten einige besondere Hindernisse auf.

So hat man *Fernwirkungen des Inductoriums* auf Brücke und Telephon durch hinreichende Entfernung (1 m) des ersteren und Orientirung der Axe des Telephons und einer Brückenwalze senkrecht zu den Kraftlinien des Inductoriums zu vermeiden.

Bei Wasser und sehr verdünnten Lösungen stört die *electrostatische Capacität der Flüssigkeitszelle* (welche der Dielectricitätsconstante und dem specifischen Widerstande der Flüssigkeit proportional ist) das Minimum. Doch reicht die Störung nicht so weit, dass man selbst bei Wasser nicht 1 Proc. Sicherheit verbürgen könnte. Verbessern kann man auch hier durch geeignete Nebenschaltung eines kleinen Condensators mit regulirbarer Capacität.

Wachsen die zu messenden Widerstände auf hunderttausende Ohm, so treten im allgemeinen störende Geräusche im Telephon auf, die man auf *electrostatische Ladungen* zurückzuführen hat. Dieselben lassen sich oft, wie schon Elsas bemerkte, durch eine Erdleitung an einem geeigneten Punkte der Verzweigung beseitigen oder wenigstens bis zu einem brauchbaren Minimum abschwächen. Bei Widerständen von der Ordnung 10^6 Ohm können aber Fehler von einer Anzahl von Procenten auftreten.

Im *Wasserbade* entstehen an den Gefässwänden der Widerstandszellen Flaschenladungen, die schon bei nicht sehr grossen Widerständen das Minimum verschlechtern. Je umfangreicher das Widerstandsgefäss, desto grösser ist im allgemeinen diese Störung. (Enge Verbindungsröhren verlangen aber wegen der Stromwärme auch im Bade Vorsicht). Nebenschaltung eines Condensators neben den benachbarten Brückenzweig kann auch hier verbessern. Das Leitungsvermögen eines wässerigen Bades ist gleichgültig, da schon destillirtes Wasser die Ladungen voll zur Entwickelung kommen liess.

Ein *Petroleumbad* zeigte diese Störung nicht.

Unsymmetrie des Telephons. Eine solche bemerkt man zuweilen bei der Messung grösserer Widerstände. Commutiren des ganzen Stromes oder Commutiren des Telephons gegen den Strom ändert den Ort des Minimums. Die Abweichung ging in einem Falle bis ± 4 Proc. Sie stammt sehr wahrscheinlich von electrostatischen Ladungen des Telephones. Ummagnetisiren des letzteren kehrte das Vorzeichen der Unsymmetrie um.

Man eliminirt dieselbe durch Commutiren des Telephons und Mittelnehmen aus den beiden Einstellungen. Das Telephon ist hierbei jedesmal in derselben Weise zu halten.

Ein kleines Inductorium mit Eisendrahtbündel als Kern zeigte die Unsymmetrie stärker als ein solches mit massivem Kern. Ueberschieben einer Metallhülse über den Kern verminderte die Unsymmetrie im ersteren Falle. Hiernach wird bei grossen zu messenden Widerständen das Inductorium mit Drahtbündelkern leichter zu Fehlern führen.

Strassburg, 7. April 1893.

---

2. *Das Hall'sche Phänomen in Eisen, Kobalt und Nickel; von A. Kundt.*

Bald nachdem Hall entdeckt hatte, dass die Aequipotentiallinien eines galvanischen Stromes, welcher eine dünne Platte durchfliesst, durch eine magnetisirende Kraft, deren Richtung senkrecht zu der Ebene der Platte ist, gedreht werden, gab er auch das experimentelle Gesetz für diese Erscheinung, die jetzt allgemein den Namen des Hall'schen Phänomens führt. Wir nehmen die gewöhnliche Anordnung, bei welcher eine rechteckige Platte zwischen zwei parallelen Polflächen eines Electromagneten so aufgestellt ist, dass die Platte den Polflächen parallel steht. Auf zwei gegenüberliegenden Kanten derselben sind der Länge nach zwei Drähte als Electroden aufgelöthet, welche zur Zuführung des Stromes, den wir kurz den primären nennen wollen, dienen. In der Mitte der anderen beiden Kanten sind an zwei Punkten gleichen Potentials des die Platte durchfliessenden Stromes zwei punktförmige Electroden angebracht. Zwischen diesen tritt bei Erregung des Electromagneten eine Potentialdifferenz, e, auf, deren Grösse nach Hall ist

$$e = \frac{R \cdot J \cdot M}{d}.$$

J bezeichnet hierbei die Intensität des Primärstromes, M die Stärke des magnetischen Feldes, d die Dicke der Platte. R bezeichnet eine für das Material der Platte charakteristische Constante, welche Hall den „Rotationscoefficienten" des betreffenden Materials nennt. Er bezeichnet den letzteren als positiv, wenn die Drehung der Aequipotentiallinien in demselben Sinne erfolgt, wie der das Magnetfeld erregende Strom fliesst; findet das Umgekehrte statt, so wird der Coefficient negativ bezeichnet. Die durch die Formel ausgedrückte Abhängigkeit der Grösse e von der Dicke der Platte und der Intensität des Primärstromes ist durch die Versuche von Hall und anderen, insbesondere durch A. v. Ettingshausen und W. Nernst hinreichend bestätigt. Anders liegt es mit

der Proportionalität von e, welche Grösse wir, wie üblich, Hall-Effect nennen wollen, mit der Stärke des Magnetfeldes. Alle bisherigen sorgfältig ausgeführten Versuche haben übereinstimmend ergeben, dass bis zu den Werthen von M, zu welchen man bisher ging, bei den schwach magnetischen oder schwach diamagnetischen Metallen die Grösse e dem M proportional bleibt. Versuche von Hall[1]) und von v. Ettingshausen und Nernst[2]) ergeben dagegen für Nickel nicht mehr die erwähnte Proportionalität. Hr. Hall weist an seinen Zahlen schon nach, dass der Hall-Effect im Nickel viel mehr der Magnetisirung der Platten proportional sei, und Hr. Goldhammer[3]) zeigt dies an einer Beobachtungsreihe von v. Ettingshausen und Nernst, indem er für die verschiedenen Feldstärken die Magnetisirung der Nickelplatte aus den bezüglichen Rowland'schen Untersuchungen berechnet. Für Co und Fe ist dagegen die Beziehung des Hall-Effectes zu der Magnetisirung nicht mit Sicherheit nachweisbar, da die Versuche nicht über die Grenzen, innerhalb welcher die Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional bleibt, hinreichend hinausgehen.

Für eine zu entwickelnde Theorie des Hall'schen Phänomens ist es aber, wie schon Hall hervorhob, von der grössten Wichtigkeit, zu constatiren, ob in allen den drei stark magnetischen Metallen Fe, Co und Ni der Hall-Effect genau der Magnetisirung proportional bleibt, um so mehr, als Nickel sich bezüglich der Rotation der Aequipotentiallinien umgekehrt verhält wie Eisen und Kobalt.

Der Rotationscoefficient ist nämlich nach Hall für Eisen und Kobalt positiv, für Nickel negativ.

Ich habe es daher unternommen, noch einmal für Fe, Co und Ni den Hall-Effect bis zu so hohen Magnetfeldern, als ich sie mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln erreichen konnte (etwa 22 000 ($cm^{-1/2}\ g^{1/2}\ sec^{-1}$)) zu untersuchen und zugleich an *denselben Platten*, die für diese Versuche dienten, die jeweilige Magnetisirung durch eine Grösse, die dieser Magnetisirung

---

1) Hall, Phil. Mag. **12.** p. 157. 1881.

2) v. Ettingshausen und Nernst, Sitzungsber. der Wien. Akad. **94.** 1886.

3) Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 98. 1892.

proportional ist, zu ermitteln. Indem ich sehr dünne, noch durchsichtige Platten der genannten Metalle, welche auf platinirtem Glas galvanoplastisch niedergeschlagen wurden, benutzte, konnte ich für alle die Feldstärken, für welche der Hall-Effect gemessen wurde, auch die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in den im magnetischen Felde befindlichen Platten beobachten. Diese Drehung ist nach der Gesammtheit der vorliegenden Untersuchungen der Magnetisirung der Platten proportional.[1] Es hat sich das Resultat ergeben, dass innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler Hall-Effect und electromagnetische Drehung der Polarisationsebene in Platten von Fe, Co und Ni einander proportional bleiben. Damit ist die Proportionalität zwischen Magnetisirung und Hall-Effect für diese Substanzen sicher erwiesen.

Ich gebe zunächst eine kurze Beschreibung der Anordnung der Versuche, dann eine Beobachtungsreihe mit einer Goldplatte und eine andere mit einer Silberplatte. Diese Reihen sollen nur zeigen, dass die ganze Anordnung gut und sicher functionirte. Es folgen dann die Beobachtungen an Fe, Co und Ni.

Zum Schluss berichte ich über einige Versuche, die ich mit Wismuthplatten angestellt habe, welche galvanoplastisch auf platinirtem Glas niedesgeschlagen waren. Das Resulat derselben ist bis jetzt im Widerspruch mit allen bisherigen Arbeiten, welche einen sehr grossen Hall-Effect im Wismuth ergeben. Die galvanoplastisch hergestellten Wismuthschichten zeigten einen so kleinen Effect, dass derselbe mit dem für die anderen Metalle benutzten Galvanometer genau messend nicht verfolgt werden konnte.

Um im Folgenden in den Bezeichnungen kurz sein zu können, nenne ich, in Uebereinstimmung mit früheren Beobachtern, den Strom, welcher die Platte durchfliesst, wie schon bemerkt, den „primären Strom", die Electroden, welche ihn der Platte zuführen, die „primären Electroden"; die Electroden, welche den durch den Magnetismus abgeleiteten Strom führen, „Hall-Electroden" oder „secundäre Electroden", diesen Strom selbst „secundären Strom". Der Strom, welcher den Magnet erregt, möge „magnetisirender Strom" heissen.

1) du Bois, Wied. Ann. **31.** p. 941. 1887.

Dann möchte ich nicht unterlassen, dankend zu erwähnen, dass bei Anstellung der Versuche mir Hr. Dr. H. Rubens in jeder Weise behülflich war.

Anordnung der Apparate.

1. Die Metallplatten.

Die zu benutzenden Metallplatten wurden, wie schon bemerkt ist, electrolytisch auf platinirtem Glas niedergeschlagen, wie ich dies früher bei meinen Versuchen über magnetische Circularpolarisation in den Metallen beschrieben habe.[1] Dann wurde mit dem Diamant ein ungefähr quadratisches Stück des niedergeschlagenen Metalles, welches im durchfallenden Lichte noch möglichst gleichförmig erschien, sodass man annehmen konnte, dass die Metalldicke durchweg die gleiche sei, abgegrenzt. Das Stück stand dann mit dem anderen Theile nicht mehr in leitender Verbindung. Auf zwei gegenüberliegenden Kanten des abgegrenzten Stückes wurden der ganzen Länge nach zwei Drähte angelöthet, welche den primären Strom zuführen sollten, auf den anderen Kanten wurden möglichst in die Mitte zwei dünne Drähte gelöthet, die Hall-Electroden. Der ganze Flächeninhalt der benutzten Metallschicht betrug meist weniger als $^1/_4$ qcm.

2. Der Magnet.

Zur Erzeugung des Magnetfeldes diente ein älterer, mittelgrosser Electromagnet Ruhmkorff'scher Construction. Da ich zu möglichst hohen Feldern kommen wollte, mussten besondere Polstücke angefertigt werden. Es waren dies abgestumpfte Kegel, deren vordere kreisförmige Abstumpfungsfläche einen Durchmesser von 10 mm hatte. Dieselben waren für die Beobachtung der Circularpolarisation mit centralen Durchbohrungen von 3 mm Durchmesser versehen. Die beiden Polflächen hatten einen Abstand von 5 mm. Das Magnetfeld zwischen ihnen ist als homogen zu betrachten. Da die grösste Seitenlänge der benutzten Platten 7 mm, der Durchmesser der Polplatten dagegen 10 mm betrug, so konnten die Metallstücke zwischen den Polplatten stets so eingestellt werden, dass sie mit ihren Flächen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien sich ganz in dem homogenen magnetischen Felde befanden.

1) A. Kundt, Wied. Ann. **23.** p. 228. 1884 und **27.** p. 191. 1886.

Für die Bestimmung der electromagnetischen Circularpolarisation in den Schichten von Fe, Co und Ni musste abwechselnd die Metallschicht, in welcher der Hall-Effect beobachtet war und eine von dem Metall freie, platinirte Stelle des Glases zwischen die Pole gebracht werden, um durch Differenzbestimmungen die Drehung der Polarisationsebene in Fe, Co und Ni zu erhalten. Zu diesem Zwecke war die mit dem Metall überzogene platinirte Glasplatte an einem verschiebbaren Gestell angebracht, dessen Verschiebungen durch Anschläge begrenzt waren, sodass mit Sicherheit immer die eine oder die andere Stelle genau in die Mitte des Magnetfeldes, vor die Durchbohrungen gebracht werden konnte. Der Magnet wurde durch den Strom, den die Berliner Electricitätswerke liefern, erregt. Um verschiedene Magnetfelder zu erhalten, wurden in den magnetisirenden Strom passende Widerstände eingeschaltet.

3. Der optische Apparat.

Als Lichtquelle für die Drehungsbestimmungen diente ein Linnemann'scher Zirkonbrenner. Der Polarisator war ein Doppelnicol nach der Angabe von Lippich. Das analysirende Nicol befand sich in einem Theilkreise, welcher mit Hülfe eines Nonius 0,01^{0} abzulesen gestattete. In den Gang der Strahlen war ein rothes Glas eingeschaltet, sodass die Drehung für das ziemlich homogene Licht, welches durch dieses hindurchging, gemessen wurde. Die Intensität des magnetischen Feldes bei jedem einzelnen Versuche wurde in folgender Weise ermittelt.

Von früheren Versuchen stand eine Glasplatte zur Verfügung, deren Verdet'sche Constante für Natriumlicht genau bestimmt war. Durch Ermittelung des Verhältnisses der Drehung von Natriumlicht und von dem benutzten rothen Licht in dieser Platte bei irgend einer Feldstärke wurde zunächst die Verdet'sche Constante der Vergleichsplatte für rothes Licht gefunden. Ist diese bekannt, so ist es nur nöthig, für *eine* Feldstärke die Drehung, welche die Polarisationsebene des rothen Lichtes in dieser Normalplatte erfährt, zu vergleichen mit der Drehung durch die betreffende Glasplatte, auf welcher Fe, Co oder Ni niedergeschlagen ist, um für sämmtliche magnetische Felder, in welchen Drehung und das Hall'sche Phänomen an der betreffenden Platte beobachtet

ist, die Intensität in absolutem Maasse berechnen zu können, da die Drehung im Glase der Feldstärke genau proportional bleibt. Sämmtliche angegebenen Feldstärken sind in dieser Weise gefunden.

4. Die electrischen Anordnungen.

Der Primärstrom für die dünnen Metallplatten wurde von einem Accumulator geliefert, dessen electromotorische Kraft sich während längerer Zeit sehr nahe constant erhielt. Die Intensität des Stromes wurde durch eingeschaltete Widerstände passend regulirt und konnte durch ein eingeschaltetes Siemens-Torsionsgalvanometer gemessen werden. Das für die Messung des Hall-Stromes benutzte Galvanometer war ein Siemens'sches bekannter Construction mit vier nebeneinandergeschalteten Rollen von je 20 Ohm Widerstand. Die ganze Schwingungsdauer des Magnetsystems betrug ungefähr 6 Sec., der Abstand des Fernrohrs nahe 6 m. Hierbei entspricht, wie eine Bestimmung ergab, ein Ausschlag von einem Centimeter $0,345 . 10^{-6}$ Amp. Die beobachteten Ausschläge waren der die Galvanometerwindungen durchfliessenden Stromintensität noch so nahe proportional, dass eine Correction anzubringen unnöthig war. Es ist daher im Folgenden die Potentialdifferenz an den beiden Hall-Electroden auf der Platte dem Galvanometerausschlag direct proportional gesetzt, und als Hall-Effect ist nicht die Potentialdifferenz e, sondern der derselben entsprechende Galvanometerausschlag angegeben.

Es ist nicht möglich, die Hall-Electroden auf den benutzten, sehr kleinen Metallplatten genau auf zwei Stellen gleichen Potentials anzubringen; für die Beobachtung des Hall-Effectes ist es aber sehr angenehm, wenn vor Erregung des Magnetfeldes der Strom im abgeleiteten Kreise, d. h. demjenigen der Hall-Electroden, Null ist. Um dies zu erreichen, wurde, wie üblich, die eine, passend ausgewählte secundäre Electrode mit der einen primären leitend verbunden; es kann dann durch Einschalten von Widerstand in diese Zweigleitung immer erreicht werden, dass bei Schluss des Primärstromes, wenn der Magnet nicht in Thätigkeit ist, das Galvanometer auf Null bleibt. Diese Abgleichung wurde vor jeder einzelnen Beobachtung sehr sorgfältig gemacht.

5. Der Einfluss der Platinschicht der Glasplatten auf die Resultate.

Da sich unter den zu untersuchenden Metallschichten das Platin befindet, auf welches jene niedergeschlagen sind, so geht ein Theil des Primärstromes durch diese Platinschicht. Da die letztere aber dünner war, als die Schichten von Fe, Co und Ni, so ist der durch das Platin gehende Zweigstrom nicht zu beträchtlich. Berücksichtigt man ferner, dass der Rotationscoefficient für Pt sehr viel kleiner ist, als für die genannten Metalle, so ergibt sich, dass der Einfluss der Platinschicht bei der Ermittelung des Hall-Effectes, wenigstens für die drei Metalle Fe, Co und Ni, unberücksichtigt bleiben kann. Um einen ungefähren Ueberblick zu gewinnen, ein wie grosser Theil des die Platte durchfliessenden Primärstromes durch die Platinschicht geht, wurde von der untersuchten Eisenplatte, nachdem der Widerstand zwischen den Primärelectroden genau gemessen war, durch verdünnte Säure, welche das Platin nicht angreift, das Eisen entfernt und abermals der Widerstand gemessen. Es ergab sich im ersten Falle 3,6 Ohm, im zweiten 11,2 Ohm; daraus folgt, dass von dem Primärstrome in dieser Platte etwa $^2/_3$ durch das Eisen und $^1/_3$ durch das Platin gingen. Hiernach könnte bei unserer Eisenplatte der Durchgang des Zweigstromes im Platin für die Beobachtung von Einfluss sein, wenn nicht andererseits der Hall-Effect im Eisen etwa 40 mal so gross wäre, wie im Platin. Aehnlich ist das Verhältniss bei den benutzten Nickel- und Kobaltplatten.

6. Gang der Versuche.

Nachdem die mit dem electrolytisch niedergeschlagenen Metall versehene platinirte Glasplatte an der oben erwähnten Schiebevorrichtung befestigt und passend zwischen die Magnetpole gebracht war, wurde zunächst die Zweigleitung so abgeglichen, dass bei Schluss des Primärstromes das Galvanometer keinen Ausschlag zeigte. Dann wurde der magnetisirende Strom geschlossen und die kleine Einwirkung, welche der Magnet direct durch Fernwirkung auf das Galvanometer ausübte, ermittelt, um dieselbe bei den Ausschlägen in Rechnung zu ziehen. Endlich wurde für die eine und für die entgegengesetzte Richtung des magnetisirenden Stromes der Ausschlag des Galvanometers, also der Hall-Effect, gemessen.

Dieselben Beobachtungen wurden mehrfach wiederholt und aus den erhaltenen Resultaten wurde das Mittel genommen. Die verschiedenen Versuche stimmten fast immer bis auf wenige Millimeter untereinander überein. Nachdem so für die verschiedenen Feldstärken der Hall-Effect gemessen war, wurde für dieselben Feldstärken, die durch Regulirung des magnetisirenden Stromes leicht genau wieder hergestellt werden konnten, die Drehung der Polarisationsebene bei Umkehrung des magnetisirenden Stromes für den Durchgang des Lichtes durch Glas, Platin und Metall, und durch Glas und Platin allein bestimmt. Die Intensität der Magnetfelder ergab sich dann in der oben erwähnten Weise durch Vergleichung mit dem Normalglas, dessen Verdet'sche Constante für rothes Licht bekannt ist.

Um mich zu überzeugen, dass die ganze Anordnung befriedigend functionirte, wurden Versuche mit einer auf platinirtem Glas galvanisch niedergeschlagenen Goldschicht und einer ebenso hergestellten Silberschicht gemacht. Für diese Metalle ist nach dem bisher vorliegenden Beobachtungsmaterial eine genaue Proportionalität des Hall-Effectes mit der Stärke des Magnetfeldes vorhanden. Diese letztere wurde auch hier durch die Circularpolarisation in den Glasplatten bestimmt. Zwar ist bei diesen Platten der Hall-Effect nur etwa viermal so gross, als im Platin; indessen ist die Leitfähigkeit etwa die siebenfache und war die Dicke mindestens die dreifache der Platinschicht, sodass auch hier der Einfluss der letzteren verschwindet. Uebrigens würde das Platin, da auch in ihm der Hall-Effect der Magnetisirung proportional ist, das für Gold und Silber zu erwartende Resultat qualitativ nicht beeinträchtigen.

Controlversuche mit Gold und Silber.

1. Gold.

Abstand der Primärelectroden von einander 5 mm.
" " Hall-Electroden " " 4,5 mm.
Widerstand zwischen den Primärelectroden 0,43 Ohm.
" " " Hall-Electroden 0,55 "
Intensität des primären Stromes 0,0556 Amp.

2. Silber.

Abstand der Primärelectroden von einander 4,5 mm.
" " Hall-Electroden " " 3,5 "
Widerstand zwischen den Primärelectroden 1,0 Ohm.
" " " Hall-Electroden 1,0 "

Drehung in Glas Φ	Feldstärke M in cm g sec.	Hall-Effect ϱ Galvanometerausschlag in cm	Hall-Effect / Drehung $\frac{\varrho}{\Phi}$	Hall-Effect berechnet
		Gold.		
0,890°	3810	1,65 cm	1,85	1,61 cm
1,936°	8280	3,4 "	1,76	3,5 "
3,201°	13700	5,8 "	1,81	5,8 "
4,279°	18300	7,7 "	1,80	7,7 "
4,998°	21400	9,1 "	1,82	9,1 "
			Mittel 1,81	
		Silber.		
0,890°	3810	5,8 cm	6,54	6,0 cm
1,936°	8280	13,2 "	6,83	13,1 "
3,201°	13700	21,7 "	6,79	21,6 "
4,279°	18300	29,3 "	6,84	29,0 "
4,998°	21400	33,8 "	6,76	33,8 "
			Mittel 6,75	

In der vorstehenden Tabelle sind die Drehungen der Polarisationsebene bis auf 0,001° angegeben, da die Ablesungen bis auf 0,01° gemacht wurden und jede in den Tabellen angegebene Zahl das Mittel aus 10 Einstellungen ist. Die aus den Drehungen berechneten Feldstärken sind in den letzten Ziffern abgerundet, da dieselben, entsprechend der Fehlergrenze der Drehungsbestimmungen, höchstens bis zur 4. Ziffer genau sind.

In der Columne Hall-Effect, ϱ, sind die Galvanometerausschläge angegeben; dieselben sind, wie oben dargelegt wurde, der Grösse e der Hall'schen Formel, d. h. der secundären electromotorischen Kraft proportional. Da es sich in dieser Mittheilung nicht um die Bestimmung absoluter Rotationscoefficienten handelt, sondern nur um die relativen in einer und derselben Platte bei Aenderung des Magnetfeldes, konnte die Berechnung der e aus den ϱ unterbleiben.

In der 4. Columne ist das Verhältniss von ϱ / Φ angegeben

und mit Hülfe des Mittels dieser Zahlen sind die Werthe der 5. Columne berechnet.

Die Werthe von ϱ / Φ sind sowohl für Gold wie für Silber innerhalb der Beobachtungsfehler als constant zu betrachten; die beobachteten und berechneten ϱ stimmen bis auf wenige Millimeter für jedes der Metalle untereinander überein. In Gold und Silber ist also der Hall-Effect bis zu Magnetfeldern von 21400 cm g sec. innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler der magnetisirenden Kraft proportional.

Zur Veranschaulichung sind in der Figurtafel p. 269 die Beobachtungen graphisch aufgetragen. Die Curven $\varrho = f(M)$ sind fast genau gerade Linien.

Es sei noch bemerkt, dass der Rotationscoefficient auch bei unseren Versuchen, wie Hall es für Gold und Silber angegeben, das negative Zeichen hat.

Versuche mit Eisen, Kobalt und Nickel.

1. Eisen.

Abstand der Primärelectroden von einander 6 mm.

„ „ Hall-Electroden „ „ 7 „

Dicke der Eisenschicht berechnet aus der Maximaldrehung der Polarisationsebene nach meinen früheren Beobachtungen[1]) $14,1 . 10^{-6}$ cm.

Widerstand zwischen den Primärelectroden 3,6 Ohm.

„ „ „ „ nachdem die Eisenschicht durch Säure von dem Platin abgewischt war 11,2 Ohm.

Der Widerstand zwischen den Hall-Electroden ist nicht bestimmt.

Intensität des primären Stromes 0,021 Amp.

2. Kobalt.

Abstand der Primärelectroden von einander 4,0 mm.

„ „ Hall-Electroden „ „ 3,0 „

Dicke der Kobaltschicht berechnet aus der Maximaldrehung der Polarisationsebene nach den Versuchen des Hrn. du Bois[2]) $6,3 . 10^{-6}$ cm.

1) A. Kundt, Wied. Ann. **27.** p. 191. 1886.
2) du Bois, Wied. Ann. **31.** p. 941. 1887.

Widerstand zwischen den Primärelectroden 11,7 Ohm.
" " " Hall-Electroden 11,5 "
Intensität des Primärstromes 0,0162 Amp.

3. Nickel.

Abstand der Primärelectroden von einander 6 mm.
" " Hall-Electroden " " 6 "
Dicke der Nickelschicht berechnet aus der Maximaldrehung der Polarisationsebene nach den Versuchen des Hrn. du Bois[1]) $5{,}3 \,.\, 10^{-6}$ cm.

Widerstand zwischen den Primärelectroden 4,1 Ohm.
" " " Hall-Electroden 6,8 "
Intensität des Primärstromes 0,0112 Amp.

Die nachstehende Tabelle enthält die Beobachtungsresultate.

Drehung in Glas und Metall Φ_1	Drehung in Glas Φ_2	Drehung in Metall Φ_3	Feldstärke M in cm g sec.	Hall-Effect ϱ in cm	Hall-Effect / Drehung $\frac{\varrho}{\Phi}$	Hall-Effect berechnet
			Eisen.			
3,12°	0,85°	2,27°	5950	14,2	6,55	14,6
4,17°	1,24°	2,93°	8680	20,4	6,97	19,7
6,86°	2,05°	4,81°	14050	30,9	6,45	32,4
8,16°	2,53°	5,63°	17710	38,4	6,83	38,0
8,87°	3,10°	5,77°	21700	39,9	6,92	39,0
					Mittel 6,74	
			Kobalt.			
1,363°	0,700°	0,663°	2990	7,6	11,5	7,7
2,249°	1,078°	1,171°	4620	13,0	11,1	13,5
3,810°	1,936°	2,874°	8280	22,0	11,7	21,7
5,685°	3,201°	2,484°	13700	28,4	11,3	28,7
6,783°	4,279°	2,504°	18300	29,5	11,8	29,0
7,474°	4,998°	2,476°	21400	29,9	12,0	28,7
					Mittel 11,6	
			Nickel.			
0,562°	0,242°	0,320°	1570	11,0	34,4	11,1
1,286°	0,542°	0,744°	3570	24,1	32,5	25,9
1,740°	0,923°	0,817°	6090	30,2	36,8	28,4
2,432°	1,540°	0,892°	10150	31,0	34,7	31,0
3,292°	2,381°	0,910°	15700	32,0	35,1	31,6
3,933°	3,002°	0,931°	19800	33,1	35,3	32,3
4,309°	3,316°	0,983°	21900	33,4	34,0	34,1
					Mittel 34,7	

1) du Bois, Wied. Ann. 31. p. 941. 1887.

Die Bezeichnung über den einzelnen Columnen ist entsprechend derjenigen der Tabelle für Gold und Silber. Die Feldstärken sind aus den Drehungen der Polarisationsebene in Glas C_2 unter Zuhülfenahme der oben erwähnten Vergleichsglasplatte berechnet.

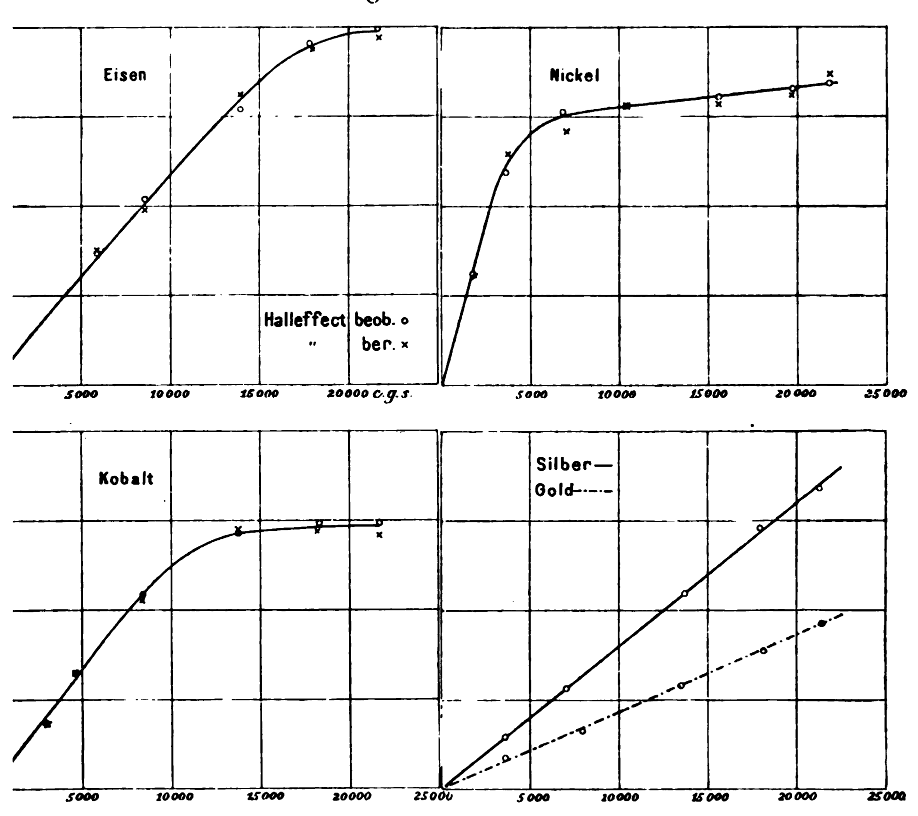
Es darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass die Drehungen in den Metallschichten procentisch erheblich ungenauer bestimmt werden, als diejenigen in den Glasplatten bei den Versuchen mit Gold und Silber, wegen der durch die Absorption der Metallschichten bedingten geringen Lichtintensität. Berücksichtigt man dies, so sind die Zahlen der 6. Columne, der Quotient aus dem Hall-Effect und der Drehung in Metall für jedes einzelne der drei Metalle als constant zu betrachten. Die mit dem Mittel dieser Quotienten, welches unter die Columne 6 geschrieben ist, multiplicirten Drehungen der Polarisationsebene in den Metallen sind in der Columne 7 als „berechnete Hall-Effecte" angegeben, sie entsprechen den Drehungen der Polarisationsebene, welche die benutzten Platten der Metalle geben würden, wenn ihre Dicke entsprechend dem angegebenen Mittelwerthe vergrössert wäre, vorausgesetzt, dass die Platten bis zu diesen Dicken durchsichtig bleiben. Zur besseren Anschaulichkeit sind in beistehenden Figuren a. f. S. die beobachteten Hall-Effecte als Function der Feldstärke eingetragen. Die entsprechenden Punkte sind mit einem kleinen Kreis umschrieben. Gleichzeitig sind in die Figuren die Werthe der Columne 7 eingetragen und durch ein Kreuzchen bezeichnet. Die Curven durch die ersten Punkte wären als Curven der Hall-Effecte der drei Metalle, die Curven durch die zweiten Punkte als solche der Drehung der Polarisationsebene in denselben zu bezeichnen.

Man sieht, dass innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler beide Arten von Curven hinreichend übereinstimmen.

Es kann somit als erwiesen gelten, *dass in den drei Metallen Fe, Co und Ni bei einem gegebenen primären Strom die Hall-Effecte bei Aenderung der Stärke des Magnetfeldes den Drehungen der Polarisationsebene in diesen Metallen, und damit, da diese der Magnetisirung der Platten proportional sind, auch letzterer selbst proportional bleiben.*

Eine weitere Vergleichung der Curven mit den von Hrn

du Bois l. c. gegebenen Magnetisirungscurven für Platten aus Fe, Co und Ni und der in ihnen beobachteten Circularpolarisation scheint nicht nöthig.

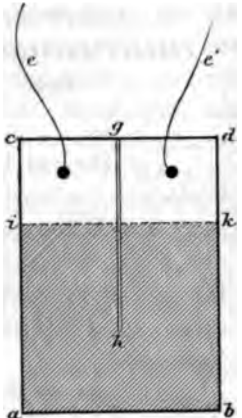


Versuche mit Wismuth.

Aus einer Lösung von weinsaurem Wismuth, der noch etwas Weinsäure und Ammoniak zugesetzt war, wurde auf platinirtem Glas Wismuth galvanisch niedergeschlagen. Leider lassen sich dickere Wismuthschichten auf diese Weise nicht erhalten; der Niederschlag ist nur im Anfang blank und festhaftend, bei längerer Dauer des zersetzenden Stromes wird derselbe schwarz und pulverig. Es wurde nun eine solche Wismuthplatte, die noch ziemlich hell durchsichtig, dabei auf der Oberfläche glatt und spiegelnd war, in derselben Weise wie die anderen benutzten Metallschichten mit Electroden ver-

sehen und zwischen den Polen des Electromagneten auf ihren Hall-Effect untersucht. Es ergab sich das unerwartete Resultat, dass selbst in stärkeren Magnetfeldern nur ein sehr geringer Hall-Effect beobachtet werden konnte, während nach allen früheren Beobachtern gerade in Wismuth das Hall'sche Phänomen ausserordentlich stark hervortritt. Es wurde daher noch eine zweite Wismuthplatte in derselben Weise hergestellt; obgleich ein Primärstrom von einer merklichen Intensität nachweisbar durch die Platten ging, und die Empfindlichkeit des Galvanometers noch erhöht wurde, betrug der Hall-Effect selbst in den stärksten Feldern nur etwa 15 mm. Auch dieser kleine Ausschlag konnte nicht einmal sicher gemessen werden, da das Galvanometer dauernd unregelmässige Schwankungen machte. Um dem Einwand zu begegnen, dass der ganze Primärstrom bei den obigen beiden Platten durch das Platin gegangen sei, und das Wismuth sich an der Stromleitung nicht merklich betheiligt habe, da entweder das galvanisch niedergeschlagene Wismuth ein ausserordentlich geringes Leitungsvermögen besitzt, oder vielleicht sehr viele, mikroskopisch nicht wahrnehmbare, feine Risse enthält, wurde folgender Versuch gemacht. Auf ein Stück platinirtes Glas von der Form *abcd* (vgl. Figur p. 271) wurden zwei Kupferdrähte *e* und *e'* als Electroden angelöthet. Dann wurde ein schmaler Streif der Platinbelegung *gh* durch Abkratzen mit einem Schreibdiamant entfernt und der galvanische Widerstand der Platte bestimmt; derselbe ergab sich gleich 79,0 Ohm. Nun wurde die Platte bis zur Grenze *ik* galvanisch mit Wismuth überzogen. Der Widerstand war jetzt 66,9 Ohm. Die mit Wismuth belegte Fläche betrug etwa $^2/_3$ der ganzen Platte, es würde die Widerstandsabnahme, wenn die ganze Platte mit Wismuth bedeckt gewesen wäre, also etwa $^1/_3$ mehr betragen, der Widerstand also nahe gleich 61 Ohm sich ergeben haben. Nimmt man diese Zahl an, so berechnet sich der Widerstand der die ganze Platte bedeckenden Wismuthschicht zu 268 Ohm. Da der des Platins gleich 79,0 gefunden ist, so geht von einem Strom, der von 2 Electroden aus, durch die Doppelschicht Platin-Wismuth geschickt wird, 79/268, d. h. rund $^1/_3$ durch das Wismuth. Nach dieser Ermittelung wurde die Platte längs der Linie *gh* zerschnitten und die Wismuthschicht der einen

Hälfte mit Primärelectroden und Hall-Electroden versehen. Es ergab sich auch für diese Platte nur ein ganz geringer Hall-Effect, obgleich nun zweifellos von dem hindurchgesandten Primärstrom ein genügender Theil durch die Wismuthschicht floss. Es scheint also, dass der „Rotationscoefficient" für galvanisch niedergeschlagenes Wismuth ein ausserordentlich kleiner ist, während derselbe für gegossenes Wismuth im Vergleich zu anderen Metallen sehr gross ist. Zur Controlle habe ich auch noch eine kleine dünne Wismuthplatte gegossen, und mich überzeugt, dass dieselbe einen sehr starken Hall-Effect gab. Welches der Grund des verschiedenen Verhaltens des gegossenen und des galvanisch niedergeschlagenen Wismuth ist, vermag ich nicht zu entscheiden; vielleicht ist derselbe darin zu suchen, dass das gegossene Wismuth stets ausgeprägt krystallinische Structur zeigt, während an dem galvanisch niedergeschlagenen selbst unter dem Mikroskop kein krystallinisches Gefüge zu erkennen ist; doch können hierüber erst weitere Versuche entscheiden.



Berlin, Physik. Institut d. Universität.

---

3. *Ueber den Temperaturcoefficienten der Dielectricitätsconstanten des reinen Wassers; von Friedrich Heerwagen.*

Vor kurzem habe ich eine Methode zur Bestimmung von Dielectricitätsconstanten beschrieben [1]), bei welcher die Messung auf Widerstandsvergleichungen zurückgeführt war, und nur kleine Scalenausschläge eines Differentialelectrometers zu Interpolationszwecken allein verwendet wurden. Einige Versuche an destillirtem Wasser zeigten die Brauchbarkeit des Verfahrens.

An weitere Messungen bei niederen Temperaturen musste sich zunächst ein besonderes Interesse knüpfen, wegen des Maximums der Dielectricitätsconstanten, welches bei 4^0 nach der Theorie zu erwarten gewesen wäre. Leider fehlte es mir an Zeit, um die Untersuchung in solchem Umfange durchzuführen, wie ich es wohl gewünscht hätte.

Doch reicht das bisherige Versuchsmaterial aus, um die Frage nach der Gültigkeit der Mossotti-Clausius'schen Formel $d.(K+2)/(K-1) = D$, in welcher d die Dichte, K die Dielectricitätsconstante, D eine Constante bedeutet, zu entscheiden. *Diese Gleichung ist auf das Wasser nicht anwendbar*, sofern D als eine von der Temperatur unabhängige Constante aufzufassen ist.

Die Rechnungen von Lebedew [2]), sowie auch die Messungen von Cohn [3]) mittels electrischer Schwingungen hatten die Giltigkeit der erwähnten Gleichung in erheblichem Maasse wahrscheinlich gemacht, sodass auch Landolt und Jahn [4]) ihre ausgedehnten Versuchsreihen an organischen Flüssigkeiten nur nach dieser Formel reduciren, und derselben volle Giltigkeit beimessen.

---

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. **48.** p. 35. 1893.
2) Lebedew, Wied. Ann. **44.** p. 288. 1891.
3) Cohn, Wied. Ann. **45.** p. 370. 1892.
4) Landolt u. Jahn, Zeitschr. phys. Chem. **10.** p. 289. 1892.

Die am Schlusse meiner ersten Mittheilung erwähnte Versuchsreihe von 14,1° bis 16,7° zeigte in ihrem kleinen Intervall von 2,6° ebenfalls eine vorzügliche Uebereinstimmung mit der theoretischen Curve, sodass ich geneigt war, die Abweichungen einer bei anderer Temperatur ausgeführten Versuchsreihe von jener nicht der Formel zur Last zu legen, sondern kleine constante Fehler in meinen Messungen vermuthete, welche mit jeder neuen Füllung des Electrometers wechselten. Thatsächlich zeigt nun aber die Gesammtheit meiner Beobachtungen — es handelt sich um drei ausgedehnte Versuchsreihen seit der vollen Ausbildung der Methode und der Erkenntniss der anfänglich störenden Einflüsse [1]) — einen ausgesprochen rein linearen Verlauf von K, von 20,8° bis 4,7° hinab.

Es muss das überraschen, nachdem Lorenz [2]) aus Messungen mit dem Interferentialrefractor das Resultat abgeleitet hat, es hätte der Brechungscoefficient des Wassers n_{Na} bei + 0,014° ein Maximum, n_{Li} sogar schon bei + 0,171°. Jamin [3]) hat früher eine stetige Abnahme von n bei sinkender Temperatur gefunden, aber auch seine Interpolationsformel zeigt ein Kleinerwerden von $\partial n / \partial t$ bei niedrigeren Temperaturen, sie lässt ein Maximum von n bei — 3,3° berechnen. Eine Concavität der Curve für n gegen die Axe der Temperaturen ist demnach als erwiesen zu betrachten, wenn auch erneute sorgfältige Messungen an verschiedenen Spectrallinien recht erwünscht wären. In der Abhandlung von Lorenz fehlen leider die Beobachtungszahlen, sodass man keine Vorstellung davon gewinnt, wie weit die Coefficienten der Interpolationsformeln Anspruch auf Zuverlässigkeit erheben.

Dagegen ergibt eine genauere Durchsicht der dielectrischen Messungen von Rosa [4]), dass dieselben mit einer linearen Formel ungleich besser harmoniren, als mit Lebedew's Rechnungen nach Mossotti-Clausius. Zwar zeigen Rosa's Messungen unter einander Differenzen von einigen Procenten,

1) Vgl. F. Heerwagen, Wied. Ann. **48**. p. 55. 1893.
2) Lorenz, Wied. Ann. **11**. p. 70. 1880.
3) Jamin, Compt. rend. **43**. p. 1191. 1856.
4) Rosa, Phil. Mag. (5) **31**. p. 188. 1891.

doch ist ihre Gesammtzahl sehr gross, und sie erstrecken sich über das Intervall von 31° bis 3°. Die Resultate sind nur graphisch, in Fig. 7 Taf. VI, mitgetheilt. Trägt man die nach Mossotti-Clausius berechneten Werthe ein, so liegen von 25° bis 7° zufälligerweise sogar *sämmtliche* Beobachtungen *unter*, ausserhalb dieser Grenzen *sämmtliche* Beobachtungen *über* der theoretischen Curve.

Cohn's[1]) Messungen der electrischen Wellen gehen von 9,5° bis 35,3°, es fehlen also tiefere Temperaturen, welche allein entscheiden könnten. Eine lineare Formel, unter Anwendung des aus meinen jetzigen Messungen folgenden Temperaturcoefficienten $(\partial K / \partial t) / K_{17^0} = 0{,}00447$, stellt auch diese Beobachtungen etwas besser dar, wie folgende Tabelle zeigt.

Tabelle I.

t	Wellenlänge in Wasser				
	beob.	ber. Cohn	Δ	ber. F. H.	Δ
9,5°	33,5	33,5	± 0,0	33,6	+ 0,1
10,5°	33,7	33,5	− 0,2	33,6	− 0,1
16,8°	34,1	33,9	− 0,2	34,1	± 0,0
19,8°	34,3	34,1	− 0,2	34,3	± 0,0
27,2°	34,7	34,9	+ 0,2	34,9	+ 0,2
31,7°	35,3	35,4	+ 0,1	35,2	− 0,1
35,3°	35,7	36,0	+ 0,3	35,5	− 0,2
			$\Sigma = 1{,}2$		$\Sigma = 0{,}7$

Freilich ist auch die Uebereinstimmung mit den theoretischen Zahlen noch sehr befriedigend in Anbetracht der möglichen Versuchsfehler.

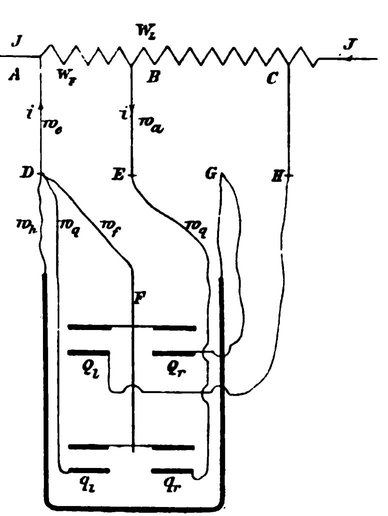
Meine weiteren jetzt mitzutheilenden Messungen sind in genau derselben Versuchsanordnung, wie die schon früher beschriebenen, ausgeführt, und zwar zum Theil im letzten Sommer, zum Theil im Winter.

Das Wesentliche meiner Methode bestand darin, dass ich ein Differentialinstrument benutzte, in welchem an *einem* Drahte zwei Electrometernadeln in zwei übereinander angeordneten Electrometern hängen. Nadel, Hülle und je ein Quadrantenpaar (q_l und Q_r in der schematischen Figur auf folgender Seite) sind mit einander verbunden und mit dem Punkte A eines Stromkreises.

1) Cohn, Wied. Ann. **45.** p. 370. 1892.

Durch Abzweigung von den Punkten B und C desselben Stromkreises werden die Quadrantenpaare q_r und Q_l geladen. Diese Ladungen streben die Nadel in entgegengesetzten Richtungen zu drehen. Sind die Abzweigungen so angelegt, dass die Nadel in Ruhe bleibt, so ist das *Empfindlichkeitsverhältniss* der zwei Electrometer umgekehrt proportional dem *Verhältniss der Quadrate der in ihnen wirksamen Potentialdifferenzen,* also auch dem Quadrate des Widerstandsverhältnisses zwischen AC und AB. Dieses Verhältniss ermittelt man einmal, wenn in beiden Electrometern Luft (W_l / W_f), ein anderes Mal, wenn im unteren Electrometer die zu untersuchende Flüssigkeit sich befindet (W_L / W_F). Dann ist die Dielectricitätsconstante der Flüssigkeit

$$K = \left(\frac{W_L}{W_F} \cdot \frac{W_f}{W_l}\right)^2.$$



Die Zuleitungswiderstände w_h, w_f, w_q sind so abgeglichen, dass Hülle, Flügel und die abgeleiteten Quadranten stets auf genau gleichem Potential sich befinden müssen, und die Potentialverluste auf diesen Zuleitungen werden in Rechnung gesetzt. Der Hauptstrom J, welcher die ladenden Potentiale lieferte, war im Falle der Versuche an Wasser ein Wechselstrom, der aus einem Transformator kam. Durch die Verwendung inducirter Ströme ist man vor *dauernder* einseitiger Polarisation völlig gesichert; Messungen mit Tourenzahlen von 42—85 in der Secunde liessen noch einen geringen Einfluss vorübergehender Polarisation erkennen, welcher im Anschluss an eine Formel von F. Kohlrausch [1]) in Rechnung gesetzt, und daher unschädlich gemacht werden konnte.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **148.** p. 143. 1873.

Dass die *electrostatische Capacität* des Electrometers viel zu gering sei, um Electricitätsmengen zur Ladung zu beanspruchen, welche eine merkliche Phasenverschiebung der Potentiale im unteren und oberen Electrometer hätten zur Folge haben können, war leicht zu überlegen. Dies blieb in meiner ersten Abhandlung unerwähnt, und ich möchte den Beweis jetzt nachtragen.

Die auf Quecksilber bezogene Widerstandscapacität des Electrometers betrug, wie früher angegeben, $\Gamma = 99 \times 10^{-8}\,\Omega$. Der specifische Widerstand des Quecksilbers ist $1 / 10630\ \Omega$, also die Widerstandscapacität meines Wasserelectrometers in absolutem Maasse $G = 105 \times 10^{-4}$ [cm^{-1}]. Folglich die electrostatische Capacität $C = K / 4\pi G = 621$ [cm] oder $c = 69 \times 10^{-5}$ Mikrofarad. Die Capacität der Zuleitungen etc., kann hiergegen nicht wesentlich in Betracht kommen, da ihr Dielectricum Luft mit um $^1/_{80}$ kleinerer Constante ist. Nach meinen Erfahrungen an einer grossen Zahl von absoluten Capacitätsbestimmungen, welche ich früher zu machen Gelegenheit hatte, möchte ich diese Capacitäten der Grössenordnung nach auf 10 bis allerhöchstens 100 electrostatische Einheiten veranschlagen.

Bleiben wir also bei der einer sicheren Berechnung allein zugänglichen Capacität des Wasserelectrometers von $c = 69 \times 10^{-5}$ M. F. Zur Ladung und Entladung desselben wird in Summa dieselbe Electricitätsmenge in Bewegung gesetzt, welche, bei gleichen nach dem Sinus der Zeit variirenden Potentialdifferenzen, durch einen Widerstand $W_c = 1/2\,Nc \times 2/\pi$ fliessen würde, wo N die Anzahl der ganzen Stromperioden pro Secunde bedeutet. Für $N = 85$ wird $W_c = 5{,}4 \times 10^6\,\Omega$. Die aus der angehängten Electrometercapacität folgende Phasenverschiebung im Betrage von $W_F / W_c = 4{,}5 / 5{,}4 \times 10^6 = 0{,}83 \times 10^{-6}$ ist also ganz verschwindend klein, selbst wenn sie durch die vernachlässigten Zuleitungen oder wegen des von der Sinusform abweichenden Potentialverlaufes auf ein Mehrfaches steigen sollte.

In der weiter unten folgenden Tabelle II gebe ich die Resultate aller Messungen, welche in der definitiven Anordnung der Apparate und besonders bei völlig unveränderter Stellung des Electrometers ausgeführt wurden. Ich gebe hier

nur Mittelwerthe; wie viele Einzelbeobachtungen in der Nähe jeder Mitteltemperatur lagen, ist in der Tabelle angegeben. Die Beobachtungen um $t = 20{,}75^0$ herum sind in Tabelle IV meiner ersten Mittheilung[1]) in extenso abgedruckt. Die folgenden zwei Zahlen lieferte eine ausgedehnte Beobachtungsreihe vom 23.—25. Juli 1892, im Laufe welcher einmal das Electrometer entleert, und sogleich mit neuem Wasser gefüllt wurde. Die nach Anbringung der gewöhnlichen Correctionen resultirenden Einzelzahlen für K zeigten keine nachweisbare Differenz. Das Arretiren, Entleeren, Füllen, Lösen der Nadel konnte also die Constante des Electrometers höchstens um wenige Zehntausendstel beeinflusst haben. Dabei waren die anzubringenden Correctionen von sehr merklich verschiedener Grösse, denn vor dem Umfüllen hatte das Wasser eine Leitfähigkeit von $\lambda = 2{,}5$, hernach nur $1{,}3 \times 10^{-10}$ Hg.

Die letzten drei Zahlen rühren von Beobachtungen vom 29—31. Jan. 93 her. Vor Beginn der Messungen stand das Electrometer 5 Tage mit Wasser gefüllt da, dann gab ich frische Füllung, und wartete noch $1\frac{1}{2}$ Stunden bis zur ersten Messung. Die Temperaturen sind stets zugleich Zimmertemperaturen, welche letztere schon mehrere Stunden vor den Messungen hergestellt, und durch passendes Heizen mit Gasflammen, resp. durch Fensteröffnen u. s. f. auf wenige Zehntelgrade constant gehalten wurden. Dann regulirte ich die Temperaturen so, dass das am Electrometer befestigte Thermometer, welches mit dem Wassergefäss zusammen in doppelter dicker Wattehülle steckte, stets $\frac{1}{2}$—1 Stunde auf etwa $0{,}02^0$ constant blieb, ehe ich eine Messung ausführte. Trotzdem mögen jetzt geringe Strömungen in der Flüssigkeit oder dgl. in merklicherer Weise störend gewirkt haben, als bei den völlig constanten Temperaturen der ersten grossen Beobachtungsreihe. Jedenfalls ist die Uebereinstimmung der Einzelbeobachtungen untereinander jetzt geringer.

Ich habe die Mühe nicht gescheut, für die sämmtlichen vorhandenen 61 Beobachtungen ausser einer graphischen Darstellung in grossem Maassstabe auch noch eine lineare Interpolationsformel nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Das Resultat ist

1) l. c. p. 60.

$$K = 80{,}878 \quad - \quad 0{,}362 \ (t - 17^0)$$
$$\pm \ 0{,}010 \qquad \pm 0{,}0024.$$

Der wahrscheinliche Fehler von 0,12 pro Mille, welchen die Rechnung für den absoluten Werth von K ergibt, ist natürlich völlig bedeutungslos, sofern gewiss constante Fehler im Apparate stecken, deren Einfluss leicht mehrere pro Mille betragen mag. So muss z. B. ein constanter Fehler resultiren aus der unvollkommenen Symmetrie der Flügelpaare. Sobald das Metacentrum für den Auftrieb des im Wasser befindlichen unteren Theiles des beweglichen Systems nicht genau in die Verticale Aufhängepunkt-Schwerpunkt fällt, wird beim Eingiessen des Wassers das System sich ein wenig gegen die Verticale neigen. Diese Neigung beobachtet man auch thatsächlich. Dieselbe verändert das geometrische Empfindlichkeitsverhältniss der Luft- und Wasserzelle, wenn auch nur wenig.

In der That, die einzige Beobachtungsreihe, welche zur Zeit einer früheren Justirung des Electrometers ausgeführt wurde, und lange genug nach dem Einfüllen des Wassers fortgesetzt war (vgl. Bd. 48, p. 56), um noch zum Schluss drei als brauchbar zu betrachtende Zahlen zu liefern, gab bei 16,3° $K = 81{,}46$, d. i. $0{,}40 = 0{,}49$ Proc. grösser, als jetzt gefunden. Die beiden Electrometerflügel waren damals gegenüber der neuen Justirung um 180° gegen einander verdreht. Die neue Stellung gab noch geringere Verlegungen beim Eingiessen des Wassers, und es waren überdies alle Justirungen auf's sorgfältigste ausgeführt, was anfangs noch nicht so sehr der Fall war.

Doch will ich zur Beurtheilung der Constanz dieser wahrscheinlich noch vorhandenen Fehler anführen, dass zwischen den Einzelbeobachtungen und den aus der angeführten linearen Interpolationsformel berechneten Zahlen Differenzen verblieben, deren grösste sich auf $+ 0{,}33$ und $0{,}19$, resp. $- 0{,}23$ und $- 0{,}22$ beliefen. Als wahrscheinlicher Fehler der Einzelmessungen ergibt sich $\pm 0{,}076$, d. i. 0,1 Proc., und thatsächlich liegen von den Differenzen Rechn.-Beob. 32 innerhalb, 29 ausserhalb dieser Grenzen.

Mit Rücksicht hierauf würde ich es selbst dann für erwiesen halten, dass $\partial K / \partial t$ nicht die von der Mossotti-Clausius'schen

Formel verlangte Abhängigkeit von der Temperatur zeigt, wenn die Beobachtungen bei 4,7° nicht einmal vorliegen würden. Diese aber sind vollends entscheidend. Freilich ist es sehr zu bedauern, dass bei der Herstellung eines Eiswasserbades um das Wasserelectrometer das ganze Instrument mir von seiner Stelle gerückt, und damit eine Fortsetzung der Beobachtungsreihe unmöglich gemacht wurde.

Tabelle II.

Anzahl	t	K beob.	K ber. linear	Δ	K ber. M.-Cl	Δ	$\sqrt{K}$	$\sqrt{K}$ ber.	$\Delta . 10^3$
26	20,75°	79,56	79,52	−0,04	79,56	±0,00	8,920	8,918	−2
19	16,35°	81,04	81,11	+0,07	81,40	+0,36	9,002	9,006	+4
7	14,65°	81,69	81,73	+0,04	82,00	+0,31	9,038	9,040	+2
3	12,75°	82,44	82,42	−0,02	82,60	+0,16	9,080	9,079	−1
4	9,85°	83,52	83,47	−0,05	83,29	−0,23	9,139	9,137	−2
2	4,70°	85,49	85,33	−0,16	83,89	−1,60	9,246	9,240	−6

In Tab. II gibt Col. 1 die Anzahl der Einzelbeobachtungen, Col. 2 die Temperatur, Col. 3 die beobachtete Dielectricitätsconstante. Es folgen die mit der linearen Formel (p. 278) berechneten Werthe, und die Differenzen Rechnung minus Beobachtung. Für $\sqrt{K} = n_\infty$ im Sinne von Maxwell's Theorie passt eine lineare Formel noch besser, als für K selbst, wie Col. 8, 9 und 10 zeigen. Doch ist darauf kein Gewicht zu legen, da bei 4,7° nur zwei Beobachtungen vorliegen. Col. 9 ist berechnet als

$$\sqrt{K} = 8{,}9932 - 0{,}0201\,(t - 17^0),$$

Col. 6 ist nach der Mossotti-Clausius'schen Formel berechnet, Col. 7 gibt die Differenzen zwischen Theorie und Versuchsresultaten. Man sieht, wie ausgesprochen die Abweichungen von der Theorie sich geltend machen, und es ist kaum zu erwarten, dass zahlreichere Messungen zwischen 0° und 10° noch eine Concavität der Curve für K gegen die Temperaturaxe aufdecken würden.

Höchst auffallend bleibt es immerhin, dass gerade in dem Gebiet gewöhnlicher Zimmertemperaturen, d. i. in der Nähe von 16°, der beobachtete Temperaturcoefficient mit dem theoretischen übereinstimmt, welcher letztere nur aus der Dichtigkeit und dem

absoluten Werthe von K zu berechnen ist. Doch kann es nicht gestattet sein, gerade daraus einen Schluss auf die innere Berechtigung der Formel $d \, . \, (K + 2) / (K - 1) = D$ ziehen zu wollen.

Müssten doch so hohe Dielectricitätsconstanten, wie z. B. die Alcohole und wie Wasser zumal sie aufweisen, schon nach den Annahmen, welche der Ableitung dieser Formel zu Grunde liegen, überhaupt unmöglich sein.

Adler[1]) hat kürzlich auf die der Poisson-Mossotti-Clausius'schen Formel analoge Gleichung von Betti aufmerksam gemacht. Dieselbe lautet

$$K = \frac{D}{D - 3\,d} \, .$$

Sie vermeidet die Schwierigkeiten, welchen die physische Deutung von D als „Maximaldichte" der betreffenden Substanz, oder Dichte ihrer Molecüle selbst, ausgesetzt ist. $\partial K / \partial t$ nach Betti ist $3\,K / (K + 2)$ mal grösser als nach Mossotti-Clausius, also nahe 2,9 mal grösser im Falle des Wassers. Bei 7^0 würde diese theoretische Curve die beobachtete tangiren. Die Abweichungen im durchmessenen Gebiete werden enorm gross.

Alle Theorien, welche mit der Dichte allein operiren, ohne Rücksicht auf die Temperatur, dürften dem Wasser gegenüber versagen. Damit sind auch die Gültigkeitsgrenzen solcher Formeln für andere Stoffe wieder in Frage gezogen.

Strassburg i. E., Physikalisches Institut. März 1893.

1) Adler, Wied. Ann. **44.** p. 173. 1891.

4. *Ueber galvanische Polarisationserscheinungen an einer dünnen metallischen Scheidewand in einem Voltameter; von John Daniel.*

Unter der Ueberschrift: Ein Versuch über electrolytische Polarisation hat Hr. L. Arons[1]) in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft einiges über die Vorgänge mitgetheilt, welche sich an einer dünnen Metallplatte abspielen, die eine von einem galvanischen Strom durchflossene Flüssigkeitszelle der Quere nach durchschneidet. Hr. Arons wies darauf hin dass die Versuche von mir fortgesetzt würden. Da ich gezwungen bin, meine Arbeit zu unterbrechen, theile ich im Folgenden die bisherigen experimentellen Ergebnisse mit; eine ausführliche Beschreibung sowie die anschliessenden theoretischen Betrachtungen, behalte ich einer späteren Mittheilung vor.

Die Methode war die von L. Arons[1]) beschriebene. Der Stromkreis wurde gebildet aus einer Kette von mehreren Accumulatoren, der Zersetzungszelle, einem Zusatzwiderstand und einem passend verzweigten Galvanometer. In der Zersetzungszelle befand sich eine Vorrichtung, welche es gestattete eine Querwand aus Glas einzusetzen. Diese Querwand hatte eine kreisrunde Durchbohrung von 15 mm Durchmesser, welche durch die zu untersuchenden Metallplatten bedeckt werden konnte. Besondere Sorgfalt wurde darauf verwendet, dass der gesammte die Zelle durchfliessende Strom die Bohrung, bezüglich die vorgelegte Metallplatte durchsetzte; wenn eine gleich grosse Glasplatte ohne Durchbohrung eingeschoben war, durfte das Galvanometer nicht den geringsten Ausschlag geben.

Zur Untersuchung kamen bisher Platten verschiedener Dicke von Gold, Platin und Aluminium, zumeist in einer Reihe verschieden concentrirter H_2SO_4 Lösungen. Einige Vorversuche wurden mit Lösungen von NaCl, $CuSO_4$, KOH angestellt.

---

1) L. Arons, Wied. Ann. **46**, p. 169. 1892.

2) l. c. p. 170.

Hatte man bei dem eingeschalteten Hülfswiderstand w_1 Ohm die Stromintensität i Ampère erhalten, solange die Durchbohrung der Glasplatte unbedeckt war. und erhielt man nach Bedeckung derselben mit dem betreffenden Metall dieselbe Stromstärke i, wenn nur noch w_2 Ohm eingeschaltet waren, so ergiebt sich die (doppelseitige) Polarisation e an dem Metall in Volt aus

$$e = i(w_1 - w_2).$$

Die wichtigsten Ergebnisse meiner bisherigen Versuche sind folgende:

Sehr dünne Bleche von Gold, Platin und Aluminium zeigen unter den Versuchsbedingungen keine Polarisation, selbst bei erheblicher Stromdichte (0,1 Amp./cm^2); für das untersuchte Gold [1]) lag die Dicke [2]), unterhalb deren die Polarisation ausbleibt, zwischen $0{,}0_4 5$ mm und $0{,}0_3 4$ mm, für Platin zwischen $0{,}0_3 15$ und 0,002 mm, bei Aluminium oberhalb $0{,}0_3 5$ mm. Bei Goldplatten von 0,04 mm Dicke scheint eine gegenseitige Beeinflussung der Polarisation an beiden Seiten nicht mehr stattzufinden.

Bei den besonders ausführlich untersuchten Goldplatten ergab sich:

a) Bei „dicken“ Platten (0,04 mm und mehr) ändert sich in weiten Grenzen die Polarisation nur wenig mit der Stromdichte (0,005—0,1 Amp./cm^2), vorausgesetzt, dass der stationäre Zustand abgewartet wird.

b) Bei dünneren Platten bis herab zur „kritischen Dicke“ ist die Stärke der Polarisation innerhalb derselben Grenzen eine Function der Stromdichte; bei dünnen Platten eine lineare Function.

Als Beispiel seien eine Reihe von Beobachtungen in 30% H_2SO_4 Lösung angeführt:

In der Tabelle enthält die erste Horizontalreihe die Stromdichte, die erste Verticalreihe die Dicke der Goldplättchen in mm; die übrigen Zahlen geben die entsprechenden Werthe der (beiderseitigen) Polarisation e (vgl. obige Formel) in Volt.

---

1) Die Goldplatten waren von Hrn. Goldschläger Müller in Dresden auf Bestellung geschlagen; das Material enthielt $^{925}/_{1000}$ reines Gold.

2) Die geringen Dicken sind aus Wägungen grösserer Stücke berechnet.

Stromdichte in Amp. / cm^2.

Dicke der Goldplatte in mm	0,09	0,05	0,03	0,02	0,009	0,004
0,024	3,05 Volt	2,96	2,98	2,86	2,79	2,72
0,004	2,43 „	2,35	1,72	1,41	0,83	0,37
0,0004	0,71 „	0,38	0,25	0,15	0,06	0,03

Bei einem Goldblättchen von $0{,}0_45$ mm konnte keinerlei Polarisation wahrgenommen werden; als nach $2^1/_2$ stündigem Durchgang eines Stromes von 0,15 Amp. ohne Stromunterbrechung das Blättchen mit einem Glasstab durchstossen wurde, zeigte sich keine Schwankung des Galvanometers. Es sei darauf hingewiesen, dass die Dicke dieses Blättchens gleich dem Radius der „molecularen Wirkungssphäre" nach Plateau und Quincke ist (Wüllner, Experimentalphysik I § 77). Wie in H_2SO_4 zeigte das Plättchen von Au, Pt und Al unterhalb der angegebenen Grenzen keine Polarisation in Lösungen von KOH (spec. Gew. 1,11) NaCl (spec. Gew. 1,12) und $CuSO_4$ (spec. Gew. 1,12). Selbst nachdem ein Strom von $^1/_2$ Amp. während einer halben Stunde die Zelle durchflossen hatte, war an dem Plättchen keine Spur von niedergeschlagenem Cu zu bemerken. Dabei musste aber der auf dem Glas aufliegende Rand des Metalls mit Sigellack bedeckt sein; war dies nicht der Fall, so schied sich hier Cu ab (die Seite der Scheidewand, auf welche das Metall aufgelegt worden, stand stets der Anode gegenüber), während auf der anderen Seite O frei wurde, welcher das dünne Au- und Al-Blättchen zerstören konnte.

---

5. *Unpolarisirbare electrolytische Zellen unter dem Einflusse der Centrifugalkraft; von Th. Des Coudres.*

Nachdem die Maxwell'schen Versuche eine eigentliche Trägheit der im Metalldrahte fliessenden Electricität aufzufinden, negativ ausgefallen waren, hat wohl zuerst O. Lodge [1]) das entsprechende Problem für die Leiter zweiter Klasse discutirt und auf die grosse Wahrscheinlichkeit eines „electrolytischen Momentes“ hingewiesen. Von ihm in dieser Richtung angestellten Experimente [2]) dagegen führten zu keinem Resultate. Sodann gelangten Colley [3]) und Herz [4]) zu dem Schlusse, dass der kinetischen Energie eines galvanischen Stromes in Electrolyten jedenfalls ein nicht unbeträchtlicher aus Aequivalentgewichten und Ueberführungszahlen vorausberechenbarer Werth zukommt.

Colley legte weiter dar, wie bei beschleunigter Bewegung eines Electrolyten die Trägheit des von ihm sogenannten „überschüssigen“ Ions [5]) zu electromotorischen Kräften Anlass geben muss. Er führte aus, in welchem Sinne diese Kräfte den von Maxwell [6]) mit Y_{me} bezeichneten Grössen entsprechen. [7]) Endlich hat Colley das Vorhandensein solcher Kräfte auch experimentell nachgewiesen: ein mit Cadmiumelectroden versehenes verticales Glasrohr voll Jodcadmiumlösung wurde etwa zwei Meter hoch herabfallen gelassen, während die Electroden mit einem empfindlichen Spiegelgalvanometer verbunden waren. Die dabei beobachteten Ausschläge betrugen allerdings höchstens einen Scalentheil. Diese Kleinheit der Wirkung und die

1) O. Lodge, Phil. Mag. (5) 2. p. 367. 1876.

2) O. Lodge, Mod. views of Electricity 2 ed. p. 328. 1892.

3) Colley, Beibl. 5. p. 457. 1881.

4) Herz, Wied. Ann. 14. p. 590. 1881.

5) Colley, Wied. Ann. 17. p. 56. 1882.

6) Maxwell, Lehrb. d. El. u. d. Magn. § 577. Deutsche Ausgabe. 2. Aufl. p. 268. 1883.

7) Ausser l. c. auch Beibl. 6. p. 889. 1882.

Schwierigkeiten der Versuchsanordnung mögen bisher von einer Wiederholung der (was z. B. den Freiheitsgrad der Ionen angeht) principiell wichtigen Experimente abgehalten haben. [1])

§ 1.

Um weit grössere und behufs leichterer Messbarkeit constante Werthe der Maxwell'schen Kräfte $Y_{m\,e}$ zu erhalten, empfiehlt es sich, der electrolytischen Zelle anstatt der ungleichförmigen geradlinigen Bewegung vielmehr eine gleichförmige Rotationsbewegung zu ertheilen. Befinden sich die beiden Electroden in den (ungleichen) Entfernungen r_1 und r_2 cm von der Drehungsaxe, so wird durch die lebendige Kraft der materiellen Electricitätsüberträger in der Lösung eine electromotorische Kraft $\mathfrak{A}$ geweckt werden von ebensoviel absoluten Einheiten, als die Grösse der in cm g sec gemessenen Arbeit beträgt, welche gegen die Centrifugalkraft geleistet wird, wenn die Electricitätsmenge Eins durch die Zelle passirt; das heisst:

$$(1) \quad \mathfrak{A} = q\{(1-n).\mathrm{Kat} - n.\mathrm{An}\}\int_{r_1}^{r_2} r\,v^2\,d\,r \;\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-2}$$

$$= 2\,q\,\pi^2(r_2^{\,2} - r_1^{\,1})\{(1-n).\mathrm{Kat} - n.\mathrm{An}\}\,m^2 . 10^{-8}\,\mathrm{Volt},$$

q ist hier die mit einer absoluten Electricitätseinheit (= 10 Coulomb) wandernde Wasserstoffmenge in Grammen; Kat und An bedeuten die auf H = 1 bezogenen Aequivalentgewichte von Kation und Anion; n die Ueberführungszahl des Anions, v die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung, m die Tourenzahl pro Secunde.

Für Jodkadmium ist Kat = 112, An 254 und bei einigermaassen concentrirter Lösung $n > 1$. Ein Glasrohr von 20 cm Länge mit Kadmiumelectroden an beiden Enden, radial auf der Scheibe einer Centrifugalmaschine befestigt, so dass die der Axe zugekehrte Electrode 10 cm von dieser absteht, muss also mit Jodkadmiumlösung beschickt bei nur fünf Umdrehungen in der Secunde eine electromotorische Kraft von über ein zehntel Millivolt liefern. Schaltet man eine grössere Anzahl solcher Centrifugalzellen hintereinander und wendet

1) Vgl. auch Wiedemann, Die Lehre von der Electricität **4.** p. 1165. 1885.

etwas erheblichere Rotationsgeschwindigkeiten an, so wird man daher Wirkungen erwarten können, wie sie schon ein gut astasirtes Vorlesungsgalvanometer anzuzeigen im Stande ist.

In dieser Richtung angestellte Versuche führten in der That zu recht befriedigenden Ergebnissen. Fig. 1 ist eine Querschnittskizze des benutzten Apparates. Die Gestalt der Glasröhren *A*, *B* mit den eingeschmolzenen Platindrähten *p* war dadurch bedingt, dass die Electroden aus reichhaltigem, aber noch vollständig flüssigem Cadmiumamalgam bestehen müssen. Nur dann liessen sich ihre jeweiligen Ungleichheiten durch einfaches Umschütteln immer rasch genug beseitigen, um den

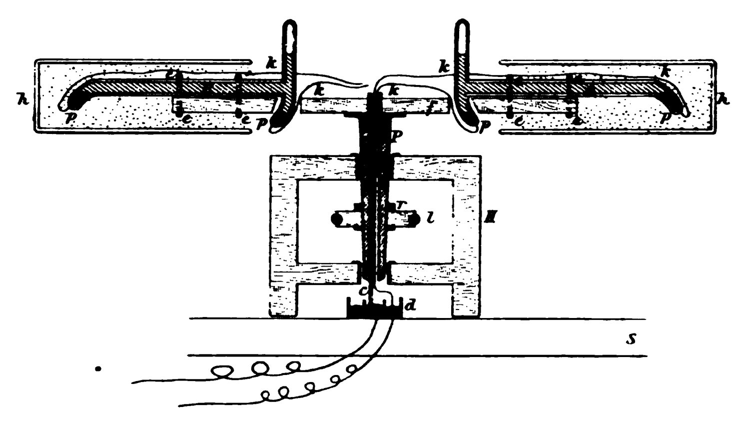


Fig. 1.

Effect Y_{me} jederzeit wenigstens qualitativ und der Grössenordnung nach vorführen zu können. Feste (amalgamirte) Electroden zeigten selbst nach tagelangem Kurzschluss mit jeder Erschütterung veränderliche „Polarisationen“ von solchem Betrage, dass durch sie die Grösse $\mathfrak{A}$ völlig verdeckt wurde. Die Elemente *A*, *B* waren mit weichen Kupferdrähten *e* leicht lösbar auf der dünnen Holzscheibe *f* befestigt. Die Verbindungsweise der beweglichen und der festen Theile des Stromkreises ist aus der Zeichnung ersichtlich. Die Poldrähte *k* liefen isolirt durch die centrale Bohrung der messingenen Rotationsaxe *P* und tauchten dann in zwei concentrische, mit dem Thomson'schen Zweinadelgalvanometer verbundene Quecksilbernäpfchen *c* und *d* ein. *h* sind Papphülsen. Sie mussten locker

mit Watte gefüllt über die Glasröhren *A*, *B* geschoben werden zum Schutze gegen äussere Temperatureinflüsse bei der Rotation. Ohne diese Vorsichtsmaassregel erwärmten sich die äusseren Electroden infolge der Reibung an der Luft, was besonders bei länger andauernder Rotation zu sehr störenden Thermoströmen Veranlassung gab. Die in eine Aussenwand des Institutsgebäudes eingemauerte Steinplatte *S* diente dem Holzrahmen *H* und den Näpfchen *c*, *d* als möglichst erschütterungsfreie Grundlage, während das Schwungrad, welches mittels der Transmissionsschnur *l* die Rolle *r* in Bewegung setzte, auf einem Tische mitten im Zimmer unmittelbar nebendem Beobachtungsfernrohre angeschraubt war.

Den Grad der Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung wird man auf Grund folgender für eine der geprüften Jodkadmiumzellen erhaltenen Mittelwerthe beurtheilen können:

$$r_1 = 9\,\text{cm}; \quad r_2 = 31\,\text{cm};$$

Concentration der Lösung:

1 Gewichtstheil Salz auf 3,6 Gewichtstheile Wasser;

bei den Umdrehungszahlen	5,8	3,87	2,9	pro Sec.
wurden die electromotorischen Kräfte	155	75,3	37,4	Mikrovolt

beobachtet. Die Galvanometerempfindlichkeit betrug meist 1 mm = 2,5 Mikrovolt und die Einzelbestimmungen wichen nur selten um mehr als 10 Proc. vom Mittelwerthe ab. Setzen wir für die betrachtete Jodkadmiumlösung $n = 1{,}15$ [1]), so hätten

die electromotorischen Kräfte	155	75,3	37,4	Mikrovolt
schon bei den Umdrehungszahlen	5,2	3,7	2,6	pro Sec.

erreicht werden müssen. Auch die sonst noch untersuchten Jodkadmiumzellen lieferten stets kleinere electromotorische Kräfte als der Formel (1) entsprechen würden. Möglicherweise rührt dies jedoch nur her von Fehlern bei Bestimmung der Tourenzahl. Das Schwungrad war nach dem Takte eines Metronomes mit der Hand gedreht und aus seiner Rotationsgeschwindigkeit die der Ionencentrifuge berechnet worden.

---

1) Hittorff, Pogg. Ann. **106**. p. 543. 1859.

Ein schwaches Gleiten des Schnurlaufes blieb aber trotz dessen möglichst straffer Spannung immerhin nicht ganz ausgeschlossen.

§ 2.

Die in einer excentrisch rotirenden Zelle von der Centrifugalkraft hervorgerufenen electromotorischen Kräfte scheinen ein bequemes Mittel zur Bestimmung von Ueberführungszahlen. Für quantitative Messungen bestimmte Apparate müssten natürlich stabiler und nach mehreren Richtungen hin zweckmässiger gebaut sein als der Apparat, mit welchem Verfasser arbeitete. Die strahlig angeordneten Zellen würden in eine grosse Dose mit doppelten Wandungen einzuschliessen sein, um den Einfluss der Luftreibung völlig zu beseitigen. Symmetrie und hinlänglich grosses Trägheitsmoment der rotirenden Theile hätten eine genügende Gleichförmigkeit der Bewegung zu gewährleisten. Die wohl immer missliche Bestimmung der jeweiligen Umdrehungsgeschwindigkeit kann umgangen werden. Man führt vier Drähte durch die Axe nach vier Quecksilbernäpfchen und bringt auf der Centrifuge zugleich mit dem zu untersuchenden noch ein Element von bekannter centrifugalelectromotorischer Kraft an. Beide Elemente lassen sich dann nach einer Compensationsmethode mit einander vergleichen unabhängig von der Tourenzahl. Zwei gleiche Jodkadmiumzellen (deren jede für sich recht bedeutende Galvanometerausschläge bei der Rotation gab) compensirten sich bei Gegeneinanderschaltung auf der im vorigen Paragraphen beschriebenen Centrifuge z. B. so vollständig, als es die zufälligen Störungen gestatteten.

Die praktische Durchführbarkeit von Ionenbeweglichkeitsbestimmungen mit der Centrifugalmaschine wird in jedem Falle davon abhängen, ob man Electroden findet, welche gegen den Electrolyten eine auf etliche Mikrovolt constante und von Erschütterungen genügend unabhängige Potentialdifferenz aufweisen. Mit salpetersauren Quecksilberoxydullösungen angestellte Versuche waren vollständig negativ ausgefallen. Jede Erschütterung einer solchen Zelle gab zu regellos wechselnden Galvanometerausschlägen Veranlassung. Metall und Electrolyt befanden sich offenbar nicht in chemischem Gleichgewichte.[1])

1) Auch zu exacten Messungen über die Abhängigkeit der „Lösungsspannung" einer flüssigen Electrode vom hydrostatischen Drucke (Wied.

Unsere Unsicherheit schon über die chemische Constitution derartiger Lösungen [1]) und die Unkenntniss ihrer Leitfähigkeitsverhältnisse liessen weiteres Herumprobiren als verfrüht erscheinen.

Flüssiges Kupferamalgam bedeckt sich in sauerstoffhaltiger Kupfersulfatlösung nach längerem Stehen mit einem leuchtend rothen krystallinischen Pulver (wohl Kupferoxydul). Auskochen des Electrolyten unter geringem Drucke und Einfüllen in die zuvor mit der Quecksilberluftpumpe evacuirte Zelle ermöglichten jedoch die Herstellung von Elementen: Cu-Amalgam — $CuSO_4$ — Cu-Amalgam, mit denen der Centrifugaleffect wenigstens der Grössenordnung nach zu bestimmen war. Es wurde die Differenz der Galvanometereinstellungen bei langsamer (2,9 Umdrehungen in der Secunde) und bei rascher (5,8 Umdrehungen in der Secunde) Rotation der Centrifuge verglichen mit der entsprechenden Differenz für eine Jodkadmiumzelle. Beim Uebergange von vollständiger Ruhe zur Bewegung und umgekehrt traten nämlich auch bei luftfreien Zellen Galvanometerschwankungen ein, welche jede Beobachtung unmöglich machten. Vielleicht spielen hierbei nicht nur eigentlich chemische Vorgänge (Unreinheit des Materiales, Occlusion von Gasen) eine Rolle, sondern auch die Veränderlichkeit der Grösse der Berührungefläche von Metall und Salzlösung infolge der Erschütterungen ist möglicherweise von Einfluss auf die jeweilige Potentialdifferenz zwischen beiden. [2]) Genügend feine Capillarmenisken als Electrodenoberflächen würden dann von Erschütterungen weniger störend beeinflusst werden müssen. Dass die Wirkungen beim Kupfervitriol (20 proc. Lösung) nur ein Fünftel etwa von denen beim Jodkadmium (25 proc. Lösung) betrugen, mag immerhin als eine qualitative Bestätigung der Theorie gelten.

Weit günstiger erwiesen sich die Verhältnisse endlich bei Jodkadmium. Hier sanken die durch Bewegungen der Amalgam-

---

Ann. **46.** p. 295. 1892) scheint die genannte Combination darum nicht sonderlich geeignet.

1) W. Reuss, Beiträge zur Kenntniss der salpetersauren Quecksilberoxydulsalze. Inauguraldiss. Freiburg 1886.

2) Vgl. Ostwald's Tabelle dieser Grössen: Ber. der mathem. phys. Klasse der sächs. Acad. d. Wissensch. 1893. p. 58. Man beachte die dortige Reihenfolge der Metalle.

oberflächen veranlassten electromotorischen Kräfte auch ohne sorgfältiges Auskochen weit unter die Grösse der centrifugal-electromotorischen Wirkungen. Eine hermetisch verschlossene Zelle brauchte nur einige Tage zu stehen und öfters umgeschüttelt zu werden. Es bildete sich dann ein reichlicher Absatz von unlöslichem Cadmiumhydroxyd und nach Aufzehrung des Sauerstoffes verhielt sich die Zelle wie eine ausgekochte.

§ 3.

Ausser der bisher betrachteten so zu sagen directen electromotorischen Wirksamkeit der Centrifugalkraft auf eine (für genügend kleine Stromdichten unpolarisirbare) galvanische Zersetzungszelle muss diese Kraft aber auch noch in anderer (gewissermaassen indirecter) Weise das Potentialgefälle im Electrolyten beeinflussen.

Zur anschaulichen Begründung dieses Satzes wenden wir

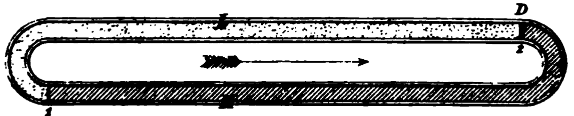


Fig. 2.

auf das Schema Fig. 2 die bekannte Betrachtungsweise an, deren sich zuerst Lord Kelvin bedient hat bei Ableitung des Zusammenhanges zwischen Dampfdruck und Oberflächenspannung. Das in sich zurücklaufende Glasrohr *L M* enthält im Schenkel *M* ein flüssiges Metall (etwa Quecksilber), der andere Schenkel ist mit einer Salzlösung desselben Metalles angefüllt. Das Diaphragma *D* an der Grenze 2 sei undurchdringlich für das Metall, durchlässig für die Lösung. Der Schliessungskreis kreis möge um eine ausserhalb gelegene Axe rotiren, so dass die Centrifugalkraft in Richtung des Pfeiles wirkt. Die Abstände der beiden Metalloberflächen 1 und 2 bezeichnen wir wieder mit r_1 und r_2, mit m die Umdrehungszahl des Schemas pro Sec.

Kurz nach Beginn der Rotation d. h. so lange Diffusionsvorgänge von erheblicher Grösse noch nicht abgelaufen sein können, kommt zu der im electrolytischen Theile des Stromkreises wirksamen electromotorischen Kraft

$$\mathfrak{A} = 2\, q\, \pi^2 (r_2^2 - r_1^2) \{ (1 - n) . \mathrm{Kat} - n . \mathrm{An} \} m^2 . 10^{-8} \text{ Volt}$$

nur noch die electromotorische Kraft hinzu, welche vom verschiedenen hydrostatischen Drucke herrührt, unter dem das flüssige Metall an den Electroden 1 und 2 steht. Sie beträgt[1])

(2) $$-\mathfrak{S} = -2\,q\,\pi^2(r_2^2 - r_1^2)\,\text{Kat}\,.\,m^2\,.\,10^{-8}\ \text{Volt},$$

wenn wir das positive Vorzeichen einer electromotorischen Kraft geben, sofern sie die positive Electricität in der Richtung $1\,L\,2\;M\,1$ zu treiben strebt. Die Grössen $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{S}$ ergänzen sich im Allgemeinen nicht zu Null, ja sie werden sogar meist beide dasselbe Vorzeichen haben. Bei Abwesenheit äusserer electromagnetischer Kräfte ist uns aber von directen Umwandlungen der Bewegungenergie eines rotirenden Körpers in electrische Arbeit nichts bekannt. Nach genügend lang andauernder Rotation muss daher unser Schliessungskreis stromlos werden: zu den electromotorischen Kräften $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{S}$ muss noch eine dritte Kraft

(3a) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$$
$$= 2\,q\,\pi^2(r_2^2 - r_1^2)\,.\,n(\text{Kat} + \text{An})\,m^2\,.\,10^{-8}\ \text{Volt}$$

hinzukommen. Sie rührt offenbar her von den Concentrationsverschiedenheiten, die unter dem Einflusse der Centrifugalkraft an den Electroden entstehen werden.

Hat man die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft $\mathfrak{C}$ eines Concentrationselementes von den Concentrationen c_1 und c_2 an den Electroden für ein Salz empirisch ermittelt, so kann demnach die Formel

(3b) $$\mathfrak{C} = f(c_1, c_2) = 2\,q\,\pi^2(r_2^2 - r_1^2)\,n\,(\text{Kat} + \text{An})\,m^2\,.\,10^{-8}\,\text{Volt}$$

dazu dienen, um c_1 und c_2 zu berechnen. Es erscheint auf diese Weise möglich Theorien über den Einfluss äusserer Kräfte auf die Concentrationsvertheilung in Lösungen[2]) an der Erfahrung zu prüfen. Unser Endresultat aber ist dieses:

---

1) Des Coudres, Wied. Ann. **46.** p. 292, 1892.

2) Die z. B. von Gibbs 1876 (Ostwald, deutsche Ausg. der thermodyn. Studien (p. 171, 1892) von Gouy u. Chaperon (C. R. **105** p. 117, 1887) und von Duhem (J. de phys. (2) 8. p. 391. 1888) über den Einfluss der Schwere auf die Concentration von Lösungen angestellten Betrachtungen gestatten ja eine directe Uebertragung auf den Fall der Centrifugalkraft. Umgekehrt ist der Inhalt vorliegenden Paragraphes zugleich die weitere Ausführung einer jüngst (Wied. Ann. **46.** p. 296. 1892) über die electromotorische

Die electromotorische Kraft eines Centrifugalelementes von der Construction Fig. 1 betrug beim Beginne der Bewegung (Anfangswirkung)

$$\mathfrak{A} = 2\, q\, \pi^2 (r_2^2 - r_1^2) \{(1 - n) \mathrm{Kat} - n \mathrm{An}\} m^2 . 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Sie muss sich jedoch auch bei ungeschlossenem Stromkreise wo „Polarisationen" nicht in Frage kommen mit der Zeit (wenn auch nur langsam) ändern und asymptotisch dem Werthe

$$(4) \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{C} = \mathfrak{S} = 2\, q\, \pi^2 (r_2^2 - r_1^2) \mathrm{Kat}\, m^2 . 10^{-8} \text{ Volt}$$

zustreben (Schlusswirkung). Hält man die Maschine nach Erreichung dieses Zustandes an, so wird das Galvanometer die vom Concentrationsgefälle im Electrolyten herrührende electromotorische Kraft

$$\mathfrak{C} = 2\, q\, \pi^2 (r_2^2 - r_1^2) . n (\mathrm{Kat} + \mathrm{An}) m^2 . 10^{-8} \text{ Volt}$$

anzeigen (Concentrationswirkung).

Bei Salzen wie z. B. Jodcadmium, wo Kat $< n$ (Kat + An) ist, haben demnach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$ entgegengesetztes Vorzeichen. Die nach hinreichend lange bestehender Rotation von der Centrifugalkraft dauernd aufrecht erhaltene Potentialdifferenz ist von umgekehrter Richtung als die, welche anfangs von ihr geweckt wird.

§ 4.

Es liegt nahe, auf Gleichung 3b die Nernst'sche Theorie der Concentrationsketten[1]) anzuwenden und zu schreiben

$$(5) \qquad \mathfrak{C} = f(c_1, c_2) = 0{,}86\, T . 2\, n\, ln \frac{p_2}{p_1} . 10^{-4} \text{ Volt}$$

$$= R\, T q\, 2\, n\, ln \frac{c_2}{c_1} . 10^{-8} \text{ Volt}$$

wo p_1 p_2 die „osmotischen Drucke" der Salzlösung an den Electroden, $R . T$ den Druck eines „idealen" Gases bei T^0 absoluter Temperatur und einem Grammolecül im Kubikcentimeter bezeichnen. Für so verdünnte Lösungen, wie sie bei den Nernst'schen

Wirksamkeit der Schwerkraft in Electrolyten gemachten Bemerkung. Schlechtweg zu berichtigen ist in genanntem Hinweise das über Colleys Versuche gesagte. Auch bei seinen Versuchen über die Arbeitsleistung bewegter Jonen gegen die Gravitation hat nämlich Colley — um in der Sprache obiger Formeln zu reden — Anfangseffecte ($\mathfrak{A}$) und nicht Schlusseffecte ($\mathfrak{S}$) beobachtet.

1) W. Nernst, Ostw. Zeitschr. 4. p. 154, 1889.

Formeln vorausgesetzt sind [1]) läuft die Berechnung des von der Centrifugalkraft angestrebten Concentrationsverhältnisses c_2 / c_1 nämlich mit sehr grosser Annäherung darauf hinaus, die Aenderung des Druckes P in einem Gase vom Moleculargewichte $M =$ Kat + An und der constanten Temperatur T zu bestimmen, wenn auf die Masseneinheit die Kraft $4\pi^2 m^2 r$ in der Richtung r wirkt:

$$(6) \qquad d P = 4\pi^2 m^2 r . \frac{P M}{R T} . d r$$

$$\log \operatorname{nat} \frac{P_2}{P_1} = 2\pi^2 (r_2^2 - r_1^2) m^2 \frac{M}{R T} .$$

Nur muss für R vielmehr $2R$ gesetzt werden, da die Erfahrung lehrt, dass in ideal verdünnten Lösungen binärer Electrolyte der osmotische Druck doppelt so gross ist, als der Druck eines Gases von gleich viel Molecülen in der Raumeinheit. Machen wir also in Gleichung 4) die Substitution

$$(7) \qquad \log \frac{c_2}{c_1} = 2\pi^2 (r_2^2 - r_1^2) \frac{\text{Kat} + \text{An}}{2 R T} m^2 . 10^{-8} \text{ Volt}$$

so wird in Uebereinstimmung mit Gleichung 3)

$$\mathfrak{E} = 2 q \pi^2 (r_2^2 - r_1^2) n (\text{Kat} + \text{An}) m^2 \, 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Es sei gestattet, einige rein formale Bemerkungen anhangsweise folgen zu lassen. Die Beziehung 1) kann offenbar auch ausgesprochen werden: So lange bei einem rotirenden Electrolyten die Concentration noch durch die ganze Masse die gleiche ist, so lange besteht zwischen den Polgegenden und der äquatorialen Zone eine Potentialdifferenz

$$(8a) \qquad E_a = 2 q \pi^2 (r_2^2 - r_1^2) \{(1 - n) \text{Kat} - n \text{An}\} m^2 \, 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Eine ähnliche Fassung der Gleichung 4) ist wenigstens für sehr verdünnte Lösungen mit Hülfe der Nernst'schen Concentrationskettentheorie möglich. Der Hauptvorzug dieser Theorie gegenüber der viel allgemeingültigeren v. Helmholtz'ens besteht ja gerade darin, dass sie die electromotorische Kraft eines Concentrationselementes in ihre Componenten zu zerlegen gestattet. Die Differenz der beiden an den Electroden wirksamen Kräfte [2]) hat die Grösse

1) Nernst, l. c. p. 132.
2) Nernst, l. c. p. 161.

$$0{,}860\, T \ln \frac{p_2}{p_1} . 10^{-4} \text{ Volt}$$

$$= R T q \ \ln \frac{c_2}{c_1} . 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Wird dieser Betrag unter Berücksichtigung der Relation 7 vom Werthe $\mathfrak{E}$ (Gleichung (4)) abgezogen, so erhalten wir die in einem genügend lange Zeit rotirenden „idealen" Electrolyten zwischen Polen und Aequator bestehende Potentialdifferenz

(8b) $$E_s = q \pi^2 (r_2^2 - r_1^2)(\text{Kat} - \text{An}) m^2 . 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Die Formeln 8 lassen sich jedenfalls auch direct aus den Grundannahmen der Nernst'schen Hypothese von der electromotorischen Wirksamkeit der Jonen ableiten. Nernst selbst hat wiederholt[1]) ausgesprochen, es sei ein Leichtes, auf seinen Fundamentalprincipien fussend die in einem rotirenden Electrolyten auftretenden electrostatischen Ladungen zu berechnen.

Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, dass das Verhalten electrolytischer Zellen unter dem Einflusse von Centrifugalkräften einige der von H. v. Helmholtz[2]) aufgefundenen wichtigen Beziehungen zwischen der lebendigen Kraft cyklischer Systeme und der absoluten Temperatur zum mindesten bildlich zu veranschaulichen geeignet ist. Auch bei einem electrolytischen Thermoelemente

	warm		kalt	
Metall		Metallsalzlösung		Metall

sind z. B. eine Anfangswirkung und eine Endwirkung zu unterscheiden. Experimentell hat man Fälle letzterer Art, wo im gesammten Electrolyten d. h. in seinen kalten und in seinen warmen Theilen derselbe osmotische Druck herrscht, allerdings noch nicht untersucht und das Experiment würde hier wohl theoretischen Erwägungen voran zu gehen haben.

1) Nernst, Zeitschr. f. physikal. Chem. **2.** p. 637, 1888 und **4.** p. 130, 1889 Sitzber. Berlin. Akad. 1889 p. 84.

2) H. v. Helmholtz, Journal für r. u. a. Mathematik **97.** p. 111, 317. 1884.

6. *Ueber electrische Entladungen;*
von K. Wesendonck.

Hrn. A. Heydweillers verdienstliche Arbeiten über electrische Entladungen veranlassen Verfasser dieses zu einigen Bemerkungen und Mittheilungen, die er sich in dem Folgenden darzulegen erlaubt.

In Bezug auf die vielumstrittenen polaren Unterschiede, gelangt Hr. Heydweiller[1]) zu Resultaten, welche sich mit denen, die Verfasser gefunden, vielfach decken, deren aber nur theilweise Erwähnung gethan wird. So ist in der Abhandlung Wied. Ann. 30. p. 1—51. 1887 nicht nur für reine Funken dargethan worden, dass polare Differenzen dabei ausbleiben, sondern dasselbe wurde auch *für andere Entladungsarten beim Ausströmen in die freie Atmosphäre an einer kleinen Kugel nachgewiesen* (p. 34. Anm. l. c.). Vorher (p. 32 u. 33) ist ferner angeführt, wie bei gegebenem Electricitätszufluss die positiven Potentiale bald grösser, bald gleich, bald sogar kleiner als die entsprechenden negativen sind; p. 39 heisst es dann, dass die höheren positiven Angaben des Electrometers nur so lange auftreten, als die Platte sich in einer gewissen Nähe der Spitze befindet, und erscheine *diese Differenz lediglich als eine Folge der Influenz.* Weiter folgt p. 46 der Hinweis, auch Isolatoren könnten ähnliche Wirkungen ausüben, und p. 41 wird bemerkt, bei Entladung in die freie Luft, brauche das positive Potential nicht mehr höher zu sein als das negative und je nach Umständen seien recht verschiedene Verhältnisse der Potentiale möglich. Nur bei feinen Spitzen zeigte sich unverkennbar, dass sie eine Verstärkungsflasche auch gegen die Zimmerdecke hin schneller und vollständiger entluden, wenn jene negativ geladen war, obwohl in dem Entladungsfelde keinerlei influirende Gegenstände sich befanden (p. 34, 35 u. 36) und es wird p. 36—37 geschlossen, Influenz könne sich überhaupt bei der

1) Heydweiller, Wied. Ann. **48**. p. 116—118 u. p. 224—227. 1893.

vorhandenen Versuchsanordnung[1]) nicht bemerklich gemacht haben. Nach Hrn. Heydweiller's Versuchen ist Influenz bei einer frei in der Luft befindlichen Kugel um so wirksamer, je grösser der Kugelradius, während bei Funkenstrecken zwischen zwei Electroden anscheinend die kleinere Polkugel empfindlicher für Influenz ist. Sind Spitzen etwa besonders sensitiv, so könnten allerdings eventuell die Dimensionen des Experimentirraumes für entscheidende Versuche zu klein gewesen sein. Die p. 32 erwähnten Beobachtungen einer Flasche mit angeklebter Nähnadel zeigten jedoch nur geringen polaren Unterschied.

Die Wirkung genäherter Körper auf die Entladung zeigt nach einigen Beobachtungen des Verfassers je nach Umständen gewisse Verschiedenheiten, über welche man, da sie, obwohl sicher schon bekannt, bis jetzt nur wenig Beachtung gefunden zu haben scheinen, einige Angaben gestatten möge.

Verbindet man die eine (nach Abnahme der aufgesteckten Kugel) zugespitzte Electrode einer Voss'schen Influenzmaschine mit der Gasleitung, während die andere mit Kugel (resp. einer Scheibe) versehene Electrode isolirt bleibt und macht die Entladungsstrecke so gross, dass keine Funken mehr übergehen, sondern nur Leuchten[2]) an der Spitze sich noch zeigt, so erscheinen (bei nicht zu grosser Schlagweite) bekanntlich manchmal noch Funken, wenn man seitlich der Spitze eine abgeleitete kleine Metallplatte nähert. Ein mit dem geladenen Pole verbundenes Electrometer, zeigt dabei eine sehr merkliche Erhöhung des Potentiales an. Wird im Dunkeln beobachtet, so zeigt sich, dass durch die Influenz der Platte Bildung von Leuchten erschwert wird und erst bei stärkerer Ladung der isolirten Electrode erscheinen kann. Die genäherte abgeleitete Platte verändert, wie man leicht sieht, die Gestalt der Niveauflächen an der Spitze und vermindert dort den Potentialabfall. Es wurde eine grössere Messingplatte *AA* (25 cm Durchmesser) in der Mitte mit einer Kreisöffnung und eingelötheter auf-

---

1) Eine Wiederholung der betreffenden Beobachtungen mit feiner Spitze, die nicht unmittelbar auf der Flasche angebracht ist, sondern mittels eines langen dünnen Stieles, dürfte von Interesse sein.

2) Büschel-, Glimm- und ähnliche mit Lichtentwickelung verbundene Entladungen sollen fortan einfach Leuchten heissen.

geschlitzter Messingröhre *a a* angefertigt, die sich mit leichter Reibung auf den Polstab der Maschine schieben lässt (Fig. 1) und daher dasselbe Potential besitzt, wie die sie tragende Electrode. Je weiter nun diese Platte zurückgeschoben ist, je mehr also die Spitze über sie hervorragt, um so kleiner braucht cet. par. die Ladung des gegenüberstehenden isolirten Poles zu sein, damit an der Spitze sich Leuchten zeigt. Bei gleichmässigem Drehen der Maschine und sonst constanten Verhältnissen nimmt dann die Ablesung am Electrometer um so mehr zu, je weiter man die Platte vorschiebt und so den Abstand der Spitze von der Ebene dieser verringert, wobei es dann zu Funken kommen kann, während sonst viel zu viel Electricität durch Spitzenausströmung neutralisirt wird, um an dem isolirten Pole das Funkenpotential erreichen zu können. Im Dunkeln ist das Zunehmen resp. Abnehmen der Spannung leicht mittelst eines Funkenmikrometers zu constatiren, dessen eine Kugel mit dem isolirten Pol der Maschine verbunden ist, während von der anderen ein Draht zur Gasleitung führt. Damit hörte z. B. das negative Licht an der abgeleiteten Spitze erst bei einem Abstande der Mikrometerkugeln (von 2 cm Durchmesser) von 19,22 mm auf, wenn die Platte weit vorgeschoben war, während es an der Spitze noch leuchtend zuckte bei einer Distanz von 6,62 mm der Mikrometerpole, falls die Platte möglichst viel zurückbewegt worden. Klebt man an die zugespitzte Electrode eine Nähnadel, so tritt ein ganz entsprechendes Verhalten ein mut. mutand. Ist die abgeleitete Spitze negativ, so sind ohne aufgeschobene Platte nur verhältnissmässig kurze Funken wie bekannt zu erhalten, ragt aber die Spitze nur noch wenig über die Plattenebene hervor, so bekommt man relativ sehr lange solche. Diese Funken springen aber, selbst wenn die Spitze noch ziemlich viel vorsteht, durchaus nicht mehr ausschliesslich zu derselben hin, sondern vielmehr mannigfach sich krümmend zu mehr oder minder benachbarten Punkten der Platte. Ist dagegen die abgeleitete Spitze positiv, so werden die Funken

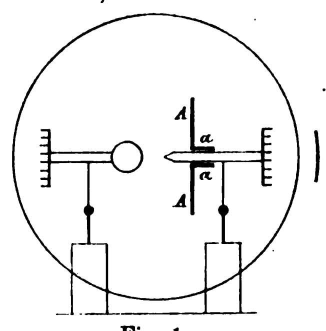


Fig. 1.

bekanntlich unter gewöhnlichen Umständen relativ lang. Schiebt man bei gleichmässigem Drehen der Maschine die Platte weiter gegen die Spitze vor, so werden die Funken seltener und hören zuletzt ganz auf, ausser wenn die Schlagweite so gering ist, dass die Funken von der Kugel zur Platte übergehen können. An der negativ geladenen Electrode zeigt sich beim Ausbleiben der Funken ein starker Lichtpinsel. Ist die Entfernung eine solche, dass sowohl bei passend vorgeschobener Scheibe, wie bei möglichst weit zurückgestellter, Funken auftreten, so ist im ersteren Falle die Spannung am isolirten Pole höher. Um dies zu constatiren, erwies es sich als zweckmässig, die Scheibe der Maschine direct mit der Hand, allmählich die Rotation beschleunigend, zu drehen, um so ein gleichmässiges Ansteigen des Electrometerzeigers zu erhalten. Die Funken schlagen in diesem Falle stets zur Spitze über, ausser wenn diese fast ganz in die Plattenebene zu liegen kommt. Bringt man an der negativ isolirten Electrode, eine Scheibe statt der Kugel an, so kann man sehr lange Funken von der Spitze aus erhalten, der negative Büschel fehlt an der Kathode.

Isolirt man die negative Spitze (unter Ableitung des positiven Poles), so erhöht sich beim Vorschieben der Platte ebenfalls das Potential und lange Funken derselben Art, wie die oben erwähnten, wenn die negative Spitze mit der Gasleitung verbunden, zeigen sich. Ist die positive Spitze isolirt, so gibt sie lange Funken beim Vorschieben der Platte, während der sonst starke Büschel an jener geschwächt wird.

Bei diesen Erscheinungen ist zu bedenken, dass, wie das Leuchten, so auch die Funkenbildung erschwert wird, je weniger die Spitze über die Platte hervorragt, und dass die Schwächung der Büschel auch deren Funkenbegünstigenden Einfluss vermindert. Diese und ähnliche Umstände bewirken zusammen mit der bereits erwähnten Vergrösserung der Ladung am isolirten Pole in Folge geringerer Spitzenwirkung den schliesslichen Erfolg, je nach dem Ueberwiegen der einen oder der anderen, so dass die Erscheinungen manchmal den Eindruck des widerspruchsvollen machen.

Den beschriebenen Erscheinungen reiht sich die Beobachtung an, dass kein Leuchten bemerkt wird vor dem Eintreten der Explosion, wenn man eine rauhe Electrode (etwa den be-

russten Knopf eimer Verstärkungsflasche, oder indem eine rauhe Kohlenplatte eines Bunsenelementes abgeleitet als die eine Electrode dient) langsam bis zum Funkenpotential ladet. Nur wenn schneller hintereinander mehrere solche Entladungen erfolgen, beobachtet man bald einen Lichtschein an dem rauhen Pol in den angegebenen Fällen vor dem Funken, vermuthlich von losgerissenen in der Luft schwebenden Partikeln herrührend.

Die besprochenen Beobachtungen scheinen Verfasser von einigem Interesse zu sein in Betreff der Ansichten über die Wirksamkeit der Blitzableiter. Je weniger dieser über die Erdoberfläche und ihn umgebende abgeleitete Leiter hervorragt, umso geringer wird seine Spitzenwirkung sein, die nach Mancher Ansicht durch Neutralisirung der Wolkenelectricität von hervorragender Bedeutung sein soll. Eine vollständige Entladung dieser kann aber überhaupt nicht erzielt werden, da ja stets ein gewisses Potential schon vorhanden sein muss, um Spitzenausströmung einzuleiten. Ist im oben besprochenen Falle die Schlagweite am Mikrometer unter 6,62 mm, so hört sehr bald jedes Leuchten auf und damit bekanntlich auch die merkliche Wirkung der Spitze. Kommt es zum Funken (Blitz) so ist aber auch eine Verlängerung desselben durch den Blitzableiter bei nicht zu grosser Länge der Auffangstange nicht zu fürchten, die Spitze besitzt ja alsdann nur noch wenig Vorzug vor ihrer Umgebung, tritt vielmehr erst dann in Wirksamkeit, wenn die Wolke bereits eine für die benachbarten Gegenstände bedrohliche Ladung besitzt. Das System (Melsens) mit vielen niedrigen Auffangstangen dürfte auch nach diesen Betrachtungen den Vorzug verdienen. Da die Gewitterelectricität wenigstens häufig sehr schnell zu hohen Potentialen anwächst, so wären vielleicht noch ergänzende Versuche hier von Interesse, bei denen eine grössere Leydener Batterie erst geladen und dann plötzlich mit den Electroden in Verbindung gebracht wird. Erwähnt sei hier noch, dass mit einer grossen Batterie von neun Flaschen (je ca. 0,22 qm äussere Belegung) auf diese Weise immer noch ein entschiedener *polarer Unterschied* für Funken zwischen Spitze und abgeleiteter Platte erhalten wurde, indem jene viel länger bei positiver Spitze cet. par. ausfielen.

Bei Isolatoren fand sich ein etwas anderes Verhalten. Nähert man eine Glasröhre der positiven der beiden jetzt mit Kugeln versehenen Electroden der Influenzmaschine, dieselbe mag direct oder bei Ableitung nur durch Influenz geladen sein, so sieht man bei geeigneter Schlagweite und gewissen Stellungen des Isolators Funken auftreten, welche bedeutend länger als unter gewöhnlichen Umständen sind, und zwar *ohne Spannungserhöhung an dem jeweiligen isolirten Pole.*

Die Annäherung des Nichtleiters ruft meist schöne Büschel an der Anode hervor, die sich dann wohl zum Theil in Funken umwandeln, doch zeigen sich letztere auch ohne sichtbares vorhergehendes Auftreten von Büscheln. Ganz ähnlich wirkt ein isolirter kleiner Leiter (Schraube mit Kopf nach aussen auf Gasröhre gesetzt); es tritt *Funkenverlängerung ohne Ansteigen des Electrometers ein.* Dagegen gibt Glasröhre oder isolirter Leiter an eine Spitze gehalten geringe Funkenverlängerung unter kleiner aber deutlicher Erhöhung des Potentiales. Die beiden genannten Dinge sind *zwischen die Pole gehalten* nur wirksam bei *kleinen Electrodenabständen, nicht mehr aber bei grösserer Entladungsstrecke.* In einen länglichen Paraffinklotz wurde eine Reihe dünner Glasröhren eingeschmolzen, in deren oberen Enden Stecknadeln, die Köpfe, nach aussen eingesteckt werden konnten. Bei gutem Gange einer Influenzmaschine erreichte man so eine bedeutende Funkenverlängerung, aber diese blieb anscheinend dieselbe, wenn der Paraffinklotz so gedreht wurde, dass die Reihe der Glasröhrchen senkrecht zu der Verbindungslinie der Pole stand. Es wirkte also wesentlich nur der eine der Anode angenäherte Theil der ganzen Reihe. Dieser letzte Versuch wurde angestellt zum Vergleiche mit früheren Ergebnissen, wonach in die Entladungsstrecke gespritzes Wasser keine merkliche Vergrösserung der Funken erzielte.

H. Heydweiller hat sich in sehr anerkennenswerther Weise bemüht, in das bisher noch etwas chaotische Gebiet der Funkenentladungen zwischen Kugelelectroden Ordnung zu bringen. Eine von Hrn. Jaumann angenommene Erklärung der Differenzen verschiedener Beobachter weist er zurück [1]) in Ueber-

1) H. Heydweiller, Wied. Ann. **48.** p. 219, 1893.

einstimmung mit Borgesius [1]); auch Verfasser [2]) hat seinerzeit bei Glimmentladungen gefunden, dass sich der von Hrn. Jaumann hervorgehobene Einfluss der Potentialschwankungen keineswegs so geltend macht, wie man vielleicht anzunehmen geneigt war. Dagegen sieht Hr. Heydweiller in der Berücksichtigung von Verschiedenheiten des Luftdruckes, der Temperatur und eventueller Influenzwirkungen bei den einzelnen Experimentatoren einen zureichenden Grund für die mangelhafte Uebereinstimmung mancher Messungen, und findet bei Beachtung dieser Umstände seine eigenen Bestimmungen unter sich und mit denen des Hrn. Paschen in guter Uebereinstimmung [3]). Er berechnet das Maximalgefälle g_i und g_e an der isolirten und der abgeleiteten Electrode und findet, dass das sog. mittlere Gefälle $\frac{1}{2}(g_i + g_e)$ sich verhalte wie das Gefälle im homogenen electrischen Felde zwischen zwei ebenen Platten; es ist bei nicht zu kleiner Schlagweite von dieser nahezu unabhängig. Das Gesetz gilt aber nur für den Beginn der ersten Entladung, mag sie als Funken oder in einer sonstigen Form statthaben. Hiernach ist man nun im stande, mittelst der gegebenen Tabellen [4]) für bestimmte Kugeldurchmesser und Schlagweiten die Entladungspotentiale zu berechnen in guter Annäherung an die Beobachtungen, was sicher als ein sehr beachtenswerther Fortschritt erscheint. Zur Bestimmung des betreffenden mittleren Gefälles für verschiedene Kugelradien ist eine Formel Wied. Ann. **40.** p. 477 leider nur angedeutet; diese Grösse bestimmt nach Hrn. Heydweiller in Uebereinstimmung mit der Erfahrung auch die Maximalladung einer frei in der Luft befindlichen Kugel. Für kleine Schlagweiten (unter 0,1 cm) wird die Hypothese, welche den Gashüllen der Electroden eine wesentliche Bedeutung für die betreffenden Erscheinungen beilegt, geprüft, wobei Hr. Heydweiller unter der Annahme, dass das Entladungsgefälle der Dichte des Gases proportional sei, findet, die Beobachtungen liessen sich in der That auf diese Weise erklären, falls man

---

1) Borgesius, Beibl., **17.** p. 61. Das Original ist Verf. unbekannt.
2) Wesendonck, Wied. Ann. **39.** p. 608. 1890.
3) Heydweiller, Wied. Ann. **48.** p. 221. 1893.
4) Heydweiller, Wied. Ann. **40.** p. 474. 1890 u. **48.** p. 230, 1893.

für die adsorbirten Schichten eine weit grössere Dicke zugesteht, als bisher angenommen. Aus Baille's Versuchen an fast ebenen Electroden ergibt sich für die von den in der ersten Reihe angegebenen Abständen begrenzten Schichten die in der unteren Reihe stehenden mittleren Dichten in Atmosphären:

0—0,000 75 cm	0,000 75—0,001 25 cm	0,001 25—0,002 50 cm	0,002 50—0,005 cm	0,005—0,01 cm
9,2 Atm.	4,4 Atm.	2,8 Atm.	1,3 Atm.	1,3 Atm.

Diese Schichten kann man sich dann für grössere Funkenstrecken ersetzt denken durch eine Schicht von 0,05 cm Dicke und einer mittleren Dichte von 1,42 Atm. an jeder Electrode, so dass also eine Strecke von 0,1 cm mit Gas von höherer Dichte als sonst erfüllt ist. Dann erhält man in der That ein nahezu constantes Gefälle mit g_{red} bezeichnet, wie die Tab. 1 der betr. Abhandlung [1]) zeigt. Aus Chrystal's Formel für die Entladungspotentiale V in Baille's Versuchen $V = 4,997 + 99,595\, l$ (wo l die Schlagweite) ergibt sich ähnlich (ohne Rücksicht auf die schwache Krümmung) für die anzunehmende mittlere Dichte $1 + \alpha$ einer 0,1 cm dicken Schicht

$$0,1 \,.\, 99,595\,(1 + \alpha) = 4,997 + 99,595 \,.\, 1,0$$

oder $1 + \alpha = 1,502$. Freybergs Formel [2]) für ebene Platten: $V = 7,67 + 90,98\, l$ lässt $1 + \alpha = 1,84$ werden. Indessen sind wohl so mächtige adsorbirte Hüllen, wie auch Hr. Borgesius bemerkt, nicht unbedenklich, nicht nur weil sie den bisherigen Erfahrungen widersprechen, sondern auch weil ihre Existenz sich direct optisch müsste nachweisen lassen. Ohne solchen directen Befund kann man aber derartige Oberflächenschichten nicht als thatsächlich vorhanden voraussetzen. Der Zustand der adsorbirten Gase ist zur Zeit nur ungenügend bekannt; es frägt sich dann auch sehr, ob das Gesetz der Proportionalität von Dichte und Potentialgefälle aufrecht zu erhalten ist. Bei Kohlensäure wird wohl ziemlich allgemein bei gewöhnlicher Temperatur Verflüssigung in Folge der Adsorption angenom-

1) Heydweiller, Wied. Ann. **40.** p. 468. 1890.
2) Freyberg, Wied. Ann. **38.** p. 253, 1890.

men; es schien Verfasser daher interessant zuzusehen, ob Hrn. **Paschen's** Versuche an diesem Gase sich würden ähnlich mit Erfolg berechnen lassen. Nun sind aber die Messungen unter einer Luftpumpenglocke angestellt, innerhalb welcher noch eine abgeleitete Drahtnetzhülle sich befand, und diese Umstände ändern den Werth der Entladungspotentiale. Nach Hrn. **Heydweiller**[1]) kann man aber für Kugelelectroden ein leidlich constantes g_{red} berechnen, wenn man die mittlere Dichte der adsorbirten 0,05 cm dicken Schichten annimmt, wie sie l. c. p. 477 angegeben. Bei den Versuchen unter der Glocke erhält man aber kein einigermaassen constantes g_{red} mehr, wenn man den der freien Atmosphäre entsprechenden Werth der mittleren Dichte 1,20 einsetzt, sondern man muss diese gleich 1,70 nehmen und erhält dann für 75 cm Druck bei Luft aus den allerdings nicht zahlreichen Bestimmungen das mittlere Gefälle g und die Grösse g_{red} für die Schlagweiten l wie folgt:

l =	0,1 cm	0,2 cm	0,3 cm	0,4 cm	0,5 cm	0,6 cm
g =	173,6 „	151,13 „	148,5 „	137,84 „	137,18 „	133,59 „
g_{red} =	128 „	128,1 „	132,2 „	126,5 „	128 „	127,5 „

Bei Kohlensäure erhält man (unter Vernachlässigung der Dielectricitätsconstante) mit der Dichte 1,60 und sonst gleichen Bedingungen:

l =	0,1 cm	0,2 cm	0,3 cm	0,4 cm	0,5 cm	0,6 cm
g =	182,9 „	149,35 „	142,77 „	128,19 „	124,83 „	125,58 „
g_{red} =	114 „	114,6 „	119 „	111,3 „	111,4 „	114,2 „

also g_{red} leidlich constant; und doch ist die angenommene Beziehung zwischen Dichte der Oberflächenschicht und Potentialgefälle wohl sicher nicht mehr stichhaltig. Auch der Umstand, dass das abgeleitete Drahtnetz und die Pumpenglocke ebenso wirkten, wie eine stärkere Compression des adsorbirten Gases bei Luft, zeigt, wie auch andere Einflüsse ebenso wirken können, wie Gashüllen nach Hrn. **Heydweiller**. Verfasser hat früher schon auf die Rolle hingewiesen, welche begleitende Entladungen anderer Art bei der Funkenbildung anscheinend spielen, und betont, dass nur bei reinen Funken[2]) der polare Unterschied verschwindet auch auf die Bedeutung jener Er-

1) **Heydweiller**, Wied. Ann. **40.** p. 475 u. 476. 1890.

2) K. **Wesendonck**, Wied. Ann. **30.** p. 43. 1887; vgl. neuerdings **Lehmann**, Wied. Ann. **47.** p. 484. 1892.

scheinungen bei den sogenannten Ventilwirkungen hingewiesen. [1]) Nun sind aber kleine Abstände der Electroden dem Entstehen von Leuchten nicht günstig; bei so kleiner Schlagweite entbehrt vielleicht der Funke der Begünstigung, die ihm sonst jene gewähren, gänzlich, er muss den gesammten Widerstand des Dielectricums allein überwinden, daher relativ hohe Potentiale erforderlich sind. Bei grösseren Abständen helfen die dem Funken, wenn auch vielleicht nur fast unmessbar kurze Zeit vorausgehenden Leuchtentladungen wenigstens an den Electroden die Stärke des Zwischenmediums resp. der adsorbirten Schichten brechen. Auch ohne dass Leuchten damit verbunden ist, mag, wie ebenfalls schon früher hervorgehoben worden [2]), eine Auflockerung der anliegenden Theile des Dielectricums statthaben, und erscheint es nicht ungereimt auch von dieser Wirkung anzunehmen, sie sei bei kleinen Schlagweiten schliesslich verschwindend oder doch sehr gering. Ein merklicher polarer Unterschied braucht hierbei noch nicht eingeführt zu werden, ein solcher tritt vielleicht erst dann auf, wenn die betreffenden Begleiterscheinungen einen bestimmten Stärkegrad erreichen, während sie bis dahin positive und negative Funken gleich begünstigen. Die Bedingungen für das Entstehen von Leuchten lassen sich noch nicht näher angeben, wie auch Hr. Heydweiller bemerkt, man sieht bisweilen scheinbar unmotivirt mächtige Büschel hervorbrechen oder Funken mitten aus ruhigem Glimmen heraus. Vorgänge wie Losbröckeln von Stellen der Electrode resp. der adsorbirten Schichten sind hierbei wohl im Spiele. Die verschiedenen Beobachter dürften so von einander abweichende und zum Theil sich widersprechende Resultate über die polaren Unterschiede erlangt haben, weil eben die Begleiterscheinungen einen vielfach nicht vorauszusehenden Einfluss ausüben. In Betreff der Wirkung des Polirens scheint Verfasser die Bildung von Oberflächenschichten zu beachten, welche ja auch bei optischen Untersuchungen eine Rolle spielen. Solche Polirschichten können wohl als wirksam angesehen werden, wenn man bedenkt, dass

1) K. Wesendonck, Naturw. Rundschau. 1887. p. 301—304; Beibl. **13.** p. 194. 1889.

2) K. Wesendonck, Wied. Ann. **40.** p. 483. 1890 Anm. u. **30.** p. 42. 1887.

z. B. ein dünner Lacküberzug nach Verfassers [1]) Beobachtungen die Bildung negativer Funken fördert. Ein solcher Ueberzug kann also eventuell polare Unterschiede einführen resp. vorhandene verändern, auch sonst überhaupt den Uebergangswiderstand modificiren. Wenn bei stärkerer Krümmung der Electroden das der Maximalladung entsprechende Potentialgefälle wächst, so hat dies vielleicht seinen Grund in dem zugleich mit der Krümmung zunehmenden Drucke der adsorbirten Schichten gegen die Oberfläche der Electroden, wodurch die electrische Widerstandsfähigkeit derselben vermehrt wird; doch vermag Verfasser allerdings zur Zeit nähere Anhaltspunkte zur Beurtheilung dieses Einflusses nicht zu geben.

In sehr stark verdünnter Luft hat Verfasser übrigens nicht einfach die Angaben der Hrn. Wiedemann und Rühlmann wie Röntgen bestätigt [2]), sondern nur in *relativ engen Vacuumröhren, nicht mehr in weiten solchen Gefässen.*

Berlin, 23. März 1893.

1) K. Wesendonck, Wied. Ann. **38.** p. 226. 1889.
2) K. Wesendonck, Wied. Ann. **41.** p. 463. 1890.

7. *Eine neue Form der Inductionswaage;*
von M. Wien.

Die mit vielen Hoffnungen aufgenommene Inductionswaage[1]) hat trotz ihrer Empfindlichkeit keinen Eingang gefunden, weil es nicht gelang, ihre Einstellungen auszuwerthen.

Der Grund ist ein doppelter: der eine liegt darin, dass die Gesetze des Stromverlaufes in körperlichen Leitern im allgemeinen unbekannt sind; der andere in der Versuchsanordnung selbst, da es nicht einmal möglich war, wenn man das Metallstück durch eine geschlossene Inductionsrolle ersetzte, auf die in Betracht kommenden Grössen der Rolle (Widerstand und Selbstpotential) einen sicheren Schluss zu ziehen.[2])

Oberbeck und Bergmann[3]) haben beide Schwierigkeiten umgangen; leider lässt sich ihre Methode nur für Messung der Leitungsfähigkeit sehr dünner Platten (bei Kupfer 0,055 mm dick) anwenden.[4])

Die Methode, welche im Folgenden beschrieben werden soll, gestattet erstens die Leitungsfähigkeit zweier Metallstücke von beliebiger, aber gleicher Form und Dimension zu *vergleichen*; ferner: bei den einfachsten Körperformen — Kugel und runde Scheibe — ohne Vergleich mit einem zweiten bekannten Metall direct aus der Wirkung auf die Inductionswaage und den Dimensionen des Metallstückes die Leitungsfähigkeit zu bestimmen, d. h. dieselbe *absolut zu messen.* Als Messinstrument wurde das optische Telephon benutzt, als Stromquelle ein Inductorium, dessen primäre Leitung durch eine electromagnetisch getriebene Saite unterbrochen wurde. Jedoch ist die Methode nicht an diese Apparate gebunden, und man kann auch, die nöthige Empfindlichkeit vorausgesetzt, Dynamometer oder Hörtelephon als Messinstrumente, Sinus-

---

1) Hughes, Phil. Mag. (5) 8. p. 50. 1879.

2) Vgl. Mascart-Joubert, L'electr. et Magn. 2. p. 435—436.

3) Oberbeck u. Bergmann, Wied. Ann. 31. p. 792. 1887.

4) l. c. p. 805.

inductor oder Wechselstrommaschine (jedoch hier kein Inductorium!) als Stromquelle benutzen (vgl. unten p. 323).

I. Grundlage der Methode.

Die Anordnung der Inductionswaage ist die theoretisch einfachste; eine Wheatstone'sche Brückencombination, Zweig 1 eine Rolle (*I*), Zweig *2* eine Rolle (*II*), Zweig *3* ein inductionsloser Widerstand, ebenso Zweig *4* (Fig. 1). Durch die Brücke geht ein Sinusstrom mit n Schwingungen in 2π Sec. Derselbe verschwindet im Brückenzweig, wenn $p_1 : p_2 = w_1 : w_2 = w_3 : w_4$ ist.[1]) p_1 und p_2 die Selbstpotentiale der Zweige *1* und *2*, w_1 w_2 w_3 w_4 die Widerstände der Zweige *1*, *2*, *3*, *4*.

Nähert man einer dieser beiden Rollen ein Metallstück, so wird das Gleichgewicht der Brücke gestört. Im Gegensatz zu den früheren Formen der Inductionswaage, wo die *gegenseitige* Induction *zweier* Rollen durch das Metallstück gestört wurde, wird hier die inducirende Rolle selbst beeinflusst. Dieser Einfluss soll berechnet werden, indem vorläufig das Metallstück durch eine Rolle (*I'* Fig. 1) ersetzt sei. Diese Rolle habe den Widerstand W und das Selbstpotential P und ihr gegenseitiger Inductionscoefficient mit der Rolle *I* sei M. Das Gleichgewicht der Brücke wird gestört, indem Widerstand und Selbstpotential der Rolle *I* modificirt erscheinen, und zwar ist der „wirksame Widerstand" des Zweiges *1* jetzt:

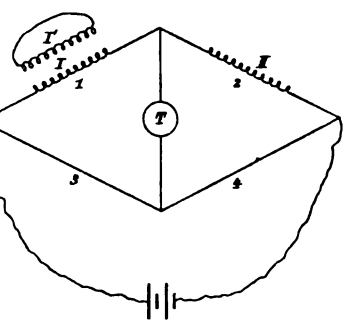


Fig. 1.

$$w_1' = w_1 + \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} \cdot W$$

das wirksame Selbstpotential:

$$p_1' = p_1 - \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} \cdot P.^{2})$$

Durch entsprechende Aenderung der Widerstände w_2 w_3 w_4 kann man den Sinusstrom im Brückenzweige wieder zum Ver-

1) Maxwell, Electr. and Magn. 2. § 757.

2) Maxwell, Phil. Tr. 155. p. 474. 1865 (M verdruckt für M^2).

schwinden bringen.[1]) Durch diese neue Nulleinstellung sind die Grössen p_1' und w_1' gegeben als $p_1' = p_2 . (w_3 / w_4)$ und $w_1' = w_2 (w_3 / w_4)$. In den vorstehenden Gleichungen sind demnach die Grössen w_1, w_1', p_1, p_1' experimentell bekannt; bildet man daraus den Ausdruck $(p_1 - p_1') / (w_1' - w_1)$, so ist derselbe gleich $P / W = \tau$ der Relaxationszeit oder Zeitconstante der secundären Rolle (I'), d. h. der Zeit, in welcher ein Strom in derselben, sich selbst überlassen, von der Intensität 1 auf die Intensität $1 / e$ sinkt. Es ist dies offenbar eine Grösse, welche unabhängig von Brücke, Strom und Lage der Rollen zu einander nur von der secundären Rolle (I') selbst abhängt.

Für zwei ganz gleiche Rollen aus zwei verschiedenen Metallen werden sich also die experimentell gefundenen Ausdrücke $(p_1 - p_1')/(w_1' - w_1)$ verhalten wie die Leitungsfähigkeiten der beiden Metalle.

Nähert man anstatt der Rolle (I') ein Metallstück der Rolle I, so tritt experimentell genau dasselbe ein: Widerstand und Selbstpotential des Zweiges *1* werden modificirt, man findet wieder eine neue Nulleinstellung. Es fragt sich, was bedeutet hier für ein Metallstück die Grösse $(p_1 - p_1')/(w_1' - w_1)$? Ist dieselbe, wie oben bei einer Rolle, unabhängig von Brücke und Strom, nur abhängig von Form und Leitungsfähigkeit des Metallstückes, so ist sie offenbar sehr günstig zum Vergleich und zur Bestimmung von Leitungsfähigkeiten.

Ehe ich zu dieser Frage übergehe, will ich, um nicht später dadurch unterbrochen zu werden, die Methode und Versuchsanordnung genauer besprechen, mittels welcher $(p_1 - p_1')/(w_1' - w_1)$ bestimmt wurde. Dieser Ausdruck ist also vorläufig für Metallstücke eine reine Beobachtungsgrösse. Ich werde sie im Folgenden mit τ_n bezeichnen.

II. Experimentelle Bestimmung von τ_n.

τ_n kann, wie gesagt, gefunden werden, indem man die Brücke ohne Metallstück und mit Metallstück auf Null einstellt, daraus die Werthe p_1 und p_1', w_1 und w_1' bestimmt und daraus $\tau_n = (p_1 - p_1')/(w_1' - w_1)$ berechnet. Ich bin längere Zeit in dieser Weise verfahren: einfacher und sicherer ist jedoch folgende Methode, die später ausschliesslich angewandt wurde.

1) Vgl. M. Wien, Wied. Ann. 44. p. 709. 1891.

Methode. Die ursprüngliche Brückeneinstellung bleibt ungeändert. Die durch das Metallstück im Zweige *1* hervorgerufene Störung wird durch eine ebensolche Störung im Zweige *2* compensirt, welche durch eine der Rolle *II* genäherte secundäre Rolle *II'* hervorgerufen wird (Fig. 2).

Es ist zu berechnen, unter welchen Bedingungen die Rolle *II'* das Metallstück compensirte. Die Brücke ohne Metallstück und ohne Rolle *II'* ist im Gleichgewicht, wenn

$$p_1 : p_2 = w_1 : w_2 = w_3 : w_4$$

ist. Soll mit Metallstück und Rolle bei derselben Brückeneinstellung der Brückenzweig stromlos sein, so müssen die „wirksamen Widerstände und Selbstpotentiale“ sich ebenso verhalten, d. h. es muss sein:

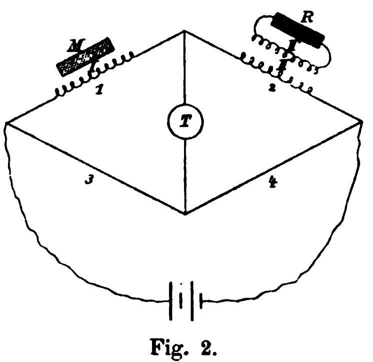


Fig. 2.

$$p_1' : p_2' = w_1' : w_2' = w_3 : w_4 .$$

Es müssen also auch die beiden Proportionen bestehen:

$$(p_1 - p_1') : (p_2 - p_2') = w_3 : w_4$$
$$(w_1' - w_1) : (w_2' - w_2) = w_3 : w_4 .$$

Wenn wir das Metallstück wieder durch die Rolle *I'* ersetzen, so lauten diese Gleichungen (vgl. p. 307):

$$\frac{n^2 M_1^2}{W_1^2 + n^2 P_1^2} P_1 : \frac{n^2 M_2^2}{W_2^2 + n^2 P_2^2} P_2 = w_3 : w_4$$
$$\frac{n^2 M_1^2}{W_1^2 + n^2 P_1^2} W_1 : \frac{n^2 M_2^2}{W_2^2 + n^2 P_2^2} W_2 = w_3 : w_4 .$$

Hieraus als Bedingungsgleichungen für die Stromlosigkeit des Brückenzweiges:

$$\frac{P_1}{W_1} = \frac{P_2}{W_2} \text{ (durch Division) oder } \tau_1 = \tau_2$$

und

$$\frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{w_3 \,.\, W_1}{w_4 \,.\, W_2} \,.$$

Ganz analog für ein Metallstück:

$$\frac{p_1 - p_1'}{w_1' - w_1} = \frac{P_2}{W_2} \text{ oder } \tau_n = \tau_2$$

und eine Gleichung für M_2, den gegenseitigen Inductionscoefficienten zwischen den Rollen *II* und *II'*. Es lässt sich also die durch das Metallstück hervorgerufene Störung immer durch eine secundäre Rolle im Zweige *2* compensiren, wenn die Zeitconstante dieser Rolle gleich dem τ_n des Mittelstückes ist, und die beiden Rollen in die richtige gegenseitige Entfernung gebracht werden.

Man muss demnach, um Null zu erhalten, τ_2 und M_2 variiren können. Die Variation von M_2 geschieht durch Ineinanderschieben der beiden Rollen. Die Variation von $\tau_2 = P_2 / W_2$ geschieht, da P_2 nicht gut geändert werden kann, durch Aenderung von W_2, d. h. es wird die Rolle *II'* durch einen Rheostaten geschlossen, durch welchen beliebige Widerstände eingeschaltet werden können. Es ist somit die Nulleinstellung nur durch *Näherung* möglich, indem τ_2 und M_2 abwechselnd variirt werden.[1]) Hat man Null erreicht, so ist das gesuchte

$$\tau_n = \tau_2 = \frac{P_2}{W_2} = \frac{P_2}{W_\alpha + W_\beta},$$

worin P_2 und W_α Selbstpotential und Widerstand der Rolle *II'* selbst ein- für allemal bestimmt sind, und W_β den Rheostatenwiderstand bedeutet. Man erhält also τ_n für verschiedene Metallstücke einfach durch Nulleinstellung und Ablesung des Rheostatenwiderstandes.

Versuchsanordnung.

Inducirende Rolle (I). Um eine möglichst grosse Empfindlichkeit zu erzielen, muss die Einwirkung des Metallstückes auf Selbstpotential und Widerstand der inducirenden Rolle eine möglichst grosse sein.

Das Metallstück selbst lasse ich vorläufig unberücksichtigt. Selbstverständlich muss es an die Stelle der Rolle gebracht werden, wo das magnetische Feld am stärksten ist. Ferner

1) Rayleigh (Rep. of the Br. Ass. 1880, p. 1—2) hat ähnliche Gleichungen für die Hughes'sche Inductionswaage abgeleitet und darin ausdrücklich betont, dass eine Nulleinstellung nur durch zwei Einstellungen (adjustments) möglich sei. Hughes hat immer nur eine Einstellung angewendet, er erhielt infolgedessen im allgemeinen nur ein Minimum, woraus sich keine sicheren Schlüsse ziehen lassen.

ist die Form der Rolle wichtig. Dieselbe ist so zu wählen dass $p - p'$ und $w' - w$ möglichst gross sind im Vergleich mit p und w; d. h.; es muss Selbstpotential und Widerstand klein, die gegenseitige Induction gross sein. Als besonders günstig, was sich auch für einen einzelnen Stromkreis (statt des Metallstückes) theoretisch beweisen lässt, erwiesen sich Rollen mit wenigen Windungslagen, deren Länge etwa gleich dem Durchmesser ist, deren axialer Querschnitt also ein Quadrat bildet; ich werde solche Rollen der Kürze halber „quadratische Rollen" nennen. Die bei den Versuchen benutzten Rollen hatten folgende Constanten:

	D	L	W	P	ν	δ (mm)
Rolle a	6,8 cm	7 cm	6,2 Ω	$1,05 . 10^7$ cm	8	0,6
„ b	6,8 „	7 „	6,15 „	$1,04 . 10^7$ „	8	0,6
„ A	15,0 „	14 „	4,00 „	$2,75 . 10^7$ „	6	1.1
„ B	22 „	14 „	4,02 „	$2,77 . 10^7$ „	4	1,1

Hierin ist D = Durchmesser[1]), L = Länge, W = Widerstand, P = Selbstpotential, ν = Anzahl der Windungslagen, δ = Drahtdicke.

Von den annähernd gleichen Rollen a und b wurde die eine als Rolle I, worin sich das Metallstück befand, die andere als Rolle II benutzt. Von den grösseren Rollen konnte entweder A als Rolle I, B als Rolle II dienen oder umgekehrt. Zur Aufnahme des Metalls standen also eine Rolle von 6,8, eine zweite von 15 und eine dritte von 22 cm Durchmesser zur Verfügung. Die Länge der letzten Rolle (B) war erheblich kleiner als ihr Durchmesser, also wich sie von der quadratischen Form ab.

Als *secundäre Rollen* II', die zur Compensation des Metallstückes dienen, wurde eine Rolle c benutzt, welche in die Rollen a und b hineinpasste (D = 5 cm, L = 7 cm), und eine Rolle C (D = 17 cm, L = 12 cm), welche entweder in die Rolle B oder über die Rolle A geschoben werden konnte, je nachdem man das Metallstück in die Rolle A oder B legen wollte.

Widerstand und Selbstpotential dieser Rollen (c und C) mussten genau gemessen werden, als die einzigen Grössen der

1) Unter „Durchmesser" der Rollen ist hier immer das Mittel zwischen innerem und äusserem Durchmesser verstanden.

Inductionswaage, welche zur Kenntniss der gesuchten Grösse $\tau_n = \tau_2 = P / W_\alpha + W_\beta$ nothwendig sind.

Der Widerstand von c wurde als 10.21 Ω, der von C als 11,90 Ω bei 19° C. bestimmt.[1])

Die Selbstpotentiale der beiden Rollen wurden nach einer in einer früheren Arbeit [2]) angegebenen Methode gleichzeitig gemessen. Es wurden drei Bestimmungen mit verschiedenen Widerständen gemacht, die auf Bruchtheile von pro Mille untereinander übereinstimmten. Ich erhielt für Rolle $c: P = 1{,}342 \,.\, 10^7$ cm, für $C: 3{,}999 \,.\, 10^7$ cm.

Variation von M_2. Um die gegenseitige Induction der Rollen (II und II') variiren zu können, wurde die kleinere Rolle in der grösseren verschiebbar gemacht. Zu diesem Zwecke wurde die grössere Rolle auf einem Holzstück H (Fig. 3) befestigt, und daran in der Axe der Rolle ein runder Holzstab S angebracht. Die kleinere Rolle wurde auf beiden Enden durch Holzscheiben verschlossen, in welche Löcher von der Grösse des Holzstabes geschnitten waren. Mittelst dieser konnte sie auf den Holzstab gesteckt und darauf verschoben werden. Die seeinfache Anordnung genügte vollkommen, da durch Hin- und Herdrehen der Rolle auf dem Holzstab auch sehr geringe Verschiebungen bewirkt werden konnten.

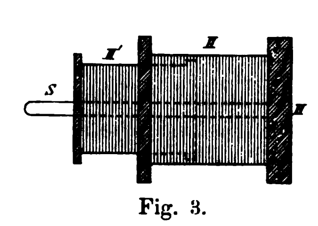


Fig. 3.

Anordnung der Brücke. Damit eine möglichst schwache in einem der Zweige durch ein Metallstück hervorgerufene Störung noch merklich ist, muss die Anordnung der Brücke eine möglichst empfindliche sein. Die Bedingung dafür ist bei Wechselströmen, dass die sechs Zweige der Brückencombination scheinbare Widerstände $(\sqrt{w^2 + n^2 p^2})$ von derselben Grössenordnung haben.[3]) Die vier parallel geschalteten Rollen des optischen Telephons sowohl, wie die secundäre Rolle des Inductoriums[4]) besassen bei der angewandten Schwingszahl von 256

1) Das Ohm ist hier immer als 1,063 . Quecksilbereinheiten angenommen.

2) M. Wien, Wied. Ann. **44.** p. 701. 1891.

3) Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. **49.** p. 209. 1891.

4) Das Inductorium besass verhältnissmässig kleinen primären Widerstand (0,2 Ω) und war ringförmig gewickelt, so dass keine Zerstreuung

in der Secunde einen scheinbaren Widerstand von ca. 50 Ohm. Zweig *3* und *4* der Brücke bestanden auch aus je 50 Ohm bifilar gewickeltem Neusilberwiderstande.

Die Zweige *1* und *2* bestanden entweder aus den Rollen *a* und *b* oder aus *A* und *B*. *a* und *b* hatten wie sich aus obigen Zahlen ergibt, einen scheinbaren Widerstand von ca. 20 Ohm *A* und *B* von ca. 50 Ohm. *a* und *b* waren also etwas zu klein, jedoch war die Empfindlichkeit auch hier eine genügende.

Strom, Brücke und optisches Telephon waren so beschaffen, dass eine Widerstandsänderung von 1 / 10000 noch merklich war. Bei geringerer Empfindlichkeit sind natürlich auch die nach dieser Methode angestellten Bestimmungen der Leitungsfähigkeit dementsprechend ungenauer.

Wie sich aus obigem ergibt, war die Brücke so angeordnet, dass annähernd $w_1 = w_2$, $p_1 = p_2$, $w_3 = w_4$ war. Es ist dies nicht nothwendig und nur der Einfachheit halber geschehen.

Es muss hier noch nachträglich angegeben werden, wie überhaupt diese *erste Einstellung der Brücke* (ohne Metall) erreicht wird.

Die Rollen *I* und *II* sind von vornherein so gewickelt, dass bei beiden Widerstand und Selbstpotential von derselben Grössenordnung ist, was sich ja einigermassen vorausberechnen lässt. Die beiden Rollen (Zweig *1* u. *2*) und einen einfachen Brückendraht (Zweig *3* u. *4*) setzt man zu einer Wheatstone'schen Brücke zusammen und schickt einen Strom hindurch. An einer Stelle des Brückendrahtes findet man ein Minimum des Ausschlags. Durch Hinzuwickeln zu der Rolle mit kleinerem Selbstpotential rückt man das Minimum ungefähr in die Mitte des Drahtes; durch Hinzufügung von Widerstand (Rheostat oder angelötheter Neusilberdraht) verkleinert man das Minimum. Ist annähernd der Strom Null in der Mitte des Drahts erreicht, so ersetzt man den Draht durch zwei grössere gleiche Widerstände (in unserem Fall 50 Ohm). Die

von Kraftlinien auftrat. Es lieferte bei einem primären Strom von zwei Bunsen, der 256 Mal in der Secunde durch die Saite unterbrochen wurde, einen etwa 2—3 mal so starken Strom, wie ein kleines Kohlrausch'sches Inductorium unter den gleichen Umständen. Jedoch kann natürlich auch ein solches benutzt werden.

letzte Einstellung geschieht mit Hilfe zweier ca. 10 cm. langer Platin- oder Eisendrähte zwischen den Zweigen *1* u. *2* und *3* u. *4*, auf welchen Quecksilberschleifcontacte verschiebbar sind, von denen der Strom zum Telephon führt. Dadurch kann w_1 / w_2 und w_3 / w_4 um ein paar promille geändert und die definitive Nulleinstellung erreicht werden.

Diese Einrichtung ist überhaupt nothwendig, weil die Brücke wegen kleiner Temperaturschwankungen nicht dauernd eingestellt bleibt. Unmittelbar vor jedem Versuch wird sie daher mit Hülfe der Quecksilberschleifcontacte neu eingestellt.

Fig. 4 gibt die ganze Anordnung der Inductionswaage, zum

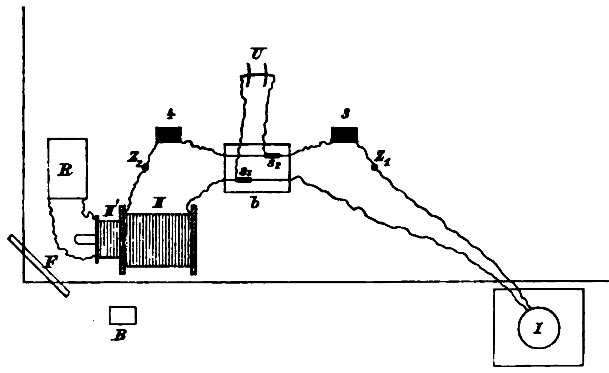


Fig. 4.

Versuch fertiggestellt, wieder. In der Mitte das Brett (*b*) mit den eben erwähnten beiden Drähten und den Quecksilberschleifcontacten s_1 und s_2, von denen der Strom zu dem Umschalter *U* führt. Mittelst desselben kann entweder das optische Telephon eingeschaltet werden, oder ein Hörtelephon, mit welchem die angenäherten Einstellungen gemacht wurden, solange der Ausschlag des optischen Telephons über das Gesichtsfeld des Fernrohrs hinaus ging. Auf beiden Seiten des Bretts *b* sind die beiden Widerstände von 50 Ohm, die die Zweige *3* u. *4* der Brücke bilden (mit *3* und *4* in der Figur bezeichnet). Mit Z_1 und Z_2 sind die beiden Zuleitungsstellen des Hauptstromes angedeutet. Die Rolle *I* befindet sich rechts etwa zwei Meter entfernt, um die gegenseitige Induction mit der Rolle *II* verschwindend zu machen, und auf einem besonderen Tisch auf-

gestellt, um bequem von allen Seiten zugänglich zu sein. Die Rolle *II* ist unmittelbar vor dem Beobachter (*B*) mit der in ihr verschiebbaren Rolle *II'* und dem Rheostaten *R*. Der Beobachter muss, während er durch das Fernrohr *F* sieht, einerseits die Verschiebung der Rollen bewirken und den Rheostatenwiderstand ändern können, andererseits müssen auch die Schleifcontacte s_1 und s_2 bequem für ihn erreichbar sein. — Das Inductorium und der Saitenunterbrecher befanden sich in der gegenüberliegenden Ecke des Zimmers, um nicht direct das optische Telephon zu beeinflussen.

Gang eines Versuches. Die Brücke sei mit Hülfe der Quecksilbercontacte scharf auf Null eingestellt. Das zu untersuchende Metallstück wird in die Rolle *I* gebracht und die compensirende Rolle *II'* geschlossen. Als Stromanzeiger dient vorläufig das Hörtelephon. Durch Verschieben der Rolle *II'* wird ein Tonminimum aufgesucht, durch Aenderung des Rheostatenwiderstandes wird es verkleinert. Darauf wird das optische Telephon eingeschaltet. Der entstehende Ausschlag wird abwechselnd durch Verschieben der Rolle *II'* und durch Aenderung des Rheostatenwiderstandes vermindert, bis man annähernd Null erreicht hat. Die definitive Nulleinstellung erfolgt nun meiner Erfahrung nach am schnellsten und genauesten, indem man in oben angegebener Art annähernd auf Null einstellt und dann einen kleinen Rheostatenwiderstand ε, der gerade ein Unklarwerden des Spaltbildes bewirkt, hinzufügt resp. abzieht. Ist das Bild im Minimum bei $w + \varepsilon$ und $w - \varepsilon$ gleich unklar, so ist w der richtige Werth.

Nach der Einstellung wird das Metallstück wieder herausgenommen und die Rolle *II'* geöffnet, und nachgesehen, ob die Brücke sich während des Einstellens nicht verändert hat. Eventuell wird dann mit Hülfe der Schleifcontacte wieder auf Null eingestellt und die Messung wiederholt. Als Beispiel mag eine beliebige Bestimmung von τ_n aus meinem Beobachtungsheft dienen.

Quecksilkerkugel II. Zimmertemperatur 18,0° C.; Quecksilbertemperatur 18,0° C.

Ein Vorversuch ergab für W_β (Rheostatenwiderstand) 129 Siem. Neue Nulleinstellung der Brücke. I. Spaltbild gleich undeutlich bei 129,0 und 129,4 Siem. Also $W_\beta = 129{,}2$ Siem.

II. Einstellung: $W_\beta = 129{,}3$; III. Einstellung $W_\beta = 129{,}2$; Mittelwerth $W_\beta = 129{,}23$ Siem. $= 121{,}57\,\Omega$

$$\text{Hieraus } \tau_n = \frac{P}{W_\alpha + W_\beta} = \frac{3{,}999}{11{,}85 + 121{,}57} = 2{,}998 \,.\, 10^{-4} \text{ Sec.}$$

Die Genauigkeit der Bestimmung von τ_n hängt sehr von Leitungsfähigkeit, Grösse und Form des Metallstückes ab. Bei geeigneter Anordnung ist τ_n immer auf ein pro Mille genau zu bestimmen. Die Einstellung selbst bietet durchaus keine experimentellen Schwierigkeiten. Bei der eben angegebenen Quecksilberkugel erreichte ein Beobachter, der nicht nur mit der Methode, sondern überhaupt zum ersten Mal mit dem optischen Telephon arbeitete, sofort eine Genauigkeit der Einstellung von ein pro Mille, während ich selbst, wie aus Obigem zu ersehen, etwa 0,3 promille Fehler hatte.

Im Folgenden komme ich endlich wieder auf die im Eingange aufgestellte Frage zurück: Was bedeutet $\tau_n = (p_1 - p_1')/(w_1' - w_1)$ für ein Metallstück?

III. Bedeutung von τ_n. (Wirkung eines Metallstückes auf eine von einem Sinusstrom durchflossene Rolle).

Wenn in der Nähe eines Leiters, in welchem ein variabler Strom fliesst, sich ein Metallstück befindet, so entstehen in dem letzteren Ströme. Wir betrachten nur die in sich geschlossenen Ströme; sie sind es sämmtlich, wenn Leiter und Metallstück Rotationskörper mit gemeinschaftlicher Axe sind. [1]) Durch vier benachbarte Stromlinien kann man ein ringförmiges Stück aus dem Metall herausschneiden und da die Electricität längs der Stromlinien fliesst, wird man diesen herausgeschnittenen Theil des Metallstückes, wie einen linearen Strom behandeln dürfen. Indem man alle Stromlinien zur Herstellung solcher Stromkreise verwendet, zerlegt man den ganzen Körper in lauter solche Stromkreise. Die magnetische Wirkung des Metallstückes kann durch die dieser Stromkreise ersetzt werden. [2])

Wir haben also die, vielleicht allgemeineres Interesse bietende Aufgabe, die gegenseitige Induction zwischen einer *beliebigen Anzahl* secundärer Stromkreise und einem primären

1) Oberbeck, Wied. Ann. **31.** p. 817. 1887.
2) Maxwell, Electr. and Magn. II. § 652.

zu berechnen. In dem inducirenden Hauptkreis (oder Rolle) sei die electromotorische Kraft e_0, die Stromintensität i_0, der Widerstand w_0; das Selbstpotential p_0 und der gegenseitige Inductionscoefficient zwischen dem Hauptkreis und einem beliebigen secundären Stromkreis (a) sei m_{0a}, die Intensität in diesem Stromkreis i_a.

Dann besteht für einen beliebigen variablen Strom für den Hauptkreis die Gleichung:

$$e_0 = i_0 w_0 + p_0 \frac{d i_0}{d t} + \sum_a m_{0a} \frac{d i_a}{d t}.$$

Für den beliebigen secundären Stromkreis mit dem Index a besteht die Gleichung:

$$0 = m_{0a} \frac{d i_0}{d t} + i_a w_a + \sum_k m_{ak} \frac{d i_k}{d t}.$$

Die Summen sind über sämmtliche secundären Kreise zu erstrecken, deren Anzahl ν sei. m_{ak} ist der gegenseitige Inductionscoefficient zwischen dem Stromkreis a und einem beliebigen anderen secundären Stromkreis k. Das in der Summe enthaltene m_{aa} ist der Selbstinductionscoefficient des Stromkreises a.

Der variable Strom sei ein Sinusstrom mit n Schwingungen in 2π Secunden. Statt dessen betrachten wir, wie üblich, die mathematisch bequemere Function e^{int}. Es sei also:

$$e_0 = A . e^{int}, \text{ demnach } i_0 = \alpha_0 e^{int} \text{ und } i_a = \alpha_a e^{int}.$$

Dadurch wird für den Hauptkreis:

$$\text{I} \qquad A = \alpha_0 (w_0 + i n p_0) + i n \sum_a m_{0a} \alpha_a$$

und für den secundären Kreis a

$$\text{II} \qquad 0 = i n m_{0a} \alpha_0 + w_a \alpha_a + i n \sum_k m_{ak} \alpha_k.$$

Setzen wir $i n = \gamma$, so ist:

$$0 = \gamma m_{0a} \alpha_0 + w_a \alpha_a + \gamma \sum_k m_{ak} \alpha_k$$

oder ausgeführt:

$$0 = \alpha_0 \gamma m_{0a} + \alpha_1 \gamma m_{1a} + \ldots + \alpha_a (w_a + \gamma m_{aa}) \ldots \alpha_\nu \gamma m_{\nu a}.$$

Solcher Gleichungen giebt es für jeden der ν Stromkreise

eine; sie stellen zusammen ein System linearer Gleichungen für die Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ dar. Ihre Lösung ist:

$$\alpha_a = -\frac{\Delta_a}{\Delta}\alpha_0 .$$

Hierin ist Δ die Determinante sämmtlicher Coefficienten der $\alpha_1 \ldots \alpha_\nu$ und Δ_a diejenige Determinante, welche entsteht, wenn man die Verticalreihe mit dem Index a durch die entsprechende mit dem Index o vertauscht [1]). Der Uebersicht halber sei die Determinante Δ ausgeführt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1 + \gamma m_{11} & \gamma m_{12} \ldots & \gamma m_{1a} \ldots & \gamma m_{1\nu} \\ \gamma m_{21} & w_2 + \gamma m_{22} \ldots & \gamma m_{2a} \ldots & \gamma m_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma m_{a1} & \gamma m_{a2} \ldots & w_a + \gamma m_{aa} \ldots & \gamma m_{a\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma m_{\nu 1} & \gamma m_{\nu 2} \ldots & \gamma m_{\nu a} \ldots & w_\nu + \gamma m_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

In Δ_a sind, wie gesagt, die Glieder der Verticalreihe mit dem Index a durch $\gamma m_{10}, \gamma m_{20} \ldots \gamma m_{a0} \ldots \gamma m_{\nu 0}$ ersetzt.

Es lässt sich sowohl Δ wie Δ_a nach Potenzen von γ entwickeln. Mit Hülfe einiger Determinantensätze [2]) folgt unmittelbar:

$$\Delta = (w_1 w_2 \ldots w_\nu)\left\{1 + \gamma \sum_b \frac{m_{bb}}{w_b} + \frac{\gamma^2}{2!}\sum_b\sum_c \frac{\begin{vmatrix} m_{bb} & m_{bc} \\ m_{cb} & m_{cc}\end{vmatrix}}{w_b \quad w_c}\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma^3}{3!}\sum_b\sum_c\sum_d \frac{\begin{vmatrix} m_{bb} & m_{bc} & m_{bd} \\ m_{cb} & m_{cc} & m_{cd} \\ m_{db} & m_{dc} & m_{dd}\end{vmatrix}}{w_b \quad w_c \quad w_d} + \frac{\gamma^4}{4!}\ldots\right\}$$

Aus der Bildungsweise von Δ_a aus Δ ergiebt sich

$$\Delta_a = \gamma \sum_q m_{0q} D_{qa},$$

worin D_{qa} die Unterdeterminante von γm_{qa} ist. D_{qa} ist, da

1) Helmholtz giebt in „Telephon und Klangfarbe" (Wissenschaftliche Abhdl. I. p. 469) ein sehr ähnliches Gleichungssystem, bespricht jedoch nur den Fall, dass n gross.

2) Baltzer, Theor. u. Anw. d. Det. § 5. p. 35—37, Leipzig 1875.

das Glied m_{qa} (nicht m_{aq}!) nur einmal in der Determinante Δ vorkommt $= \partial \Delta / \partial m_{qa}$. Also:

$$\Delta_a = \gamma \sum_q m_{0q} (w_1 w_2 \ldots w_\nu) \frac{\partial}{\partial m_{qa}} \left\{ 1 + \gamma \sum \frac{m_{bb}}{w_b} + \frac{\gamma^2}{2!} \sum_b \sum_c \ldots \right\}$$

Die Differentiation erfolgt Glied für Glied, indem man zuerst $q = a$ und dann $q \lesseqgtr a$ setzt. Dann wird:

$$\Delta_a = w_1 . w_2 . w_3 \ldots w_\nu \left\{ \gamma \frac{m_{0a}}{w_a} + \gamma^2 \sum_b \frac{m_{0a} \quad m_{bb} - m_{0b} \quad m_{ab}}{w_a \quad w_b} \right.$$

$$+ \frac{\gamma^3}{2'} \sum_b \sum_c \frac{m_{0a} \begin{vmatrix} m_{bb} & m_{bc} \\ m_{cb} & m_{cc} \end{vmatrix} - 2 m_{0b} \begin{vmatrix} m_{ab} & m_{ac} \\ m_{cb} & m_{cc} \end{vmatrix}}{w_a \quad w_b \quad w_c}$$

$$+ \frac{\gamma^4}{3!} \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0a} \begin{vmatrix} m_{bb} & m_{bc} & m_{bd} \\ m_{cb} & m_{cc} & m_{cd} \\ m_{ab} & m_{dc} & m_{dd} \end{vmatrix} - 3 m_{0b} \begin{vmatrix} m_{ab} & m_{ac} & m_{ad} \\ m_{cb} & m_{cc} & m_{cd} \\ m_{db} & m_{dc} & m_{dd} \end{vmatrix}}{w_a \quad w_b \quad w_c \quad w_d}$$

$$\left. + \frac{\gamma^5}{4!} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Wenn man $\alpha_a = - (\Delta_a / \Delta) \alpha_0$ nach Taylor in Potenzen von γ entwickelt [1]), so folgt für den Stromkreis a von ν secundären Stromkreisen, welche von einem primären inducirt werden, die Stromaplitude α_a, verhältnissmässig einfach, als ($\gamma = i n$)

$$\alpha_a = \alpha_0 \left[- \frac{i n m_{0a}}{w_a} - n^2 \sum_b \frac{m_{0b} \quad m_{ab}}{w_a \quad w_b} - i n^3 \sum_b \sum_c \frac{m_{0b} \quad m_{ac} \quad m_{bc}}{w_a \quad w_b \quad w_c} \right.$$

$$+ n^4 \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0b} \quad m_{ad} \quad m_{bc} \quad m_{cd}}{w_a \quad w_b \quad w_c \quad w_d}$$

$$\left. \pm \ldots (- i n)^{\nu + 1} \sum_b \sum_c \ldots \sum_\nu \frac{m_{0b} \quad m_{a\nu} \quad m_{bc} \ldots \quad m_{\mu\nu}}{w_a \quad w_b \ldots \quad w_\mu \quad w_\nu} \ldots \right]$$

α_a hat die Form $A + i B$; wir erhalten Amplitude und Phase des analogen Sinusstroms als $\sqrt{A^2 + B^2}$ und $- B / A$.

Die Rückwirkung aller secundären Kreise auf den inducirenden erhalten wir nach Gleichung (I) (p. 317), indem wir in $\sum m_{0a} \alpha_a$ bilden. Dieser Ausdruck ist wieder complex, der

---

1) Hierbei ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass Δ_a und Δ convergiren, was natürlich besonders von dem Werth von n abhängt. In unserem Fall ist dies auch experimentell nothwendig (vgl. weiter unten).

reelle Theil modificirt den Widerstand des Hauptkreises, der imaginäre Theil das Selbstpotential. Demnach:

$$w_0' = w_0 + n^2 \sum_a \frac{m_{0a}^2}{w_a} - n^4 \sum_a \sum_b \sum_c \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ac} m_{bc}}{w_a w_b w_c} + n^6 \ldots$$

$$p_0' = p_0 - n^2 \sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{w_a w_b}$$

$$+ n^4 \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ad} m_{bc} m_{cd}}{w_a w_b w_c w_d} - n^6 \ldots$$

Wenn wir zu dem speciellen Falle eines Metallstückes zurückkehren, das als homogen vorausgesetzt sei, so verlaufen sämmtliche secundären Ströme in ein und demselben Metall und man kann die Leitungsfähigkeit λ dieses Metalles herausziehen, indem man setzt $w_a = g_a / \lambda$, $w_b = g_b / \lambda$ etc., worin die g einfache geometrische Functionen sind, die von der Gestalt des Stromfadens abhängen.

Wenn wir dieses einführen, so folgt unser gesuchtes $\tau_n = (p_0 - p_0') / (w_0' - w_0)$ als:

$$\tau_n = \lambda \left\{ \frac{\sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b} - (n\lambda)^2 \sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ad} m_{bc} m_{cd}}{g_a g_b g_c g_d} + }{\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a} - (n\lambda)^2 \sum_a \sum_b \sum_c \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ac} m_{bc}}{g_a g_b g_c} + (n\lambda)^4 \ldots} \right\}$$

Hieraus, wenn wir wieder nach Taylor in Potenzen von $(n\lambda)^2$ entwickeln:

$$\tau_n = \lambda \left\{ \frac{\sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a}} \right.$$

$$- (n\lambda)^2 \frac{\sum_a \sum_b \sum_c \sum_d \sum_e \frac{m_{0a} m_{0b} m_{0c} m_{be} (m_{0c} m_{bd} m_{de} - m_{0d} m_{ae} m_{cd})}{g_a g_b g_c g_d g_e}}{\left(\sum \frac{m_{0a}^2}{g_a} \right)^2}$$

$$\left. + (n\lambda)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Für Metallstücke bestimmter Form verwandeln sich die Summen in Integrale, die über das ganze Metallstück auszu-

dehnen sind. Dieselben lassen sich nur in den einfachsten Fällen auswerthen; einer derselben — dünne runde Scheibe — soll im Folgenden durchgeführt werden.

Discussion der Formeln.

Die eben abgeleitete Schlussformel für τ_n hat die Form

$$\tau_n = \lambda . \left(A - (n\lambda)^2 B + (n\lambda)^4 C \pm \ldots\right)$$

Für *einen* secundären Stromkreis (Ring oder Rolle) reducirt sie sich auf $\tau_n = \tau = \lambda\, m_{11} / g_1 = P / W$, welchen Fall wir am Eingang besprochen haben.

Für mehrere secundäre Stromkreise, also jedenfalls für ein Metallstück hat τ_n die obige Form.

Der principielle Unterschied zwischen einer Rolle und einem Metallstück ist also der, dass im ersten Fall $\tau_n = P / W$ nur abhängig ist von Widerstand und Selbstpotential der zu untersuchenden Rolle, im zweiten Falle jedoch τ_n ausser von der Leitungsfähigkeit und der Form des Metallstückes noch abhängig ist:

1. von der Schwingungszahl n des inducirenden Stromes,
2. von der inducirenden Rolle d. i. von der Form des magnetischen Feldes, in welches das Metallstück gebracht ist, da die Grössen A, B, C, Coefficienten mit dem Index 0 enthalten (m_{0a} etc.).

Jedes einzelne würde eine genauere Bestimmung von λ unmöglich machen, wenn nicht beide Einflüsse secundärer Natur wären. Der Einfluss der Schwingungszahl lässt sich durch Aenderung derselben eliminiren. Der Einfluss des Feldes ist so gering, dass z. B. die Aenderung des Feldes innerhalb einer quadratischen Rolle zu vernachlässigen ist. Beides muss bewiesen werden.

Abhängigkeit von n. A hat die Dimension L^2, $B\ L^6$, $C\ L^{10}$ etc. Es wird die Reihe τ_n demnach schnell convergiren 1. mit den linearen Dimensionen des Metallstücks, 2. mit n, 3. mit λ. Man kann daher für jedes λ entweder die Grösse des Metallstücks oder n so wählen, dass τ_n sich merklich entweder nur auf das erste Glied $\tau_0 = \lambda A$ oder höchstens auf die beiden ersten $\lambda(A - (n\lambda)^2 B) = \lambda A(1-q)$ reducirt, wobei das zweite Glied nur als Correction des ersten Gliedes hinzu-

gefügt wird nnd nicht mehr als 3 bis 4 Proc. des ersten betragen darf, damit das 3. Glied unter 1 pro Mille bleibt und vernachlässigt werden kann (vgl. p. 332).

Es hat dann keine Schwierigkeit, die Grösse dieses zweiten Gliedes festzustellen, wenn man τ_n für zwei Perioden n_1 und n_2 bestimmt.[1] Ich wählte die Schwingszahlen 315 und 256 pro Sec., wobei die bequeme Relation besteht

$$\tau_{n_2} - \tau_{n_1} = 4\,\pi^2 (B\,\lambda^3 (315^2 - 256^2) = 4\,\pi^2\,B\,\lambda^3\,256^2 / 2\,,$$

sodass die Differenz der beiden Werthe τ_{n_2} und τ_{n_1} gerade die Hälfte des gesuchten zweiten Gliedes bei 256 Schwingungen beträgt. Da nur ein Corretionsglied hiermit bestimmt werden soll, sind kleinere Fehler vor allem auch in der Bestimmung von n_1 und n_2 belanglos. Sind mehrere Metallstücke derselben Form aber verschiedener Leitungsfähigkeit zu vergleichen, so genügt es für eines derselben q zu bestimmen, denn es ist q' für ein zweites Metallstück:

$$q' = q\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = q\left(\frac{\tau_n'}{\tau_n}\right)^2$$

in erster Annäherung

$$= q\left(\frac{\tau_n'}{\tau_n}\right)^2 \left\{1 - q\left(\frac{\tau_n'^2}{\tau_n^2} - 1\right)\right\}^2$$

in zweiter Annäherung. In den meisten Fällen wird die erste Formel völlig ausreichen.

Es wäre jedoch auch sonst sehr unbequem, jedesmal für eine andere Form des Metallstückes q besonders mit zwei Schwingungsdauern zu bestimmen. Für die wichtigsten Körper-

---

1) Eine Eigenschaft des optischen Telephons macht dies sehr bequem, nämlich mit ungefähr derselben Empfindlichkeit auf zwei Töne zu reagiren, die etwa eine Terz auseinander liegen. Ich habe dies bisher für eine Folge ungenauer Einstimmung gehalten und daher nicht erwähnt. Da es mir jedoch trotz sorgfältigster Einstimmung bisher nicht gelungen ist, nur einen Ton zu erhalten, so scheint die Sache doch tiefer begründet zu sein. Da der Apparat auf jeden der Töne so reagirt, als ob der andere gar nicht verhanden wäre, die übrigen Eigenschaften also davon unberührt bleiben, so kann hierin nur ein Vorzug des optischen Telephons erblickt werden. Jeder der Eigentöne lässt sich durch Nähern der constanten Magnete (vgl. M. Wien, Wied. Ann. **44.** p. 685. 1891) etwas ändern, sodass man ohne Schwierigkeiten ein bestimmtes Intervall, wie oben, festhalten kann.

formen (Kugel und runde Scheibe) lassen sich nun ein für allemal Formeln aufstellen, mit Hülfe deren man τ_0 aus dem experimentell gefundenen τ_n in ähnlicher Weise berechnen kann, wie etwa die Reduction der bei einer beliebigen Temperatur gemessenen Leitungsfähigkeit auf 0° C. erfolgt. Ich komme weiter unten bei den Specialfällen hierauf zurück.

Die Abhängigkeit von τ_n von der Schwingungsdauer des Stromes ist ferner entscheidend für die Versuchsanordnung insofern, als bei einigen Messmethoden dadurch Fehlerquellen entstehen können. Der Strom eines Inductoriums enthält ausser dem Sinusstrom von der Periode der Unterbrechung noch eine Reihe von Strömen höherer Periode. Für jeden dieser Ströme wird τ_n einen anderen Werth haben. Infolgedessen erhält man im Hörtelephon nicht Null, sondern nur ein Minimum, das durch die Obertöne mehr oder weniger verdeckt und verschoben wird. Auch das Dynamometer wird falsche und zwar zu kleine Werthe für τ_n ergeben. Nur bei sehr schlechter Leitungsfähigkeit oder sehr kleinen Metallstücken wo die höheren Glieder von τ_n an und für sich klein sind, wird man einigermassen richtige Werthe erhalten. Das optische Telephon hingegen reagirt merklich nur auf den Grundstrom, auf den es eingestimmt ist, man erhält immer Null und zwar an der richtigen Stelle.

Will man bei der Methode das Dynamometer oder Hörtelephon anwenden, so muss man eine Stromquelle benutzen, die reine oder annähernd reine Sinusströme liefert, wie der Sinusinductor oder eine Wechselstrommaschine. Sehr bequem ist dabei, dass die Periode nicht genau bekannt und constant zu sein braucht, weil sie nur in einem Correctionsgliede vorkommt.

In der oben angegebenen Weise ist es also immer möglich τ_n auf das erste Glied $\tau_0 = \lambda A$ zu reduciren. In A befinden sich noch Grössen mit dem Index Null; wir kommen damit zu der Abhängigkeit von τ_n von dem magnetischen Felde. Es würde sehr schwierig sein, die Metallstücke immer genau an dieselbe Stelle der Rolle zu bringen. Glücklicherweise stellte sich experimentell sogleich heraus, dass die Aenderungen des Feldes, wenigstens soweit sie innerhalb einer quadratischen Rolle vorhanden sind, keinen merklichen Ein-

fluss auf τ_n haben.[1]) Folgende Versuche mögen als Beweis dienen.

Es wurde τ_n für eine Aluminiumscheibe an verschiedenen Stellen einer Rolle bestimmt, in welcher die Scheibe durch Unterlegen von Holzstückchen axial fortbewegt wurde. Die Rolle war ca. 7 cm hoch; die Scheibe befand sich zuerst in der Mitte also 3,5 cm vom oberen Rande entfernt; unter h ist die Entfernung vom obern Rande zu verstehen, unter W der Widerstand der secundären Rolle II' ($\tau_n = \tau_2 = P / W$).

h	W	h	W
3,5 cm	36,55	0,3 cm	36,65
2,2 „	36,55	− 0,4 „	36,40
1,4 „	36,60		

Erst der letzte Werth, wo die Scheibe schon ausserhalb der Rolle sich befand, weicht erheblich ab. Das allmähliche Ansteigen der anderen erklärt sich durch Ansteigen der Zimmertemperatur und folglich auch der des Metalls, welche anfangs 20,7° C. am Schlusse 21,3° betrug.

Der analoge Versuch wurde mit einer Quecksilberkugel in der Rolle A (14 cm hoch) gemacht. Es ergab sich: h Mitte der Kugel bis oberer Rand der Rolle.

---

1) Diese Thatsache dürfte auffallend erscheinen; sie erklärt sich daraus, dass der grösste Theil der Wirkung von den am *Rande* des Metallstücks fliessenden Strömen herrührt. Denn es ist

$$\tau_0 = \lambda A = \lambda \cdot \sum\sum \frac{\dfrac{m_{0a}\, m_{0b}\, m_{ab}}{g_a g_b}}{\sum \dfrac{m_{0a}^2}{g_a}}.$$

Der Voraussetzung nach ist nun das Metallstück ein Rotationskörper, die Elementarströme, Kreisströme. Für das annähernd homogene Feld quadratischer Rollen (vgl. hierüber auch p. 336) ist m_{0a} und m_{0b} proportional dem Quadrate des Radius, m_{ab}, g_a, g_b proportional dem Radius selbst. Zähler und Nenner von τ_0 bestehen mithin aus Reihen, deren Glieder den Radius in der dritten Potenz enthalten, und schnell mit dem Radius convergiren; der grösste Theil der Wirkung geht von dem äusseren Rande des Metallstückes aus. Betrachten wir diesen äusseren Rand allein, so bildet er einen Ring, bei dem $\tau_n = P / W$, also ganz unabhängig von dem Felde ist. Eine Aenderung des Feldes kann daher nur den kleinen Theil von τ_n beeinflussen, der von den mittleren, inneren Strömen des Metallstückes herrührt. Eine kleine Aenderung des Feldes kann also nur eine *sehr* kleine Aenderung von τ_n zur Folge haben.

h	W	h	W	h	W
7 cm	133,5	5 cm	133,6	3 cm	134,3
6 „	133,4	4 „	133,8	2 „	136,4

Beim vierten Werth, wo die Kugel schon 1 cm aus der Rolle herausragte, beginnt die Einwirkung des Feldes eben merklich zu werden.

Aus den Versuchen ergibt sich mithin, dass, solange das Metall innerhalb der Rolle bleibt, die Einwirkung der Aenderung des Feldes zu vernachlässigen ist. Es ist deshalb durchaus nicht nothwendig, das Metall genau an dieselbe Stelle der Rolle zu bringen.

Hiermit ist die Aufgabe, welche Hughes anstrebte, gelöst, nämlich mit Hülfe von Inductionsströmen die Leitungsfähigkeit zweier Metallstücke von beliebiger aber gleicher Form und Grösse mit einander zu vergleichen.

Man bringt also die beiden Metallstücke am besten in einem Gefäss mit Wasser — um die Temperatur bestimmen zu können — in die Rolle I und stellt die Inductionswaage auf Null. Die Leitungsfähigkeiten verhalten sich dann wie $P / W_1 : P / W_2$ oder die specifischen Widerstände der Metalle, wie die Widerstände der secundären Rolle II'. Zum Vergleich der Leitungsfähigkeiten braucht man also von der ganzen Inductionswaage nur die Widerstände W_1 und W_2 zu kennen.

Ehe ich zu einigen Anwendungen übergehe, bleibt zu untersuchen, was uns die Formeln darüber sagen, wie die Intensität der Wirkung der Metallstücke auf die Rolle I d. i. die *Empfindlichkeit* der Waage von den Dimensionen und der Leitungsfähigkeit des Metalles und von der Schwingungszahl n abhängt. Entscheidend hierfür ist das Verhältniss der Aenderung des Selbstpotentials zum Selbstpotential der primären Rolle I selbst, also $(p_0 - p_0')/p_0$ und analog $(w_0' - w_0)/w_0$. Da die anderen Glieder nur Correctionsglieder sein sollen, so folgt $(p_0 - p_0')/p_0$ aus der Gleichung für p_0' auf p. 320 als:

$$\frac{n^2 \sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{w_a w_b}}{p_0} = \frac{n^2 \lambda^2 \sum_a \sum_b \frac{m_{0a} m_{0b} m_{ab}}{g_a g_b}}{p_0}$$

also proportional $n^2 \lambda^2 . [L^4]$.

$$\frac{w_0' - w_0}{w_0} = \frac{n^2 \sum \frac{m_{0a}^2}{w_a}}{w_0} = \frac{n^2 \lambda_k \lambda \sum \frac{m_{0a}^2}{g_a}}{g_0},$$

worin λ_k die Leitungsfähigkeit des Kupfers der Rolle bezeichnen soll; also schliesslich $(w_0' - w_0 / w_0)$ prop. $n^2 . \lambda . [L^4]$, indem λ_k naturgemäss gleich bleibt.

Es folgt hieraus, dass, wenn man Metall schlechter Leitungsfähigkeit mit derselben Genauigkeit messen will, wie solches guter, man entweder die Schwingungszahl erhöhen oder die Dimensionen von Rolle und Metallstück vergrössern muss.

Der naheliegende Gedanke die Leitungsfähigkeit von Electrolyten auf diesem Wege zu messen, erscheint vorläufig leider unausführbar, da die am besten leitenden Flüssigkeiten noch immer mehr als 10 000 mal schlechter leiten, wie Quecksilber.

Man müsste also entweder eine 10 000 mal grössere Schwingungszahl anwenden oder die Dimensionen auf das 100 fache steigern.

IV. Vergleich von Leitungsfähigkeiten.

Eine Anzahl runder Metallscheiben von ca. 2,8 cm Radius und ca. 2 mm Dicke wurden untersucht. Die Metalle waren als „rein“ von Sy und Wagner in Berlin bezogen. Die Scheiben wurden nach einander in die Rolle *a* (7 cm Durchmesser) gebracht und mit der Rolle c im Zweige *2* compensirt. Die folgende Tabelle gibt die Resultate:

	I	*II*	*III*	W_{256}	W_0	σ
Kupfer . . .	23,63	23,64	23,65	23,64 Ω	22,30	1550
Aluminium .	35,91	35,86	35,93	35,90 „	35,01	2940
Zink . . .	75,2	75,55	75,40	75,38 „	74,93	5380
Zinn . . .	141,0	142,2	142,8	142,0 „	141,8	12500
Blei	237,0	239,2	235,0	237,1 „	237,1	18800

Hierin bedeutet I, II, III 3 Einstellungen bei $n = 256 . 2\pi$ wobei die Empfindlichkeit, wie aus Obigem folgt, mit λ abnimmt. W_{256} bedeutet den Mittelwerth dieser drei Einstellungen. W_0 ist der hieraus berechnete Wert von W für 0 Schwingungen, entsprechend τ_0. Derselbe wurde in der oben angegebenen Weise mit Hülfe von $n_2 = 315 . 2\pi$ für die Aluminiumscheibe bestimmt und für die übrigen nach der Formel $q' = q(\tau_n'/\tau_n)^2 = q(W_n / W_n')^2$ (p. 322) berechnet. σ ist der specifische Widerstand wie er sich aus früheren Beobachtungen ergibt. W_0 und σ sind einander annähernd proportional. Die

Abweichungen erklären sich theils aus kleinen Differenzen in den Dimensionen, theils daraus, dass die Metalle nicht ganz rein waren. Ich komme auf diese Metallscheiben weiter unten noch einmal zurück.

Besonders bequem ist die Methode natürlich, wenn man Aenderungen der Leitungsfähigkeit ein und desselben Metallstückes z. B. mit der Temperatur bestimmen will, da man dabei sicher ist, immer gleiche Dimensionen zu haben. Die kleine Correction, welche für die Ausdehnung durch die Wärme anzubringen wäre, ist zu vernachlässigen.

Es wurde der Temperaturcoefficient zwischen 10 und 30° C. einer Kupfersorte bestimmt. welcher für weiter unten zu besprechende Versuche wichtig ist.

Eine Kupferscheibe von 7 cm Radius und ca. 0.5 mm Dicke wurde auf kleine Holzklötze in ein Glasgefäss mit Wasser gelegt und in die Rolle *B* gebracht. Das Glasgefäss war mit einer Filzhülle umgeben, um die Rolle vor allzuschnellen Temperatureinflüssen zu schützen und um das Wasser möglichst lange auf constanter Temperatur zu erhalten. Da es auf die Form des Metalles nicht ankam, wurde in die Mitte der Kupferscheibe ein Loch von 3,5 cm Radius geschnitten, um dem Wasser beim Umrühren freieren Durchgang zu gewähren. Die Temperatur wurde in der Weise hergestellt, dass wärmeres Wasser zugegossen wurde. Darauf wurde das Gefäss in die Rolle gestellt, umgerührt, die Temperatur abgelesen, wobei sich die Thermometerkugel unmittelbar an dem Kupfer befand, dann die Nulleinstellung gemacht und wieder die Temperatur abgelesen. Da die Einstellung nur Bruchtheile einer Minute dauerte. betrug die Differenz der beiden Ablesungen immer weniger als 0,1° C. Der Temperaturcoefficient gilt für die Umgebung von 19° C. und ist nach der Formel berechnet

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_{19^0}} \frac{\lambda - \lambda_{19^0}}{\Theta - 19^0} = \frac{1 - W / W_{19^0}}{\Theta - 19^0}$$

worin W der auf $n = 0$ reducirte Widerstand der compensirenden Rolle II' ist. Diese Reduction von W_{256} auf W_0 geschah, wie oben, indem für eine Leitungsfähigkeit auch W_{315} gemessen, daraus die Correction für diese und auch für die übrigen Leitungsfähigkeiten berechnet wurde. Eine erste Versuchsreihe gab

Θ	W_{256}	W_0	α
9,06°	97,35	94,91	+ 0,00 396
18,80°	101,10	98,74	− 0,00 388
28,82°	104,85	102,58	

Eine zweite Versuchsreihe gab:

Θ	W_{256}	W_0	α
9,28°	97,60	95,16	+ 0,00 393
19,97°	101,70	99,33	− 0,00 372
29,59°	105,15	102,88	

Als Mittelwerth des Ganzen ergibt sich um 19° herum $\alpha = 0,00387$. Da derselbe für die tieferen Temperaturen etwas zuzunehmen scheint, so habe unten ich als Temperaturcoefficient für die Reduction auf 0° einfach 0,004 angenommen.

V. Messung von Leitungsfähigkeiten.

Bisher gestattet die Methode nur die Leitungsfähigkeit von zwei Metallstücken gleicher Dimension und Form mit einander zu vergleichen. Will man irgend genauere Werthe für die Leitungsfähigkeit erhalten, so kann man zum Vergleich nur Quecksilber nehmen, da die Leitungsfähigkeiten aller anderen Metalle, abgesehen von den schwer zu vermeidenden kleinen Verunreinigungen, durch Differenzen in der Structur Veränderungen bis zu mehreren Procenten erleidet.

Es ist nun erstens schwierig Quecksilbermengen und feste Metalle genau in dieselbe Form zu bringen. Ferner würde die Empfindlichkeit der Methode nicht ausreichen, um zwei Metallmassen so verschiedener Leitungsfähigkeit, wie Quecksilber und die meisten anderen Metalle sie haben, mit einiger Genauigkeit zu vergleichen. Denn nach obigen Formeln p. 325 ist die Einwirkung auf das Selbstpotential der Rolle proportional λ^2. Man muss deshalb schon ziemlich grosse Quecksilbermengen anwenden, um eine genügend starke Einwirkung zu erhalten. Allzugross darf man hingegen die gut leitenden Metallstücke auch nicht nehmen, weil man dann die von n abhängigen Glieder von τ_n zu gross erhält.

Man könnte nun die Einwirkung der Aenderung einer Dimension des Metallstückes z. B. der Dicke bei runden Scheiben, auf τ_n experimentell bestimmen, und dann dicke Quecksilberscheiben mit dünnen Kupferscheiben von demselben Radius vergleichen, ähnlich wie es Oberbeck und Bergmann[1]) gethan haben.

1) l. c. p. 801.

Bei weitem vorzuziehen wäre es jedoch, wenn man ohne Vergleich mit einem anderen Stück direct aus Form und Dimensionen und aus dem beobachteten Werthe von τ_0 auf die Leitungsfähigkeit schliessen könnte.

Dazu muss man

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{\sum\sum \frac{m_{0a}\, m_{0b}\, m_{ab}}{g_a\, g_b}}{\sum \frac{m_{0a}^2}{g_a}}$$

berechnen. Es gelingt dies für die einfachsten Körperformen, Kugel und dünne runde Scheibe, in einem *homogenen Feld.*

Einfluss der Inhomogenität des Feldes.

Das Feld der „quadratischen Rollen", welche benutzt wurden, ist sowohl axial wie radial inhomogen. Es würde nur in dem Falle einen Zweck haben, τ_0 für ein homogenes Feld zu berechnen, wenn diese Inhomogenität des Feldes ohne wesentlichen Einfluss auf τ_0 ist. Dieses soll im Folgenden experimentell nachgewiesen werden.

Dass die axiale Abweichung des Feldes keinen merklichen Einfluss hat, folgt direct aus den obigen Versuchen mit der Quecksilberkugel (p. 325). Die axiale Aenderung des Feldes ist an den Enden der Rolle viel grösser als in der Mitte, wo es sich in einem ziemlich grossen Bereiche nur wenig ändert, d. h. annähernd axial homogen ist. Der Werth von τ_n war auch, als die Kugel 1 cm aus der Rolle herausragte, noch kaum merklich (0,2 Proc.) von dem, als die Kugel sich in der Mitte befand, verschieden. Noch viel weniger merklich kann die Einwirkung der viel geringeren Abweichung des mittleren Feldes von dem homogenen sein.

Nicht so sicher folgt aus den obigen Versuchen mit der Aluminiumscheibe, dass die radiale Inhomogenität ohne Einfluss ist, weil die radiale Aenderung des Feldes nach den Enden der Rolle zu nur sehr gering ist. Da jedoch dieser Beweis eine nothwendige Vorbedingung für das Folgende ist, so muss er noch speciell experimentell geführt werden. Zu diesem Zwecke wurde zuerst untersucht, wie gross der Einfluss sehr starker radialer Abweichungen des Feldes auf τ_n sei.

Als extreme Fälle wurde eine Kupferscheibe einmal in eine ringförmige Rolle, das andere mal auf eine Rolle gelegt, welche nur den halben Durchmesser der Scheibe hatte. Das Feld eines Kreisstromes vom Radius r ist in einem Punkte in der Kreisebene, der um ϱ vom Mittelpunkte entfernt ist, proportional

$$\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\varrho^2}{r^2}\right),$$

also laufen bei weitem mehr Kraftlinien durch den Rand der Scheibe, wie durch die Mitte. In dem anderen Falle laufen alle Kraftlinien durch den mittleren Theil der Scheibe. Es ergab sich eine Differenz von 6,3 Proc für τ_n. Wenn wir das τ_n für ein homogenes Feld als etwa in der Mitte liegend annehmen, so ist die Abweichung für den Ring ca. 3 Proc. Das Feld der quadratischen Rollen nähert sich ganz erheblich mehr einem homogenen, als das eines Ringes, besonders wenn, wie stets im Folgenden, nur der mittlere Theil dieses Feldes bis zu ca. $^4/_5$ des Radius benutzt wird. Somit kann man schon hieraus den Schluss ziehen, dass die Abweichung von τ_n nur Bruchtheile eines Procents betragen kann. Zum exacten Beweis wurde noch folgendes Experiment angestellt:

Helmholtz hat ein annähernd homogenes Feld dadurch erzielt, dass er zwei ringförmige Rollen vom Radius r in die Entfernung r voneinander brachte; dann fallen die quadratischen Glieder in dem Ausdrucke für das magnetische Feld fort und es wird proportional

$$\left(1 - \frac{54}{125} \cdot \frac{\varrho^4}{r^4}\right).$$

Das übrig bleibende Glied vierter Ordnung ist negativ, also ist die übrigbleibende Abweichung vom homogenen Felde der unserer Rollen entgegengesetzt. Man kann nun erstens τ_n für eine Scheibe einmal in dem Helmholtz'schen Felde, das andere mal in einer quadratischen Rolle bestimmen; ist hier die Differenz gering, so ist die gesuchte noch geringer. Ferner kann man die Aenderung von τ_n mit der Aenderung des Feldes direct beobachten, indem man die Rollen einander näher und näher bringt, bis sie einander berühren, also von dem Helmholtz'schen Felde allmählich zu dem einer kurzen annähernd ringförmigen Rolle übergeht.

Das Helmholtz'sche Feld wurde durch zwei sehr kurze Rollen eines Wiedemann'schen Galvanometers hergestellt, deren Radius ca. 6,5 cm betrug. Dazwischen wurde eine Kupferscheibe von 6 cm Radius gebracht, welche knapp in die Rollen hineinpasste. Die erhaltenen Abweichungen sind also erheblich grössere, als bei den späteren Versuchen, wo nur der homogenere mittlere Theil des Feldes benutzt wurde. Ich erhielt $W = 26{,}63$, während ich in einer quadratischen Rolle 26,79 fand. Demnach eine Differenz von ca. $\frac{1}{2}$ Proc.

Bei der allmählichen Näherung der beiden Rollen erhielt ich folgende Werthe für W:

Abstand =	4 cm	3,5 cm	3,00 cm	2,5 cm	2,0 cm
W =	26,51	26,62	26,75	26,89	27,03

Aus beidem folgt, dass die geringe Abweichung des Feldes quadratischer Rollen von dem homogenen nur einen sehr kleinen Einfluss auf den Werth von τ_n hat, welcher 0,3 Proc. kaum überschreiten dürfte.

Im Folgenden werden wir in den speciellen Fällen durch Vergleich der für ein homogenes Feld berechneten und für das Feld quadratischer Rollen experimentell gefundenen Werthe von τ_n die Möglichkeit erhalten, diesen Einfluss direct festzustellen und gleichzeitig die kleine Correction in den Zahlenconstanten der berechneten Formeln für τ_n vorzunehmen, damit sie statt für ein homogenes Feld für das quadratischer Rollen gelten.

Kugel.

Die Theorie einer leitenden Kugel in einem homogenen periodischen Felde ist vollständig von Oberbeck[1]) gegeben, und zwar findet derselbe, dass „durch die Anwesenheit der Kugel das Magnetfeld so verändert wird, als ob im Centrum derselben ein kleiner Magnet sich befände, dessen Axe mit den Kraftlinien zusammenfällt, dessen Moment periodisch veränderlich ist. Doch ist die Phase desselben verschieden von der Phase der Aenderungen des ursprünglichen Feldes". Das magnetische Potential der Kugel auf einen Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte r mit der Richtung der Kraftlinien den Winkel ϑ einschliesst, findet Oberbeck als:

1) Oberbeck, Wied. Ann. **31.** p. 824. 1887.

$$P = -\frac{\cos\vartheta}{r^2}(g_1 \cos n t + h_1 \sin n t),$$

worin g_1 und h_1 Functionen von λ, n und R, dem Radius der Kugel, sind.

Unsere Grösse τ_n folgt unmittelbar daraus als $\tau_n = g_1 / n h_1$, und berechnet sich aus den von Oberbeck angegebenen Reihenentwickelungen als:

$$\tau_n = 1{,}197\,\lambda\,.\,R^2\{1 - (4\pi\lambda n R^2)^2\,5{,}764\,.\,10^{-4} + (4\pi\lambda n R^2)^4\,7{,}21\,.\,10^{-7} - \ldots\}.$$

oder indem $\tau_0 = 1{,}197\,.\,\lambda\,.\,R^2$ eingeführt wird:

$$\tau_n = \tau_0\{1 - (n\tau_0)^2\,.\,0{,}0635 + (n\tau_0)^4\,.\,0{,}0094 - \ldots\}.$$

Es gilt, diese Formel experimentell zu verificiren. Zu diesem Zwecke kann allein Quecksilber genommen werden, weil bei allen übrigen Metallen die Leitungsfähigkeit unsicher ist.

Nach obiger Formel darf $\tau_0 n$ nicht viel grösser als $^1/_2$ sein, da sonst das Glied vierter Ordnung über unsere Fehlergrenze 1 $^0/_{00}$ steigt. Daraus berechnet sich R für $n = 256\,.\,2\pi$ und $\lambda = 1{,}046\,.\,10^{-5}$ cm^{-2} sec (Quecksilber bei 18^0 C.).

$$R = \sqrt{\frac{1}{2\,.\,1608\,.\,1{,}197\,.\,1{,}046\,.\,10^{-5}}} = 4{,}99 \text{ cm}.$$

Ich füllte daher zwei Glaskugeln, eine von ca. 4 cm, die andere von ca. 5 cm Radius, die möglichst kugelförmig geblasen waren, mit gewaschenem und im Vacuum destillirtem Quecksilber. Kleine Abweichungen von der Kugelform haben hier einen ebenso geringen Einfluss, wie etwa kleine Abweichungen einer Capillare von der genau cylindrischen Form: es kommt hauptsächlich auf den richtigen Mittelwerth an.

Von diesen Quecksilberkugeln musste nun der Radius, τ_0 und das quadratische Glied von τ_n experimentell bestimmt werden, um die obige Formel zu prüfen.

Die Bestimmung des Radius geschah nach drei Methoden:

I. Durch Wägung des Quecksilbers. Diese Methode hat den Vorzug, dass sie einen Mittelwerth liefert, den Nachtheil, dass man wegen des Ansatzrohres der Kugel nicht wissen kann, wann die Kugel ganz gefüllt ist.

II. Durch Messung des Umfanges mit Papierstreifen, die an einer Stelle mit einer feinen Nadel durchbohrt wurden; es

musste hierbei die Dicke des Papierstreifens (0,075 mm) von dem gefundenen Radius abgezogen werden.[1])

III. Indem die Kugeln zwischen zwei Spitzen gebracht wurden, deren Entfernung mit dem Comparator gemessen wurde.

Bei II. und III. misst man den äusseren Umfang der Kugel; es muss daher die mittlere Dicke der Glaswand von dem Radius abgezogen werden. Die Dicke der Glaswand erwies sich als ziemlich verschieden und die Werthe schwankten

bei der kleineren Kugel zwischen 0,30 und 0,65 mm, Mittel 0,47 mm
„ „ grösseren „ „ 0,45 „ 0,65 „ „ 0,55 „

Hierin dürfte der grösste Fehler der beiden letzten Bestimmungsweisen liegen. Die Gefässe waren übrigens ziemlich genau kugelförmig, da die einzelnen Messungen nach II. und III. keine Differenzen über $^1/_2$ Proc. ergaben.

Ich erhielt folgende Mittelwerthe:

	Wägung	Papierstreifen	Spitzen	Mittel
Kugel 1	3,841	3,839	3,852	3,844 cm
Kugel 2	4,950	4,938	4,944	4,944 „

Zur Bestimmung von τ_n wurden die Kugeln in die Rolle *A* gebracht (ca. 14 cm Durchmesser). Der Einfluss der unsicheren Füllung der Kugeln, welcher oben bei der Bestimmung des Radius durch Wägung störte, war hier zu vernachlässigen, weil die Oeffnung der Kugel naturgemäss nach oben gerichtet war. In dem Quecksilber, was dort zu viel, resp. zu wenig ist, laufen nur schwache Ströme von kleinem Radius, die nur eine sehr geringe Wirkung haben können. Eine Hinzufügung von 1 Proc. Quecksilber gab eine Aenderung von τ_n von kaum 1 $^0/_{00}$.

Für die kleinere Kugel 1 erhielt ich bei drei verschiedenen Versuchen als einzuschaltenden Rheostatenwiderstand:

219,2 Siem. 218,2 Siem. 218,5 Siem. Mittel 218,63 = 205,7 Ω.

Dazu der Widerstand der compensirenden Rolle *II'* selbst: + 10,90 Ω = 216,6 Ω. Hieraus $\tau_n = \tau_2 = P / W$

$$\tau_n = \frac{3,999 \,.\, 10^{+7}\ \text{cm}}{216,6 \,.\, 10^9\ \text{cm sec}^{-1}} = 1,8385 \,.\, 10^{-4}\ \text{sec}.$$

1) Heydweiller, Absol. Strommessung. p. 17. Inauguraldissert. Würzburg 1886.

Nach der obigen Formel mit Hülfe des gefundenen Werthes von $R = 3{,}844$ cm und der Leitungsfähigkeit des Quecksilbers, welches $19{,}5^0$ C. besessen hatte, berechnet:

$$\tau_n = 1{,}8378 \,.\, 10^{-4} \text{ sec}$$

in sehr guter Uebereinstimmung.

Für die grössere Kugel 2 wurde gleichzeitig das quadratische Glied q bestimmt, indem abwechselnd mit $n = 256 \,.\, 2\pi$ und $n = 315 \,.\, 2\pi$ Einstellungen gemacht wurden. Es war hier die einzelne Nulleinstellung erheblich sicherer, wie bei der kleineren Kugel und es konnte daher hier q mit einiger Sicherheit ermittelt werden.

Ich erhielt der Reihe nach folgende Werthe für den Rheostatenwiderstand:

$n/2\pi = 256$	315	256	315	256
129,2 Siem.	130,35	129,3	130,4	129,2

Die Lufttemperatur war ebenso wie die des Quecksilbers bei diesem Versuche 18^0 C. Demnach der Widerstand der Rolle II' selbst $= 11{,}85\ \Omega$. Also $W_{256} = 133{,}42\ \Omega$, $W_{315} = 134{,}46\ \Omega$. Hieraus

$$q = \frac{2 \,.\, (W_{256} - W_{315})}{W_0} = \frac{2 \,.\, 1{,}04}{131{,}84} = 0{,}0154.$$

Es folgt also $\tau_n = 2{,}998 \,.\, 10^{-4}$ sec, $\tau_0 = 3{,}045 \,.\, 10^{-4}$ sec. Die Berechnung nach obiger Formel gibt

$$\tau_n = 3{,}008 \qquad \tau_0 = 3{,}055 \qquad q = 0.0156.$$

Die Differenz von etwa 0,3 Proc. zwischen Rechnung und Versuch übersteigt die hier sehr kleinen Fehlergrenzen und rührt von der Inhomogenität des Feldes her, welche wie die obigen Versuche ergeben, τ_n etwas verkleinert. Bei der kleineren Kugel fand sich diese Differenz nicht; erstens weil das Feld dort verhältnissmässig homogener ist und dann weil die Einstellungsfehler dort grösser waren ca. 0,3 — 0,4 Proc., so dass dieselben die Differenz verdecken können.

Aus den Resultaten mit Kugel 2 ergibt sich für τ_n statt des berechneten Ausdruckes:

$$\tau_n = 1{,}197 \,.\, R^2 \lambda \left(1 - (4\pi\lambda_n R^2)^2\, 5{,}76 \,.\, 10^{-4}\right)$$

die Form:

$$\tau_n = 1{,}194\, R^2 \lambda \left(1 - (4\pi\lambda_n R^2)^2\, 5{,}6 \,.\, 10^{-4}\right).$$

Die letztere ist offenbar für das Feld unserer quadratischen Rollen die richtigere und eventuell zu benutzen.

Ich habe es bisher vermieden für τ_0 nach Analogie mit einer Rolle oder einem Ring den Ausdruck „Relaxationszeit“ oder „Zeitconstante“ zu gebrauchen aus folgendem Grunde:

Wir haben oben gesehen, dass der Werth von τ_0 von dem Feld abhängig ist d. h. abhängig davon, wie die Stromintensität in dem Metallstück vertheilt ist. Je mehr die Kraftlinien und damit die Intensität nach dem Rande zunehmen, desto kleiner wird τ_0.

Nun haben Niven[1]) und Lamb[2]) die Zeitconstante einer Kugel berechnet und sie definirt als die längste Zeit, in welcher ein Strom von der Intensität 1 auf die Intensität $1/e$ herabsinkt.

Im homogenen Feld ist, wie aus den Versuchen mit dem Hemholtz'schen Feld (p. 331) sich ergibt, τ_0 nicht ein Maximum, sondern es nimmt noch zu, wenn die Kraftlinien in der Mitte des Metallstückes enger verlaufen, wie an dem Rande.

Demnach muss die von Niven und Lamb berechnete Zeitconstante grösser sein, wie unser τ_0. Sie fanden $\tau = (4/\pi) R^2 \lambda = 1,273 R^2 \lambda$ also um über 6 Proc. grösser als τ_0. Es sind dies daher verschiedene Grössen, die nicht mit demselben Namen bezeichnet werden dürfen.

Die Form der Kugel hat den Vorzug, dass die Theorie vollständig klar liegt und dass man den Radius — wenigstens bei festen Metallen — ohne Längenmessung durch Gewicht und specifisches Gewicht feststellen kann; sie hat den grossen Nachtheil, dass Kugeln technisch schwer herzustellen sind. Ich habe deshalb auch nur mit zwei Quecksilberkugeln Versuche angestellt, was zur genauen experimentellen Feststellung der Constanten nicht genügen würde.

Viel leichter auf jeder Drehbank herzustellen, wenn auch die Theorie sich bei ihnen nicht so weit durchführen lässt, sind *runde Scheiben.*

---

1) Niven, Phil. Tr. **172.** p. 307. 1882.

2) Lamb, Proc. Roy. Soc. **35.** p. 130—32. 1883.

Runde Scheiben.

$$\tau_0 = \lambda \cdot \frac{\sum_a \sum_b \frac{m_{0a}\, m_{0b}\, m_{ab}}{g_a\, g_b}}{\sum_a \frac{m_{0a}^2}{g_a}}$$

lässt sich für *dünne* runde Scheiben in folgender Weise berechnen. Die Dicke der Scheibe D sei so klein, dass die Intensität innerhalb derselben als constant angesehen werden kann. Dann brauche ich mir nur die Scheibe durch concentrische Kreise in unendlich dünne Ringe zerschnitten zu denken und für diese τ_0 zu berechnen. Ueber alle diese Ringe ist zu summiren d. h. von $0 - R$ zu integriren, wenn R der Radius der Scheibe ist.

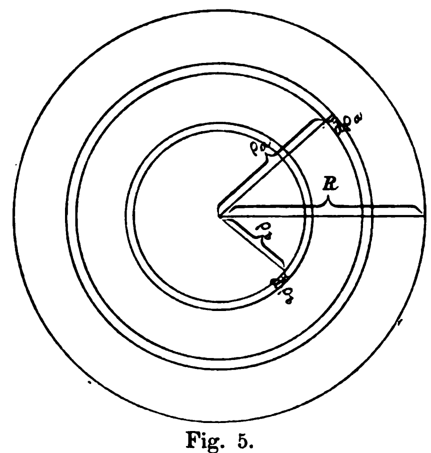


Fig. 5.

Für einen beliebigen Ring mit dem Radius ϱ_a und der Breite $d\varrho_a$ (vgl. Fig. 5) ist:

$$g_a = \lambda\, w_a = \frac{2\pi\,\varrho_a}{D \cdot d\varrho_a}$$

m_{0a} ist für ein homogenes Feld proportional ϱ_a^2 also: $m_{0a} = C \cdot \varrho_a^2$.

Für einen beliebigen anderen Ring ϱ_b ist ebenso:

$$g_b = \frac{2\pi\,\varrho_b}{D\, d\varrho_b} \qquad m_{0b} = C \cdot \varrho_b^2$$

m_{ab}, der gegenseitige Inductionscoefficient von zwei Kreisströmen ist nach Maxwell: [1])

1) Maxwell, Electr. and Magn. II. § 704. Diese Formel gilt streng für die gegenseitige Induction von zwei Kreisströmen, deren Abstand klein ist gegen den Radius. Für grössere Abstände treten Correctionsglieder hinzu. Bei den Scheiben geht, wie oben auseinandergesetzt, die bei weitem grösste Wirkung von den dem Rande benachbarten Strömen aus. Bei diesen ist die Bedingung: Abstand klein gegen Radius gewahrt. Der mittlere Theil der Scheibe hat nur eine geringe Wirkung. — Die Correctionsglieder, welche hier eigentlich hinzugefügt werden müssten,

$$m_{ab} = 4\pi\varrho_a\left(ln\,\frac{8\varrho_a}{\varrho_a-\varrho_b} - 2\right) = 4\pi\varrho_a\left(ln\,\frac{\varrho_a}{\varrho_a-\varrho_b} + 0{,}083\right)$$

Es ist also:

$$\tau_0 = \lambda\,.\,\frac{\sum\sum\frac{m_{0a}\,m_{0b}\,m_{ab}}{g_a\,g_b}}{\sum\frac{m_{0a}^2}{g_a}} = \lambda\,.\,\frac{\int\limits_0^R\int\limits_0^R\frac{C\varrho_a^2\,.\,C\varrho_b^2\,.\,4\pi\varrho_a\left(ln\frac{\varrho_a}{\varrho_a-\varrho_b}+0{,}083\right)}{\frac{2\varrho_a\pi}{D\,.\,d\varrho_a}\,.\,\frac{2\varrho_b\pi}{D\,.\,d\varrho_b}}}{\int\limits_0^R\frac{\frac{C^2\varrho_a^4}{2\pi\varrho_a}}{D\,.\,d\varrho_a}}$$

$$\tau_0 = \frac{2\,.\,D\,.\,\lambda\int\limits_0^R d\varrho_a\,\varrho_a^2\int\limits_0^R d\varrho_b\,.\,\varrho_b\,ln\,\frac{\varrho_a}{\varrho_a-\varrho_b} + 0{,}166\,D\,\lambda\int\limits_0^R d\varrho_a\,.\,\varrho_a^2\int\limits_0^R d\varrho_b\,.\,\varrho_b}{\int\limits_0^R\varrho_a^3\,d\varrho_a}$$

Der Nenner und das zweite Glied des Zählers lassen sich ohne weiteres integriren und es wird:

$$\tau_0 = \frac{8\,.\,D\,.\,\lambda}{R^4}\int\limits_0^R d\varrho_a\,.\,\varrho_a^2\int\limits_0^R\varrho_b\,ln\frac{\varrho_a}{\varrho_a-\varrho_b}\,d\varrho_b + 0{,}111\,.\,D\,.\,R\,.\,\lambda\,.$$

Auch das erste Glied ist infolge der einfachen Grenzen integrabel und gibt:

$$\int\limits_0^R\varrho_a^2\,d\varrho_a\int\limits_0^R\varrho_b\,ln\frac{\varrho_a}{\varrho_a-\varrho_b}\,d\varrho_b = \frac{1}{2}\int\limits_0^R d\varrho_a\left\{\varrho_a^2(R^2-\varrho_a^2)\,ln\frac{\varrho_a}{\varrho_a-R} + \varrho_a^2\,R\left(\varrho_a+\frac{R}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{R^5}{4}$$

Hieraus

$$\tau_0 = 2RD\lambda + 0{,}111\,.\,R\,.\,D\,.\,\lambda = 2{,}111\,.\,R\,.\,D\,.\,\lambda.$$

Lamb[1]) hat auch für dünne runde Scheiben die „Zeitconstante"

sind als kleine Aenderungen kleiner Grössen sehr klein. Dieselben vergrössern den Werth der gegenseitigen Induction, demnach ist das ohne sie berechnete, τ_0 etwas zu klein.

1) Lamb, Proc. Roy. Soc. 42. p. 289—96. 1887.

berechnet, wieder mit derselben Definition wie bei der Kugel. Er behandelt die Scheiben als Specialfall eines Rotationsellipsoids, dessen eine Axe sehr klein wird, und erhält:

$$\tau = 2{,}26\,.\,R\,.\,D\,.\,\lambda.$$

Wenn wir hier den Zahlenwerth wieder, wie bei der Kugel, als um 6,3 Proc. zu gross annehmen, so erhalten wir $\tau_0 = 2{,}118\,.\,R\,.\,D\,.\,\lambda$ in guter Uebereinstimmung mit dem oben berechneten Wert, der, wie gesagt, in Folge Vernachlässigung von Correctionsgliedern etwas zu klein sein kann. Jedoch sind natürlich beide Werthe unsicher. Sicherheit kann nur das Experiment geben.

Lamb berechnet ferner den Einfluss der Dicke der Scheibe in erster Annäherung als $\tau = 2{,}26\,.\,R\,.\,D\,.\,\lambda\ (1 - (D\,/\,R))$. Bei kleinerer Dicke habe ich dies mit dem Versuch in Uebereinstimmung gefunden; bei grösserer Dicke reicht die Formel nicht aus; ich fand jedoch vollständige Uebereinstimmung des Experimentes mit der sehr ähnlichen Formel:

$$\tau_0 \text{ prop. } \frac{\lambda\,.\,D\,.\,R}{1 + 0{,}94\,D\,/\,R}.$$

Der Einfluss der Dicke ist hier offenbar von der grössten Wichtigkeit, weil man besonders bei schlecht leitenden Metallen nicht immer ganz dünne Scheiben nehmen kann.

Ehe ich zu den Versuchen zur Prüfung der Formel überging, wurde vorweg der Einfluss des quadratischen Gliedes von τ_n für runde Scheiben bestimmt. τ_n sei, wie bei der Kugel, in der Form dargestellt:

$$\tau_n = \tau_0\,(1 - (n\,\tau_0)^2\,a_1 + (n\,\tau_0)^4\,a_2\ldots).$$

Hierin sind a_1, $a_2\ldots$ reine Zahlen und können demnach nur von der Form des Metallstückes abhängig sein. Im Falle einer runden Scheibe wäre also eine Abhängigkeit von $D\,/\,R$ möglich. Eine solche habe ich nicht entdecken können, obgleich ich dies Verhältniss sehr variirt habe. Als dünne Scheiben wurden Kupferscheiben, als dicke Quecksilberscheiben benutzt, die, da es hier auf die genaue cylindrische Form noch nicht ankam, einfach dadurch hergestellt wurden, dass Quecksilber in runde Glasgefässe gegossen wurde. Zur Bestimmung von a_1 wurde wieder τ_n für $n = 256\,.\,2\,\pi$ und $315\,.\,2\,\pi$ gemessen. Einige Zahlen seien hier angeführt.

	R.	*D.*	*R/D*	a_1
Cu-Scheibe	5,5	0,2	27,5	0,072
Hg „	9	1,9	4,7	0,079
„	6	3,5	1,7	0,076
„	6	5,0	1,2	0,073
			Mittel	0,075

Die Abweichungen vom Mittelwerth sind durchaus innerhalb der Fehlergrenzen und nicht eine Richtung vorherrschend. Ein Fehler von 5 Proc. bei q, bewirkt einen Fehler von höchstens $1\,^0/_{00}$ bei τ_n (je nach dem Werth von $\tau_0\,n$). Demnach kann für alle runden Scheiben, unabhängig von D/R, die Formel gelten:

$$\tau_n = \tau_0 \{ 1 - 0{,}075\,(\tau_0\,n)^2 \}$$

oder, da man τ_n beobachtet und τ_0 sucht:

$$\tau_0 = \tau_n \{ 1 + 0{,}075\,(\tau_n\,n)^2 + 0{,}017\,(\tau_n\,n)^4 \}.$$

Im Folgenden sind alle Beobachtungen nur für eine Schwingungsdauer (256) gemacht und τ_0 nach obiger Formel berechnet.

Zur Prüfung der Formeln konnte auch hier nur Quecksilber benutzt werden, wie bei den Kugeln.

Das Quecksilber wurde in aus Holz gedrehte Hohlräume gegossen; deren Durchmesser wurde mit dem Comparator gemessen, und bei dem einen Gefäss zu 8,84 cm, bei dem anderen zu 6,07 cm bestimmt. Die Dicke der Scheiben wurde durch das Gewicht festgestellt.

Die Capillarität konnte insofern eine Fehlerquelle bilden, als infolgedessen der Rand der Scheibe zu dünn, die Mitte zu dick ist. Die beiden Wirkungen hiervon heben sich nicht auf, da die mittleren Theile einen viel geringeren Einfluss haben als der Rand. Es musste also noch der Einfluss der Capillarität bestimmt werden. Es geschah dies, indem eine Sublimatlösung auf die Quecksilberscheibe gegossen wurde; dadurch wird nach Bunsen[1]) die Capillarität grösstentheils aufgehoben. Die Differenz von τ_0 mit und ohne Sublimat gemessen, gibt daher den grössten Theil des Fehlers. Ich erhielt bei einer dünnen Scheibe (2 der folgenden Tabelle) mit Sublimat: $W = 337{,}3\ \Omega$, ohne: $W = 338{,}1$, also $2{,}2\,^0/_{00}$ Differenz. Ein

1) Bunsen, Gasometrische Methoden. p. 36. Braunschweig 1857.

anderer Versuch gab 1,8 ‰. Die entstehende dünne Haut von Quecksilberchlorür erwies sich durch Wägung als belanglos. Da nicht die ganze Wirkung der Capillarität durch die Sublimatlösung aufgehoben wird, nahm ich dieselbe bei dieser Scheibe als 0,3 Proc. an, und gleichzeitig, dass dieselbe proportional Radius und Dicke abnimmt. Bei dickeren Scheiben fällt demnach die Correction für die Capillarität durchaus in die Fehlergrenzen.

In der folgenden Tabelle bedeutet R den Radius der Scheiben, D die durch Wägung bestimmte Dicke, W_n den beobachteten Widerstand der compensirenden Rolle II', τ_0 aus $\tau_n = P / W_n$ nach obiger Formel berechnet, wobei die kleine Correction für Capillarität hinzugefügt ist, Θ die Temperatur des Quecksilbers und x den Zahlencoefficienten, welcher oben als 2,111 resp. 2,118 berechnet ist. Hier ist derselbe aus den Versuchen nach der Formel:

$$\tau_0 = \frac{x \,.\, \lambda \,.\, R \,.\, D}{1 + 0{,}94\, D / R}$$

oder

$$x = \frac{\tau_0 (1 + 0{,}94\, D / R)}{\lambda \,.\, R \,.\, D}$$

berechnet. λ ist die Leitungsfähigkeit von Quecksilber bei der Temperatur Θ nach der Formel

$$\lambda_\Theta = 10^{-5} \,.\, 1{,}0461 \{1 - 0{,}0099 (\Theta - 18^0)\}$$

berechnet, wobei $\lambda_{0^0} = 1{,}063$ angenommen wurde und λ_{18} zu $1{,}0461 \,.\, 10^{-5}$ nach den von Kreichgauer und Jäger[1]) gegebenen Zahlen berechnet wurde.

R = 8,84 cm.

	D	D / R	W_n	τ_0	Θ	x
1.	0,512 cm	0,058	425,0 Ω	0,9457 . 10^{-4} sec	18°	2,105
2.	0,653 „	0,074	338,1 „	1,190	18°	2,108
3.	0,805 „	0,091	279,3 „	1,442	18,5°	2,102
4.	1,022 „	0,115	224,8 „	1,794	18°	2,103
5.	1,248 „	0,141	187,9 „	2,151	18°	2,109

Mittel von x = 2,1054 ± 0,0016.

1) Kreichgauer u. Jäger, Wied. Ann. 47. p. 513. 1892.

$R = 6{,}07$ cm.

	D	D/R	W_n	τ_0	Θ	x
6.	1,011 cm	0,167	341,5 Ω	1,1773 . 10^{-4}sec	16,5°	2,118
7.	1,981 „	0,326	198,4 „	2,035	17,5°	2,113
8.	2,954 „	0,487	149,1 „	2,722	17,5°	2,115
9.	3,879 „	0,639	125,4 „	3,259	18°	2,118
10.	4,893 „	0,806	110,0 „	3,738	18°	2,117

Mittel von $x = 2{,}1162 \pm 0{,}0012$.

Die beiden Versuchsreihen stimmen in sich gut, haben jedoch eine Differenz der Mittelwerthe von ca. 0,5 Proc. Dieselbe rührt daher, dass die grosse Rolle B nicht quadratisch war, sondern die Länge nur ca. 14 cm betrug, während der Durchmesser 22 cm war. Das Feld näherte sich daher mehr dem eines Ringes und musste einen zu kleinen Werth für τ_0 geben (vgl. p. 331). Uebrigens ist die verhältnissmässig kleine Differenz ein neuer Beweis für den geringen Einfluss des Feldes.

Zur Feststellung von x für ein quadratisches Feld wurde daher nur die zweite Versuchsreihe benutzt, welche ausserdem die Vorzüge hat, dass 1. wegen der grösseren Dicke der Scheiben die Capillarität keinen merklichen Einfluss mehr hat und 2. aus demselben Grunde eventuelle Messungsfehler oder Abweichungen im Radius nur einen viel kleineren Fehler bei der Bestimmung von τ_n verursachen, wie bei dünneren Scheiben, was sogleich weiter unten bewiesen werden soll.

Wir erhalten demnach als Schlussformel für die absolute Messung der Leitungsfähigkeit von Metallscheiben mit Hülfe quadratischer Rollen:

$$\lambda = \frac{\tau_0 (1 + 0{,}94\, D / R)}{2{,}116 \,.\, R \,.\, D}.$$

Die Formel stimmt für dünnere Scheiben genügend mit den theoretischen Werthen überein, und ist für dicke Scheiben bis $R = D$ durch die obigen Versuche bewiesen.

Bei den Anwendungen ist die nothwendige Längenmessung im allgemeinen die grösste Fehlerquelle. Durch Gewicht und specifisches Gewicht erhält man nur das Volumen, eine der Dimensionen muss daher durch directe Messung festgestellt werden. Dies ist bis auf 1 Proc. sehr leicht, schwierig jedoch

bis auf unsere Fehlergrenze von 1 $^0/_{00}$, da es wegen der auch bei sorgfältigster Bearbeitung unvermeidlichen kleinen Abweichungen im Radius schwer hält, den richtigen Mittelwerth zu bekommen. Viel günstiger wäre es, λ allein aus electrischer Messung und Wägung zu erhalten.

Es gilt also einen solchen Werth von D/R zu finden, wo bei gegebenem Volumen τ_0 möglichst wenig abhängig von D/R oder, da das Volumen gegeben, von R ist. Man hat dafür die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial\left(\frac{R \cdot D}{1+0,94\,D/R}\right)}{\partial R} = 0 \quad \text{nnd} \quad R^2 D = \text{const.}$$

Wenn man $D = C/R^2$ in die erste Gleichung einsetzt, erhält man: $R^3 = 1,88\,C$. Dies in $R^2 D = C$ eingesetzt, gibt:

$$D = \frac{R}{1,88} = 0,532\,R.$$

Wenn wir diesen Werth in unsere Formel für λ einführen, so wird:

$$\lambda = \frac{1,877 \cdot \tau_0}{V^{2/3}} = 1,877 \cdot \tau_0 \left(\frac{s}{G}\right)^{2/3} \text{sec.cm}^{-2},$$

worin V das Volumen, s das specifische und G das Gewicht der Metallscheibe bedeuten.

Um den Werth $D/R = 0,532$ herum ist τ_0 in weiten Grenzen merklich unabhängig von D/R. Eine Aenderung in diesem Verhältniss von 10 Proc. ändert τ_0 nur um 0.1 Proc., sodass hier eine ganz rohe Annäherung genügt. Bei den folgenden Beispielen ist meist nicht diese Form der Scheiben angewendet, theils um die Versuchsbedingungen möglichst zu variiren, theils auch, weil die Messungen ausgeführt wurden, ehe die Vorzüge dieser speciellen Form erkannt waren.

Indem ich zuerst auf die schon oben beim Vergleich von Leitungsfähigkeiten erwähnten Scheiben aus verschiedenen Metallen zurückgreife, wurde jetzt hier λ direct gemessen, indem τ_0 aus dem beobachteten τ_n berechnet wurde und aus τ_0, R und D, welche vorher gemessen waren, λ bestimmt wurde. Die Temperatur war während der obigen 3 Versuchsreihen (p. 326) langsam von 15,9° auf 16,2° gestiegen; λ_0 wurde aus λ_{16^0} berechnet, indem als Temperaturcoefficient 0,004 angenommen wurde. In der folgenden Tabelle sind in der letzten Columne

die von Matthiessen gefundenen Werthe angegeben. Die vorhandenen Abweichungen rühren von Structurdifferenzen und Unreinheiten der Metalle her. Auffallend ist der hohe Werth für die Leitungsfähigkeit von Aluminium.

	R (cm)	D (mm)	W_{256}	τ_{256}	τ_0	λ_{16^0}	λ_{0^0}	M
Kupfer	2,752	2,01	23,64 Ω	5,665 . 10^{-4} sec.	6,078	55,50	58,82	62,0
Aluminium	2,773	2,02	35,90 „	3,740	3,852	34,72	36,80	34,8
Zink	2,770	2,02	75,38 „	1,780	1,787	16,13	17,10	18,01
Zinn	2,770	2,05	142,0 „	0,946	0,9472	8,23	8,734	7,66
Blei	2,780	2,04	237,1 „	0,566	0,5664	5,046	5,351	5,15

Die folgende Tabelle giebt die Resultate von Messungen der Leitungsfähigkeit einer Anzahl von *Kupfersorten.* Die meisten derselben, bis auf Nr. 7, waren *electrolytisches Kupfer*, welches mir von der Firma Hesse & Söhne in Heddemheim freundlichst zur Verfügung gestellt wurde. Nr. 1—4 war gewalztes Kupferblech, 2, 3 und 4 waren aus ein und demselben Stück herausgeschnitten. 4 hatte einen viel kleineren Radius, wie 2 und 3 und wurde in einer anderen Rolle und mit einer anderen compensirenden Rolle *II'* untersucht. Nr. 5 und 6 waren dickere Scheiben, welche aus der gegossenen Kupfermasse herausgedreht waren. Nr. 7 war ein Stück reinen, sehr dünnen Kupferblechs, welches sich hier im Institut vorfand. Der Radius der Scheiben wurde mit dem Comparator gemessen, die Dicke durch Gewicht und specifisches Gewicht bestimmt. Letzteres ist auch unter S in der folgenden Tabelle angegeben.

Nr.	R (m)	D (mm)	s	τ_{256}	τ_0	Θ	λ_Θ	λ_0
1	9,06	0,0911	8,89	0,9770	0,979	20°	56,09	60,54 . 10^{-5} sec. cm^{-2}
2	6,255	0,484	8,87	3,562	3,658	19°	57,52	61,89
3	6,20	0,478	8,90	3,489	3,579	19°	57,49	61,85
4	2,95	0,521	8,91	1,834	1,846	17,5°	57,74	61,75
5	2,902	1,64	8,93	5,378	5,701	16,5°	59,62	63,43
6	2,900	1,62	8,92	5,316	5,630	16,5°	59,60	63,41
7	9,05	0,0427	8,90	0,4534	0,4535	20°	55,46	59,87

Die hohen Werthe für λ_0 sind ein Beweis für die Reinheit des Kupfers. Die Leitungsfähigkeit ist die grösste bei den Scheiben 5 und 6, die direct aus der gegossenen Kupfermasse herausgedreht waren. Es stimmt dies mit anderen Be-

obachtungen überein; so findet **Matthiessen** für ausgezogenes Kupfer 62,0, für geglühtes Kupfer 63,5, ähnlich andere.

Die Uebereinstimmung von 2 und 3 mit 4, wo, wie gesagt, ein ganz anderes Rollensystem benutzt wurde, ist ein Beweis für die Exactheit der Methode.

Um schliesslich noch ein Beispiel für die Formel:

$$\lambda = 1{,}877 \,.\, \tau_0 \,.\, \left(\frac{s}{G}\right)^{2/3}$$

zu bringen wurde die Leitungsfähigkeit von $^1/_2$ und 1 Proc. Zinkamalgam in der Weise festgestellt, dass so viel Quecksilber in das Holzgefäss 2 (pag. 339) gegossen wurde, dass annähernd $D/R = 0{,}532$ war; hierzu waren etwa 5000 gr nothwendig. Dann wurden die abgewogenen Zinkmengen in kleinen Stücken hinzugefügt. Die hierdurch entstehende Aenderung von D/R war, wie oben auseinandergesetzt, belanglos. Die specifischen Gewichte wurden durch Pyknometerwägungen bestimmt. In der folgenden Tabelle giebt die erste Columne das Gewicht des Zinks an, die zweite das des Quecksilbers, die dritte das Gesammtgewicht, die vierte das specifische Gewicht, die vorletzte das Verhältniss der Leitungsfähigkeit des Amalgams zu der von Quecksilber derselben Temperatur, die letzte die von Matthiessen[1]) für dieselbe Grösse gefundenen Werthe an:

G_{Zn}	G_{Hg}	G_{Hg+Zn}	s	W_n	λ_0	Θ	$\frac{\lambda_{Am}}{\lambda_{Hg}}$	M
0	5000,3	5000,3	13,56	141,9	1,0454[2])	18,5°	1	1
25,0	5000,3	5025,3	13,52	131,6	1,1246	18,7°	1,075	1,072
50,0	4994,0	5044,0	13,49	123,6	1,1955	19,0°	1,143	1,141

Schluss. Es seien noch einmal die Principien der Methode zusammengestellt.

Ein Wechselstrom durchfliesst eine Wheatstone'sche Brückencombination, deren Zweige *1* und *2* aus Inductions-

1) Matthiessen, Pogg. Ann. **116.** p. 369. 1862.

2) Hieraus berechnet sich λ_{0^0} für Quecksilber zu 1,0628. Die genaue Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem oben angenommenen 1,063 darf nicht auffallen, da mit letzterem Werthe bei derselben Versuchsanordnung die Zahlenconstanten gewonnen wurden, mit welchen jetzt der erste Werth berechnet wurde. Es liegt also gewissermaassen ein Zirkelschluss vor.

rollen bestehen. Die Brücke ist im Gleichgewicht ($p_1 : p_2 = w_1 : w_2 = w_3 : w_4$). Die durch Näherung eines Metallstückes hervorgerufene Störung der Inductionsrolle *I* wird dadurch compensirt. dass der Rolle *II* eine dritte Rolle *II'* genähert wird, die durch einen Rheostat geschlossen ist. Verschwindet der Strom im Brückenzweige, so ist $\tau_n = \tau_2$ der Zeitconstante der compensirenden Rolle *II'*. Da Selbstpotential und Widerstand der Rolle *II'* ein für allemal gemessen sind, erhält man $\tau_n = \tau_2$ einfach durch Ablesung des Rheostatenwiderstandes.

Theoretisch lässt sich ableiten, dass $\tau_n = \lambda (A + n^2 \lambda^2 B)$ sein muss. Durch Aenderung von n erhält man $\tau_0 = \lambda A$, also eine Grösse, die der Leitungsfähigkeit des Metallstückes proportional ist.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Leitungsfähigkeit zweier gleicher Metallstücke zu vergleichen. Sie brauchen nicht immer genau an dieselbe Stelle der Rolle gebracht zu werden, da sich τ_n innerhalb der Rolle nicht merklich ändert.

Für Kugeln und runde Scheiben in dem annähernd homogenen Felde quadratischer Rollen lässt sich λ direct aus τ_n berechnen, d. h. absolut messen; und zwar ist bei guter Uebereinstimmung von Theorie und Experiment:

Für eine Kugel:

$$\tau_0 = \tau_n \{1 + 0{,}0635\,(n\,\tau_n)^2 + 0{,}0017\,(n\,\tau_n)^4\}$$

$$\lambda = \frac{\tau_0}{1{,}194\,R^2} = \frac{2{,}176\,\tau_0}{V^{2/3}} = 2{,}176\,.\,\tau_0 \left(\frac{s}{G}\right)^{2/3},$$

für eine runde Scheibe:

$$\tau_0 = \tau_n \{1 + 0{,}075\,(n\,\tau_n)^2 + 0{,}017\,(n\,\tau_n)^4\}$$

$$\lambda = \frac{\tau_0\,(1 + 0{,}94\,D/R)}{2{,}116\,.\,R\,.\,D}.$$

Hat die runde Scheibe annähernd (bis auf 10 Proc.) die Form: $D/R = 0{,}532$ so gilt für λ die Formel $\lambda = 1{,}877\,.\,\tau_0 / V^{2/3}$. Damit ist auch bei Scheiben die Längenmessung vermieden und die Bestimmung von λ allein durch Wägung und electrische Messung ermöglicht. Bei geeigneter Anordnung lässt sich λ in dieser Weise bis auf $1\,^0/_{00}$ genau messen.

Gegenüber der gewöhnlichen Methode der Messung der Leitungsfähigkeit durch Vergleich der Widerstände von Me-

talldrähten scheint mir die neue Methode folgende *Nachtheile* zu haben:

1. Die Theorie ist nicht vollständig durchführbar;

2. die erste Anordnung ist umständlich;

und folgende *Vorzüge:*

1. Man ist unabhängig von Contactfehlern und thermischen Einflüssen;

2. man misst die Leitungsfähigkeit des Metall, wie es ist, ohne zu einer Structuränderung durch Drahtziehen gezwungen zu sein;

3. man hat die Möglichkeit ohne Längenmessung λ zu bestimmen.

Besonders bei gut leitenden Metallen dürfte die Inductionswaage überlegen sein.

Würzburg, Pysik. Institut d. Univ., Februar 1893.

---

8. *Das Kirchhoff'sche Gesetz und die Strahlung der Gase; von E. Pringsheim.*

II. Die Strahlung von Lithium, Thallium und Kalium.

In der Untersuchung über die Strahlung des Natriums[1]) habe ich zunächst für glühenden Natriumdampf die Fragen zu beantworten gesucht, ob es gasförmige Lichtquellen gibt, welche den Bedingungen des Kirchhoff'schen Gesetzes entsprechen, und ob Gase überhaupt die Eigenschaft haben, durch blosse Temperaturerhöhung leuchtend zu werden. Dabei hat sich das Resultat ergeben, dass wir keine Lichtquelle kennen, bei der das Leuchten des Natriums eine blosse Function der Temperatur ist, und dass speciell in Flammen die Emission des gelben Na-Lichtes nur infolge von chemischen Reductionen auftritt. Ferner führten die Versuche mit grosser Wahrscheinlichkeit zu der Annahme, dass Na-Dampf bei den uns zu Gebote stehenden Flammentemperaturen an sich nicht leuchtend ist und nur während der chemischen Umsetzung selbst glüht.

Im Folgenden sollen analoge Versuche dargestellt werden, welche ich über das Leuchten von Li, Tl und K ausgeführt habe. Da sich beim Na keine wesentlichen Unterschiede zwischen der Wirkung verschiedener Natronsalze herausgestellt hatten, so habe ich mich bei der jetzigen Untersuchung fast ausschliesslich auf die kohlensauren Salze beschränkt.

a) Strahlung von Lithium.

1. Lithiumverbindungen im Ofen.

Die Versuchsanordnung war die schon beim Na benutzte. Im Porzellanrohr des früher beschriebenen Ofens[2]) befand sich ein mit dem Salze angefüllter Nickellöffel, welcher durch einen ausserhalb des Rohres angebrachten Electromagneten in dem Rohre hin- und hergeschoben werden konnte.[3]) Das Porzellan-

---

1) E. Pringsheim, Wied. Ann. 45. p. 428. 1892.

2) l. c. p. 430 ff.

3) l. c. p. 448 f.

rohr konnte man nach Belieben mit Luft, CO_2 oder H füllen oder auch evacuiren; das Absorptions- und Emissionsspectrum konnte abwechselnd durch ein Prisma mit gerader Durchsicht oder mit einem grossen Spectralapparat beobachtet werden.[1]) Die Lichtquelle für das Absorptionsspectrum war eine Glühlampe von 35 Kerzen, deren geradliniger Kohlenfaden unmittelbar als leuchtender Spalt benutzt wurde. Als Spalt für das Emissionsspectrum diente die kreisförmige Durchbohrung eines im Innern des Porzellanrohres angebrachten Chamottecylinders c_2 [2]), sodass eine monochromatische Lichtquelle im Innern des Rohres im Emissionsspectrum einen leuchtenden Kreis, im Absorptionsspectrum eine dunkle Linie hervorbrachte.

Wurde der Nickellöffel mit Li_2CO_3 gefüllt und in die Mitte des weissglühenden Ofenrohrs geschoben, so zeigte sich selbst bei den höchsten erreichbaren Temperaturen nicht die geringste Spur des Li-Spectrums in Absorption und Emission, wenn das Porzellanrohr Luft oder CO_2 enthielt, oder wenn es so vollständig wie möglich — bis auf wenige Millimeter Quecksilberdruck — evacuirt war. Sobald man aber H in das Rohr einliess, erschien im Absorptionsspectrum die rothe Li-Linie sehr deutlich und im Emissionsspectrum war ein hell leuchtender rother Kreis zu erblicken. Gleichzeitig war auch das Na-Spectrum sehr deutlich zu beobachten, offenbar infolge davon, dass das angewendete Lithionsalz etwas Na enthielt. Wenn das Porzellanrohr einige Zeit zu diesen Versuchen gedient hatte, so konnte man die gleichen Erscheinungen auch ohne ein Lithionsalz in dem leeren Rohre hervorrufen, da das glühende Li die Oberfläche des Porzellans angreift und ein Silicat bildet, dessen Reduction in der Glühhitze die gleichen Lichterscheinungen hervorruft, wie die Reduction von Li_2CO_3 oder eines anderen Salzes. Jedoch waren hier die Erscheinungen selbst in Röhren, in denen sehr häufig glühendes Li entwickelt worden war, sehr wenig intensiv, und es zeigte sich, dass die Einwirkung des glühenden Li auf das Porzellan viel langsamer und viel schwächer ist, als die Wirkung der übrigen untersuchten Elemente.

---

1) E. Pringsheim, Wied. Ann. **45**. p. 432 ff. 1892.
2) l. c. p. 431. Fig. 1.

Wenn man das Li_2CO_3 nicht in einem Nickel-, sondern in einem Eisenlöffel in das glühende Porzellanrohr einführte, so erschien das Li-Spectrum nicht bloss in H, sondern auch, wenn auch weniger intensiv, in CO_2, Luft und im Vacuum. Es ergibt sich also für Li dasselbe Resultat, welches wir für Na gefunden haben: *Die Li-Salze zeigen keine Spur von Lichtemission oder Absorption, wenn man sie im Ofen unter Ausschluss von chemischen Reductionsvorgängen auf Temperaturen erhitzt, bei denen sie in Flammen ein deutliches Spectrallicht aussenden. Sie beginnen sofort zu leuchten, sobald wir durch H, Eisen oder andere Mittel chemische Reductionsvorgänge einleiten. Daraus müssen wir schliesseu, dass auch in den Flammen die Lichtemission der Li-Salze nicht, wie man früher annahm, durch Verflüchtigung und Dissociation, sondern infolge von Reductionsvorgängen eintritt.*

2. Unterbrechung der Reduction.

Um die Frage zu entscheiden, ob das durch diese chemischen Processe reducirte Li dann, wenn es reducirt ist, infolge seiner hohen Temperatur leuchtend wird, oder ob es nur infolge der chemischen Umsetzung selbst, also in statu nascendi, Licht aussendet, schlug ich denselben Weg ein wie beim Na[1]; ich beobachtete nämlich die Veränderung der Lichterscheinung, wenn die Reduction plötzlich unterbrochen wird.

Erhitzt man ein schon öfters zu den Versuchen mit Li benutztes Porzellanrohr in H, so erscheint bei sehr hoher Temperatur schwach aber deutlich die Absorptionslinie und derEmissionskreis des Li infolge der Reduction des die Wände des Rohrs bedeckenden Lithiumsilicats. Da die Absorption bei unserer Anordnung leichter beobachtet werden konnte, als die Emission, beide Erscheinungen aber stets vollständig parallel verlaufen, so wollen wir uns in der Darstellung im wesentlichen auf die erstere beschränken. Die unter den geschilderten Umständen beobachtete Absorptionslinie sei dargestellt durch Fig. 1a. Schiebt man jetzt den mit Li_2CO_3 gefüllten Eisenlöffel mittels des Electromagneten in die Gluth, so wird die Li-Linie allmählich breiter und dunkler bis zu einem constanten Zustande (Fig. 1b). Wenn man jetzt den

1) E. Pringsheim, l. c. p. 448 ff. 1892.

Eisenlöffel plötzlich aus der Gluth entfernt, so geht die Erscheinung momentan auf den früheren Zustand zurück, also Fig. 1b verwandelt sich ganz plötzlich in 1a. Wird jetzt alles H ausgepumpt und CO_2 eingelassen, so ist die Absorption und Emission = 0; schiebt man den Eisenlöffel wieder vor, so ist nach kurzer Zeit die Emission und Absorption des Li-Lichtes wieder zu beobachten. Die Absorptionserscheinung (Fig. 2a) ist jetzt schwächer wie 1b, aber stärker als 1a. Wird das Eisen wieder plötzlich zurückgezogen, so ist jetzt keine plötzliche Veränderung der Erscheinung zu bemerken, sondern die Absorptionslinie wird ganz allmählich schwächer. Auch erreicht sie nicht den früheren Standpunkt, nämlich 0, sondern sie bleibt bei einem constanten Minimum stehen (Fig. 2b), bei dem sie dauernd deutlich, wenn auch schwach, zu erkennen ist. Der Uebergang von 2a zu 2b dauert etwa 6 Secunden und geht in dieser Zeit nicht sprungweise, sondern

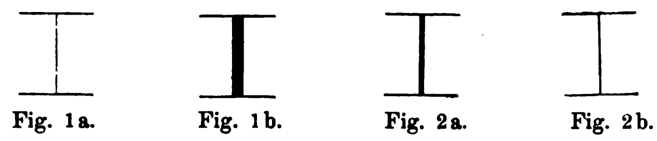


Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 2a. Fig. 2b.

ganz allmählich vor sich. Genau ebenso wie in CO_2 verläuft die Erscheinung im Vacuum, ganz anders dagegen in Luft. Hier verschwindet die Absorptionslinie, welche ebenso wie in CO_2 zu beobachten ist, solange das Eisen sich in der Gluth befindet, momentan, sobald das Eisen zurückgezogen wird, die Absorption, welche etwa ebenso stark war, als die in Fig. 2a dargestellte, wird ganz plötzlich gleich Null.

Der Verlauf der Erscheinungen ist also bei Li genau der gleiche wie bei Na, und auch die Erklärung ist die gleiche.[1]) In CO_2 und im Vacuum hört die chemische Reaction nicht auf, wenn der Eisenlöffel aus der Gluth gezogen wird, sondern das vorhandene dampfförmige Li übt seinerseits eine reducirende Wirkung auf das die Porzellanoberfläche bedeckende Lithiumsilicat aus. Es tritt nach der Entfernung des Eisenlöffels mit dem Li_2CO_3 allmählich ein stationärer Zustand ein, bei dem fortdauernd ebensoviel Li aus dem Silicat reducirt, als gleich-

1) E. Pringsheim, l. c. p. 451 ff. 1892.

zeitig durch das Porzellan in Silicat verwandelt wird. In Luft würde das gleiche eintreten, wenn nicht das im Momente der Entfernung des Löffels vorhandene dampfförmige Li sofort, ehe es noch auf das Silicat reducirend wirken kann, durch den Sauerstoff der Luft oxydirt würde. Infolge dieser Oxydation hört hier die Reduction und daher das Leuchten plötzlich auf. In H wird durch die verhältnissmässig geringe Menge des vorhandenen Li die Stärke des durch H hervorgebrachten Reductionsvorganges nicht merklich geändert, da H in grossem Ueberschuss vorhanden ist. Daher tritt beim Herausziehen des Löffels eine plötzliche Verringerung des Reductionsvorganges ein, da die Menge des zu reducirenden Salzes plötzlich sehr erheblich verringert wird. Denn statt des Lithiumsilicats und des $Li_2 CO_3$, deren Reduction vor sich geht, solange der Löffel sich in der Gluth befindet, steht plötzlich nur noch das Silicat allein zur Verfügung; dieser plötzlichen Verringerung der Reduction entspricht die plötzliche Abnahme der Spectralerscheinung.

Fig. 3a. Fig. 3b.

Aber ein Unterschied ist doch zwischen den Erscheinungen bei Na und bei Li zu bemerken, das geht aus einem Versuche vom 12. Mai 1892 hervor. Hier wurde ein ganz neues Porzellanrohr benutzt; in welchem also weder Natrium- noch Lithiumsilicate sich gebildet hatten. Infolgedessen zeigte dieses Rohr auch in der höchsten Gluth, obwohl es mit H gefüllt war, keine Spur von Spectralerscheinung, weder von Na noch von Li. Wurde in diesem Rohre, während es mit H gefüllt blieb, ein neuer, vorher noch nie benutzter Eisenlöffel mit Li_2CO_3 in die Gluth geschoben, so erschien nach kurzer Zeit deutlich das Absorptions- und Emissionsspectrum des Li. und infolge der nicht vollständigen Reinheit des benutzten Salzes auch das des Na. Die Absorptionsspectra sind für Li in Fig. 3a, für Na in Fig. 3b dargestellt. Die Li-Linie erschien stärker, als die Na-Linien, woraus bei der viel grösseren Intensität, welche das Na-Licht im allgemeinen gegenüber dem Li-Licht besitzt, zu schliessen ist, dass die Menge des leuchtenden Li die des leuchtenden Na weit überwog. Als jetzt das Eisen zurückgezogen wurde, verschwand die Li-Linie momentan, während die Na-Linien ohne merkliche Veränderung

bestehen blieben. Dies beweist für das Li, dass trotz der verhältnissmässig grossen Menge leuchtenden Dampfes noch so wenig Lithiumsilicat gebildet ist, dass die Reduction dieses Silicates durch den H keine Spur von Spectralerscheinung hervorruft. Für das Na dagegen folgt, dass schon fast das ganze in dem Li_2CO_3 enthaltene Na reducirt ist und dass dieses Na sich schon in beträchtlicher Menge in Silicat verwandelt hat. Das Na greift demnach das Porzellan viel schneller und stärker an, als das Li.

Bei der Besprechung der Versuche mit Na, hatte ich noch einen Einwand [1]) gegen die Auffassung, dass bei diesen Reductionsvorgängen das Leuchten nur eine Folge der chemischen Processe und nicht eine Function der Temperatur ist, als möglich hingestellt. Es wäre nämlich möglich anzunehmen, dass im Augenblick der Unterbrechung der Reduction alles vorhandene dampfförmige Na momentan an die Wand übergeht und zur Bildung von Natriumsilicat verwendet wird, dass also der infolge der hohen Temperatur leuchtende Natriumdampf bei der plötzlichen Unterbrechung der Reduction deshalb plötzlich aufhört zu leuchten, weil er aufhört, als metallisches Na zu bestehen. Schon damals hatte ich diese Erklärung als sehr unwahrscheinlich hingestellt wegen der Plötzlichkeit, mit der die Abnahme der Spectralerscheinung erfolgt. Und in der That zeigen die Versuche in CO_2 und im Vacuum zur Genüge, dass dieser Uebergang von Na in Silicat allmählich stattfindet, da die von diesem Uebergang abhängige Spectralerscheinung ganz allmählich abnimmt. Noch deutlicher zeigt sich die Hinfälligkeit dieses Einwandes bei Li. Hier geht die Veränderung der Spectralerscheinung bei Unterbrechung der Reduction in H genau ebenso plötzlich vor sich, wie bei Na; trotzdem zeigt der oben beschriebene Versuch, dass die Verwandlung des Li in Silicat bedeutend langsamer eintritt, als die des Na. Mithin ist die bei der Betrachtung der Leuchterscheinungen des Na noch allenfalls mögliche, wenn auch sehr unwahrscheinliche Erklärung durch die Versuche mit Li vollständig ausgeschlossen, und so bleibt für die Erklärung aller bisher bekannten Thatsachen keine andere Annahme übrig,

1) E. Pringsheim, l. c. p. 457 f.

als die, ***dass metallisches Li und metallisches Na in Dampfform bei den in unseren Versuchen angewandten Temperaturen nicht von selbst leuchten, sondern dass die Lichtemission und ebenso die Absorption nur in Begleitung und infolge der chemischen Reductionen eintritt.***

3. Versuche von Liveing und Dewar.

Aehnliche Versuche über das Absorptionsspectrum des Li haben Liveing und Dewar[1]) schon früher angestellt. Sie brachten die zu untersuchenden Substanzen in ein unten geschlossenes, oben offenes Eisenrohr, welches senkrecht in einem Ofen stand und dessen Inneres fortwährend mit H gespült wurde. Sie beobachteten die Umkehrung der Spectrallinien, wobei als umkehrende Lichtquelle der weissglühende Boden des Eisenrohres diente. Dabei fanden sie keine Spectralerscheinung, wenn sie metallisches Li in das heisse Rohr brachten, ebenso wenig erhielten sie eine Spectrallinie bei Benutzung von Li + Na, LiCl + Na und LiCl + K. Dagegen sahen sie die rothe Li-Linie umgekehrt und lange Zeit fortbestehen, wenn sie ein Gemisch von K, LiCl und Na in ihr Rohr brachten. Sehr eigenthümlich ist die Erklärung[2]), welche sie für ihre Versuche geben: „It is worthy of observation that the lithium line was only reversed in a mixture of the vapours of potassium and sodium and it seems highly probable that a very slightly volatile vapour may be diffused in an atmosphere of a more volatile metal, so as to secure a sufficiant depth of vapour to produce a sensible absorption. This would be analogous to well-known actions which take place in the attempt to separate organic bodies of very different boiling points by destillation, where a substance of high boiling point is always carried over in considerable quantity with the vapour of a body boiling at a much lower temperature.“

Eine einfache Erklärung der Versuche von Liveing und Dewar liegt auf der Hand, wenn man berücksichtigt, dass es sich hier nicht um Destillations- sondern um Reductionsvorgänge handelt. Bei diesen muss eben die Erscheinung sehr wesentlich von den chemischen Bedingungen abhängen, unter

1) Liveing u. Dewar, Proc. Roy. Soc. 27. p. 132. 1878.

2) l. c. p. 134.

denen der Versuch angestellt wird. Man könnte versucht sein, die Thatsache, dass Liveing und Dewar bei metallischem Li keine Spectrallinie gefunden haben, als directen Beweis für die von mir vertretene Anschauung zu betrachten, dass der erhitzte Metalldampf an sich nicht leuchtet. Und in der That, wenn die verschiedenen Versuche unter sonst gleichen Bedingungen angestellt sind, so geht daraus hervor, dass die Stärke des Leuchtens und damit die der Absorption keineswegs bloss von der Temperatur und Quantität des vorhandenen Metalldampfes abhängt. Da aber das Eisen vom Li angegriffen wird und dann selbst reducirend wirkt, so glaube ich, dass Liveing und Dewar auch bei metallischem Li die Umkehrung der Spectrallinie hätten erhalten müssen, wenn sie unter günstigen Bedingungen beobachtet hätten. Deshalb scheint mir dieser Versuch nicht ausschlaggebend zu sein, obwohl er die für meine Auffassung sehr günstige Thatsache bekundet, dass das reine Metall nicht so leuchtfähig ist, wie das Salz.

4. Metallisches Li im Ofen.

Obwohl es nach meinen oben beschriebenen Versuchen von vornherein unzweifelhaft war, dass auch metallisches Li in meinem Ofen die rothe Li-Linie zeigen würde, da ja das Li mit dem Porzellan ein Silicat bildet, dessen Reduction zum Leuchten Veranlassung geben muss, so habe ich doch mit Rücksicht auf das von Liveing und Dewar angegebene Resultat einen derartigen Versuch ausgeführt. Ein ganz neuer electromagnetisch beweglicher Nickellöffel wurde mit metallischem Li, etwa 0,1 g, beschickt und in ein ebenfalls ganz neues Porzellanrohr eingeführt. Dieses wurde darauf verschlossen, ausgepumpt und mit H gefüllt, worauf der Ofen angeheizt wurde. Der Nickellöffel verblieb am kalten, aus dem Ofen herausragenden Ende des Rohres, bis die höchste Gluth erreicht war. Als dies nach etwa zweistündigem Brennen eingetreten war, wurde der Löffel vorgeschoben; *die Gluth war so gross, dass das Nickel schmolz*, der ganze vordere Theil des Löffels wurde flüssig und das geschmolzene Metall lief zum grössten Theil an dem Stiel entlang nach dem kälteren Ende hin, wo es wieder starr wurde. Das Li war schon vorher verdampft und bildete einen rothglühenden Dampf, dessen

Emissionsspectrum vollständig continuirlich, ohne jedes bemerkbare Maximum war, nur ein heller gelber, der *D*-Linie entsprechender Kreis war deutlich bemerkbar, da er die Nachbarschaft an Intensität bedeutend übertraf. Von einem der rothen Li-Linie entsprechenden Emissionskreis war jedoch nichts zu sehen. Das Absorptionsspectrum zeigte gar keinen Unterschied gegen das Emissionsspectrum, da das von der Glühlampe ausgehende Licht vollständig in dem Dampf absorbirt wurde. Nach kurzer Zeit, etwa einer Minute, wurde der Dampf schnell heller und es zeigte sich ein schwaches continuirliches Emissionsspectrum, von dem sich zwei helle Emissionskreise abhoben, der eine, der *D*-Linie entsprechend, sehr intensiv, der andere, dem rothen Li-Licht angehörig, erheblich weniger lichtstark, aber sehr deutlich. Im Absorptionsspectrum sah man die Natriumlinie sehr stark und breit, die Lithiumlinie schwach und schmal. Wurde der H ausgepumpt und Luft eingelassen, so verschwand das Li-Licht vollständig, die *D*-Linie blieb, wenn auch viel schwächer, sichtbar. Wurde die Luft wieder durch H ersetzt, so erschienen die Li- und die Na-Linien in aller Stärke wieder. Während des Versuches haben sich die kalten Theile des Porzellanrohres mit erheblichen Mengen von überdestillirtem Li beschlagen.

Die Erklärung dieser Erscheinungen ist sehr einfach: der zunächst entstehende weissglühende Dampf ist der metallische Li-Dampf. Er zeigt kein Maximum der Emission im Roth, weil Metalldämpfe in der Weissgluth an sich kein Spectrallicht aussenden. Die in dem Li enthaltene geringe Menge Na bildet sofort mit dem Porzellan ein Silicat, dessen Reduction zu dem im continuirlichen Spectrum des weissglühenden Li-Dampfes sichtbaren gelben Emissionskreise Veranlassung giebt. Allmählich destillirt der Li-Dampf theilweise an die kalten Enden des Rohres über, theilweise bildet er mit dem Porzellan Lithiumsilicat und, sobald dies in genügender Menge vorhanden ist, wird dieses Silicat durch den H und durch das noch vorhandene metallische Li reducirt. Diese Reduction ist die Veranlassung zu dem Leuchten des Li, zum Erscheinen der rothen Li-Linie im Emissions- und im Absorptionsspectrum. Füllt man das Rohr mit Luft, so wird diese Reduction unterbrochen und das Leuchten hört auf, wieder eintretender H bringt die

chemische Action und die mit ihr verbundene Lichterscheinung sofort wieder in Gang. Dass das Li-Licht schon bei seinem ersten Erscheinen von dem Silicat und nicht vom glühenden Metalldampf herrührt, ist schon daraus zu ersehen, dass seine Intensität viel geringer ist, als die des gleichzeitig auftretenden Na-Lichtes. Dies kommt daher, dass die Leuchtkraft des Li-Silicats, wie wir oben gesehen haben, eine verhältnissmässig geringe ist. Im Gegensatz hierzu war bei dem entsprechenden mit Li_2CO_3 angestellten Versuche (p. 5) die Intensität der Li-Linie erheblich stärker, als die der Na-Linien. Wenn es sich um leuchtenden Metalldampf handelte, wäre dieses Verhalten absolut unverständlich. Der Verlauf dieses Versuches gibt daher eine vollkommene Bestätigung und eine wesentliche Bestärkung der aus den früheren Versuchen gezogenen Schlüsse.

b) Strahlung von Thallium.

1. Thallium im Ofen.

Metallisches Tl, in einem Porzellanschiffchen in dem mit N gefüllten Porzellanrohre des früher beschriebenen Ofens erhitzt, verdampft in der Rothgluth und bildet einen farblos durchsichtigen Dampf, dessen Emissionsspectrum vollständig continuirlich ist. Steigt die Temperatur höher, so sieht man bei der benutzten Versuchsanordnung, bei welcher als Spalt für das Emissionsspectrum die kreisförmige Oeffnung des im Porzellanrohr befindlichen Chamottecylinders diente, innerhalb des continuirlichen Spectrums einen hellen, grünen Emissionskreis, welcher der grünen Tl-Linie entspricht. Mit steigender Temperatur wächst die Intensität dieses Kreises, das continuirliche Spectrum nimmt etwas an Stärke ab, ohne jedoch — selbst bei den höchsten erreichbaren Temperaturen — jemals vollständig zu verschwinden. Da das zu diesen Versuchen benutzte Rohr schon vorher zu Experimenten über die Strahlung des Na gedient hatte und daher mit Natronsilicat überzogen war, so war ausser dem Tl-Spectrum auch noch sehr deutlich die Absorption und Emission der *D*-Linien zu beobachten. Wurde der Ofen ausgelöscht, so verschwand bei abnehmender Temperatur erst das Tl-Spectrum und sehr bald darauf auch die Na-Linien, wurde der Ofen jetzt wieder angezündet, so

traten zunächst die *D*-Linien und nach kurzer Zeit das Tl-Spectrum wieder in die Erscheinung. Dieser Versuch konnte ohne merkliche Aenderung häufig hintereinander ausgeführt werden; Temperaturmessungen mit einer Thermonadel aus Platin und Palladium zeigten, dass dies Verschwinden des Tl-Kreises stets bei derselben Temperatur eintrat, auch wenn die Erscheinung unter fortwährendem Brennen des Ofens stundenlang angehalten hatte. Wenn man die Verschlussfenster des Ofens öffnete, sodass Luft eintreten konnte, so hörte die Erscheinung auf und trat auch nicht wieder ein, wenn man die Luft auspumpte und das Rohr wieder mit N füllte. Bei diesen Versuchen konnte niemals ein Umkehrung der Tl-Linie beobachtet werden. Wurde jedoch metallisches Tl in H statt in N erhitzt, so war das Emissionsspectrum intensiver und man konnte auch leicht das Absorptionsspectrum des Tl beobachten.[1])

Schon diese Versuche zeigen, dass das Leuchten des verdampften metallischen Tl nicht lediglich eine Folge der hohen Temperatur ist. Denn sonst würde dieses Leuchten nur kurze Zeit anhalten können, da bald das ganze vorhandene Tl an die kalten Enden des Porzellanrohres hinüber destilliren müsste.

2. Thalliumverbindungen im Ofen.

Auch das metallische Tl greift in der Glühhitze das Pozellan an und es bildet sich daher im Porzellanrohr ein Ueberzug von Thalliumsilicat, welcher ebenfalls zu Spectralerscheinungen Anlass gibt. Erhitzt man ein solches Rohr in Luft, CO_2, N oder im Vacuum, so zeigt sich auch bei den höchsten Temperaturen keine Spur vom Tl-Spectrum. Sobald man jedoch H in das Rohr eintreten lässt, erscheint die grüne Tl-Linie deutlich im Absorptions- und im Emissionsspectrum. Pumpt man den H aus, so nimmt die Erscheinung an Intensität ab und verschwindet schliesslich vollständig; lässt man jetzt CO_2, N oder Luft zutreten, so bleibt die

---

1) Lockyer und Roberts konnten die Umkehrung der Tl-Linie nicht beobachten (Proc. Roy. Soc. **23**. p. 344. 1875). Dagegen erhielten Liveing und Dewar die Umkehrung dieser Linie (Proc. Roy. Soc. **27**. p. 132. 1878).

Spectralerscheinung verschwunden, um aber sofort zurückzuzukehren, sobald man das Rohr wieder mit H füllt.

Genau die gleichen Erscheinungen treten auf, wenn man ein Porzellanschiffchen mit Tl_2CO_3 in den Ofen bringt. *Also auch die Tl-Salze zeigen bei Temperaturen, bei denen sie in Flammen ein lebhaftes Spectrallicht aussenden, im Ofen keine Spur von Lichtemission oder Absorption, solange sie sich im Vacuum oder in einer Atmosphäre eines neutralen Gases befinden, die Spectralerscheinung tritt aber sofort ein, wenn eine chemische Reduction der Salze durch den H eingeleitet wird.*

Auch hier kann man diese Reduction auf andere Weise hervorbringen als durch H, wie folgende Versuche beweisen. Bringt man Tl_2CO_3 in den electromagnetisch beweglichen Eisenlöffel und schiebt den Löffel in die Gluth, während das Porzellanrohr mit CO_2 oder Luft gefüllt, oder möglichst evacuirt ist, so erscheint das Absorptions und Emissionsspectrum des Tl sehr deutlich. Dabei war ein Unterschied gegen die analoge Erscheinung bei Na_2CO_3 auffallend. Das Na-Spectrum nämlich ist viel intensiver[1]), wenn das Rohr mit CO_2 gefüllt ist, als wenn es Luft enthält, während bei dem Tl die Intensität der Erscheinung in beiden Fällen keine merkliche Verschiedenheit zeigte.

3. Unterbrechung der Reduction.

Auch die Versuche mit Unterbrechung der Reduction zeigen grosse Verschiedenheiten gegen die bei Na und Li beobachteten Erscheinungen. Auch hier wollen wir uns auf die Beobachtung des Absorptionsspectrums beschränken. Das mit Thalliumsilicat bedeckte Porzellanrohr zeigte, wenn es mit H gefüllt war, bei hoher Gluth das Absorptionsspectrum des Tl sehr deutlich (Fig. 4a). Wurde jetzt der mit Tl_2CO_3 gefüllte Eisenlöffel in die Gluth geschoben, so nahm die Linie an Dunkelheit und Breite zu bis zu einem dauernden Zustande (Fig. 4b). Zog man darauf das Eisen plötzlich zurück, so bildeten sich zuerst kurze Dampfwirbel, welche als dunkle Schleier über das Gesichtsfeld fuhren, dann nahm die Erscheinung ganz

1) E. Pringsheim, l. c. p. 450.

allmählich ab bis zu einer constanten in Fig. 4c dargestellten Stärke, wobei sogleich auffiel, dass dieser Endzustand (4c) intensiver war, als der Anfangszustand (4a). Um diese Beobachtung zu controlliren, wurde jetzt der H ausgepumpt, bis die Absorption vollständig verschwunden war, und dann das Rohr wieder mit H von dem gleichen Drucke gefüllt, wie vorher. Sofort erschien auch die Tl-Linie wieder merklich in der gleichen Stärke, wie in Fig. 4a, deutlich schwächer als in Fig. 4c. Wurde das Rohr ausgepumpt und mit CO_2 gefüllt, so war keine Spectralerscheinung zu beobachten, solange sich der mit Tl_2CO_3 gefüllte Eisenlöffel am kalten Ende des Rohres befand. Wurde der Löffel in die Gluth gebracht, so trat nach kurzer Zeit die Tl-Linie auf, und zwar ungefähr in der gleichen Stärke, wie in H (Fig. 4b). Zog man den Eisen-

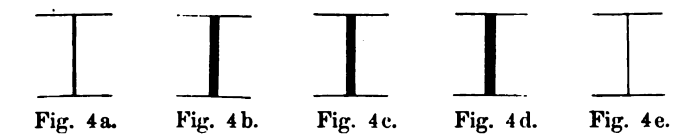


Fig. 4a. Fig. 4b. Fig. 4c. Fig. 4d. Fig. 4e.

löffel zurück, so zeigte sich zunächst keine merkliche Veränderung der Erscheinung, nur allmählich nahm sie etwas an Intensität ab, bis zu dem constanten Zustande (Fig. 4d), der sich jedoch sehr wenig von Fig. 4b unterschied. War das Rohr mit Luft gefüllt, so erschien die Tl-Linie, wenn der Löffel in die Gluth geschoben wurde, in der gleichen Stärke, wie in H und CO_2 (Fig. 4b); nach dem Herausziehen des Löffels ging die Erscheinung ganz allmählich in einigen Secunden auf eine sehr schwache Absorptionslinie (Fig. 4e) zurück, welche dann dauernd erhalten blieb. Im Vacuum traten genau die gleichen Erscheinungen auf wie in Luft. Demnach verhält sich das Tl bei diesen Versuchen ganz anders, als Na und Li. Die in einem mit Silicat bedeckten Rohre, bei Benutzung eines mit Carbonat gefülltem Eisenlöffels auftretenden Erscheinungen für Na und Li einer-, Tl andererseits sind in der folgenden Uebersicht zusammengestellt.

		Na und Li	Tl
Anfangszustand, vor Einführung des Eisenlöffels	in H	Deutliche Absorption	Deutliche Absorption
	in CO_2	Absorption = 0	Absorption = 0
	in Luft	Absorption = 0	Absorption = 0
	im Vacuum	Absorption = 0	Absorption = 0
Während sich der Eisenlöffel in der Gluth befindet	in H	Starke Absorption	Starke Absorption
	in CO_2	Absorption, schwächer als in H.	Starke Absorption, ebenso wie in H
	in Luft	Absorption, schwächer als in CO_2	Starke Absorption, ebenso wie in H
	im Vacuum	Absorption. ebenso wie in CO_2	Starke Absorption, ebenso wie in H.
Nach Herausziehen des Eisenlöffels	in H	Plötzlicher Rückgang auf den Anfangszustand	Allmählicher Rückgang auf einen erheblich schwächeren Endzustand, der aber stärker ist, als der Anfangszustand
	in CO_2	Allmählicher Rückgang auf einen erheblich schwächeren Endzustand	Allmählicher Rückgang auf einen sehr wenig schwächeren Endzustand
	in Luft	Plötzliches Verschwinden der Erscheinung	Allmählicher Rückgang auf einen erheblich schwächeren Endzustand
	im Vacuum	Dasselbe wie in CO_2	Dasselbe wie in Luft

4. Erklärung der Versuche mit Thallium.

Das Verhalten des Tl zeigt deutlich, dass auch hier das Leuchten lediglich als Begleiterscheinung der chemischen Reduction auftritt. Genau so, wie wir es bei Na und Li gefunden haben, leuchten auch die Verbindungen des Tl nur dann, wenn sie chemische Reduction erfahren. Denn die Erscheinungen des „Anfangszustandes" sind nach der obigen Uebersicht genau die gleichen für Tl, wie für Na und Li, und die Erscheinungen, welche eintreten, während sich der Eisenlöffel in der Gluth befindet, sind ebenfalls qualitativ übereinstimmend und zeigen nur quantitative Unterschiede. Wenn die Reduction unterbrochen wird, so fehlt allerdings hier der plötzliche Rückgang

der Erscheinung bei H, welchen wir für Na und Li gefunden hatten und aus dem wir für diese Elemente den Schluss ziehen konnten, dass das Leuchten nicht eine blosse Function der Temperatur des metallischen Dampfes ist, sondern nur während der Reduction selbst als Folge der chemischen Umsetzung auftritt. Aus den Versuchen mit Tl können wir daher für dieses Metall den gleichen Schluss nicht unmittelbar ziehen, aber noch weniger lassen sich diese Versuche zur Unterstützung der entgegengesetzten Ansicht heranziehen. Denn wenn der Metalldampf nach seiner Reduction lediglich wegen der hohen Temperatur leuchtend wäre, so müsste die Erscheinung infolge der Destillation an die kalten Enden des Rohres dauernd an Intensität abnehmen, sobald die Reduction unterbrochen wird, während wir hier immer eine nur kurz andauernde Abnahme beobachtet haben, auf welche sehr bald ein dauernd unveränderlicher Endzustand folgt, welcher stundenlang aufrecht erhalten werden kann. Es liegt daher kein Grund zu der Annahme vor, dass die Grundbedingungen des Leuchtprocesses bei Tl andere sind, als bei Na und Li, die auffallenden Verschiedenheiten im Verhalten des Tl weisen nur darauf hin, dass die chemischen Vorgänge hier etwas anders verlaufen, als bei den beiden anderen untersuchten Metallen. Und zwar scheint aus der Gleichheit der Erscheinungen in Luft und im Vacuum hervorzugehen, dass das Tl bei diesen Temperaturen erheblich schwerer oxydirbar ist, als Na und Li, während die eigenthümliche Erscheinung, dass der Endzustand in CO_2 stärker ist als in H, darauf hinweist, dass hier die CO_2 nicht die Rolle eines neutralen Gases spielt, sondern in irgend einer Weise an dem chemischen Umsatz theilnimmt.

Die Versuche mit metallischem Tl erklären sich in der gleichen Weise, wie die mit metallischem Na. Das dampfförmige Tl bildet mit dem Porzellan ein Silicat, und es tritt in der Glühhitze ein chemischer Gleichgewichtszustand ein, bei welchem in der gleichen Zeit die gleiche Menge Tl zur Bildung des Silicats verbraucht und aus dem Silicat reducirt wird. Dieses im Momente der Reduction leuchtende Tl ist der Träger der Spectralerscheinung.

c) Strahlung des Kaliums.

1. Metallisches Kalium im Ofen.

Wenn man metallisches K in einem Porzellanschiffchen in das Innere des Ofenrohrs bringt, dieses mit H oder N füllt und dann anheizt, so verdampft das K schon bei ganz schwacher Rothgluth und bildet einen farbigen Dampf, welcher je nach seiner Dichte ganz undurchsichtig oder dunkelblaugrün erscheint. Im Spectrum zeigt sich zunächst eine vollkommene Absorption aller Farben, dann bei steigender Temperatur und zunehmender Verdünnung des Dampfes infolge der Destillation erscheint zuerst das grünblau, dann grün, dann roth, endlich violett. Schliesslich bleibt nur ein Absorptionsstreifen im Gelb übrig, das zweifellos dem im benutzten Metalle enthaltenen Na angehört. Die von Roscoe und Schuster[1]) beschriebenen Absorptionsbanden habe ich nicht beobachtet. Bei steigender Temperatur bleibt nur die Na-Linie bestehen. Die K-Linie habe ich bei diesen Versuchen niemals beobachten können. Dies kommt wohl daher, dass das K schon bei Temperaturen verdampft, bei denen es das Porzellanrohr noch nicht angreift, und daher vollständig an die Enden des Rohres hinüberdestillirt, ohne ein Silicat zu bilden.

2. Kaliumverbindungen im Ofen.

K_2CO_3, in einem Porzellanschiffchen im Ofen erhitzt, zeigt das gleiche Verhalten wie die Salze des Na, Tl und Li. In H erscheint bei sehr hohen Temperaturen im Emissionsspectrum der helle rothe Kreis, welcher der Linie K_α entspricht; die Absorption konnte ich nicht beobachten, weil das Licht der Glühlampe in diesem äussersten Theile des roth zu wenig intensiv ist, um die K-Linie umzukehren. Ebenso zeigt ein leeres, schon einmal zu diesen Versuchen benutztes und daher mit Kaliumsilicat bedecktes Porzellanrohr in H den rothen Emissionskreis des K. In Luft und CO_2, ebenso im Vacuum tritt die K-Linie nicht auf, wenn man keine Reductionsmittel anwendet. Bringt man jedoch das K_2CO_3 in einem Eisenlöffel in die Gluth, so zeigt sich der rothe Emissionskreis auch in CO_2, Luft und im Vacuum. *Somit ist auch für K erwiesen,*

1) Roscoe u. Schuster, Proc. Roy. Soc. 22. p. 362. 1874.

dass das spectrale Leuchten in dem Ofen und ebenso in den Flammen nur als Folge von Reductionsvorgängen auftritt.

Auch über die Unterbrechung der Reduction habe ich einige Versuche angestellt, welche zeigen, dass sich das K sehr ähnlich verhält wie das Tl. Solange sich das Eisen mit dem K_2CO_3 in der Gluth befindet, ist die Erscheinung gleich stark in H und in CO_2. Zieht man das Eisen aus der Gluth heraus, so geht die Emission in beiden Fällen sehr allmählich zurück, ebenso wie bei Tl. Da jedoch die Stärke der Emission viel schwerer zu beurtheilen ist, als die der Absorption, welche sich durch die Breite der Linien leicht erkennen lässt, so sind die Einzelheiten der Erscheinung hier weniger sicher. Jedenfalls spricht auch hier keine einzige Beobachtung dafür, dass die Lichtemission des K den Bedingungen des Kirchhoff'schen Gesetzes genügt.

Schluss.

Aus den bisherigen Untersuchungen geht hervor, dass die alte Anschauung über das Leuchten der Metallsalze in Flammen nicht zutrifft. *Die Bedingung dieses Leuchtens besteht nicht darin, dass die Flammentemperatur hoch genug ist, um die Salze zu verdampfen und zu dissociiren, sondern darin, dass die Flamme Stoffe enthält, welche das Metall aus den Salzen reduciren.* Dabei spielt die Temperatur nur eine secundäre Rolle, indem die Stärke der Reductionsvorgänge von ihr abhängig ist. Dies ist bewiesen für Na, Li, Tl und K und ist wohl für die Salze der anderen in der Flamme leuchtenden Elemente unmittelbar aus der Analogie zu schliessen. Ebenso scheinen auch die Spectra von Verbindungen in Flammen nur dann aufzutreten, wenn sich die Verbindung in der Flamme selbst bildet, also nur während des chemischen Umsatzes selbst.

Ferner hat sich für Na und Li mit Sicherheit gezeigt, dass bis zu den der Untersuchung zugänglichen Temperaturen (Nickelschmelze) diese Elemente nur infolge der chemischen Reduction, nicht infolge der Temperatur selbst leuchten. Für Tl und K liess sich der gleiche Beweis nicht erbringen, jedoch ist kein Versuch bekannt, der das Gegentheil bekundet, und daher ist aus der Analogie zu schliessen, dass auch diese Elemente und ebenso alle anderen, welche in Flammen leuchten, an sich bei der Temperatur der Flamme kein spectrales Licht

aussenden. Demnach entstammt die Energie der spectralen Strahlung gasförmiger Elemente in Flammen nicht der Wärmebewegung, sondern sie entsteht direct aus der chemischen Energie.

Betrachten wir alle bekannten Vorgänge, durch welche wir Gase zu spectralem Leuchten bringen können, so finden wir keinen einzigen, bei dem das Leuchten durch blosse Temperaturerhöhung ohne Mitwirkung chemischer oder electrischer Processe hervorgebracht wird. Es ist daher kein experimenteller Grund für die Annahme vorhanden, dass Gase überhaupt durch blosse Temperatursteigerung zum Leuchten gebracht werden können. Die Analogie mit den festen und flüssigen Körpern, bei denen die Lichtemission anscheinend lediglich durch die Temperatur bedingt wird, kann nichts beweisen, weil schon der vollständige Gegensatz zwischen dem Charakter der Gasspectra und dem continuirlichen Spectrum der festen Körper und Flüssigkeiten auf einen grundsätzlichen Unterschied in dem Mechanismus des Leuchtens hinweist. Ebensowenig lässt sich ein theoretischer Grund für jene Annahme anführen. Denn aus den Schwingungen der Atome, die wir in der kinetischen Theorie der Wärme annehmen, kann das Leuchten der Gase nicht erklärt werden. Schon die eine Thatsache, dass einatomige Gase, z. B. Quecksilber, ein so complicirtes Spectrum aufweisen, zeigt, dass der Zustand der Atome, von denen die thermischen und chemischen Eigenschaften der Gase abhängen, für die Lichtemission nicht maassgebend sein kann.

Demnach hat sich die alte Anschauung, welche das Leuchten der Gase bei allen verschiedenen Arten der Erregung auf eine einzige Ursache, die Temperaturerhöhung zurückführt und welche alle Methoden, durch welche Gase zum Leuchten gebracht werden können, lediglich als Mittel zur Hervorbringung der Leuchttemperatur betrachtet, als unhaltbar erwiesen, ja es ist mindestens sehr zweifelhaft geworden, ob eine Temperaturerhöhung allein überhaupt die Lichtemission von Gasen veranlassen kann. Worin aber in der That der Mechanismus des Leuchtens besteht, ob er bei den verschiedenen Arten der Erregung im Grunde der gleiche ist oder ob etwa das Leuchten durch electrische Einwirkungen in wesentlich

anderer Weise zu Stande kommt, als das durch chemische und andere Processe hervorgerufene, das sind Fragen, welche bei dem jetzigen Stand der Dinge nur mit ungenügend begründeten Hypothesen beantwortet werden können. Am Schlusse des ersten Theils[1]) dieser Untersuchung habe ich darauf hingewiesen, dass es auch in der Astrophysik nicht erlaubt erscheint, bei den Schlüssen aus dem Charakter der Sternspectra auf die Beschaffenheit der Gestirne selbst das Kirchhoff'sche Gesetz zu Grunde zu legen. Die gleiche Ansicht hat schon Herr Ebert[2]) in einer mir damals entgangenen Besprechung über J. Scheiner, Die Spectralanalyse der Gestirne, ausgesprochen.

Berlin, Phys. Inst. d. Univ. April 1893.

---

1) Pringsheim, Wied. Ann. **45.** p. 459. 1892.

2) Ebert, Vierteljahrsschr. d. astronom. Gesellschaft. **27.** p. 28. 1891.

9. *Ueber die Eigenschaften dünner Oelschichten auf einer Wasseroberfläche; von A. Oberbeck.*

1.

Bei den neuesten Untersuchungen über diesen Gegenstand von den Hrn. Sohncke,[1]) Röntgen[2]) und von Lord Rayleigh[3]) handelte es sich um die Vertheilung *sehr kleiner Oelmengen über Wasserflächen mässiger Grösse*, wie dieselben durch die Verhältnisse des Experimentes im Laboratorium bedingt sind, und um die Messung der Dicke der Oelschicht, wenn dieselbe bestimmte Eigenschaften zeigt. Hierdurch kam ich auf den Gedanken, ähnliche Versuche in grösserem Maassstabe, d. h. mit *bedeutenderen Oelmengen* auf einer sehr *grossen Wasserfläche* — auf der See — anzustellen.

Mit Rücksicht auf die praktische Wichtigkeit der Dämpfung der Wellen durch Oel hat man sich allerdings schon vielfach mit diesem Gegenstande beschäftigt. So enthält eine Abhandlung von A. van Beck[4]) eine interessante Zusammenstellung der älteren Literatur (unter anderem auch die Bemerkung, dass im Mittelalter die beruhigende Wirkung dem „geweihten" Oel zugeschrieben wurde). Ferner citirt G. Quincke[5]) eine grössere Anzahl von Arbeiten hierüber und beschreibt selbst[6]) eine Reihe bemerkenswerther Vorgänge bei der Ausbreitung von Oel auf dem „Neuen See" bei Berlin, die sich allerdings bei der Ausbreitung an anderen Oberflächen nicht wiederfanden.

Mir kam es darauf an, festzustellen, wie sich die Oelmenge einige Zeit nach ihrer Berührung mit der Wasserfläche verhält, ob sich dieselbe immer weiter und weiter ausbreitet und sich

1) Sohncke, Wied. Ann. **40.** p. 345–355. 1890.

2) Röntgen, Wied. Ann. **41.** p. 321—329. 1890.

3) Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. **47.** p. 364—367. 1890; **48.** p. 128—140. 1890.

4) A. van Beck, Annales de chim. et de phys. (3) **4.** p. 257 bis 289. 1842.

5) G. Quincke, Pogg. Ann. **139.** p. 74. 1870.

6) G. Quincke, Wied. Ann. **35.** p. 598. 1888.

dadurch verhältnissmässig schnell der Beobachtung entzieht, oder ob sich eine begrenzte Fläche ergibt, welche sich einige Zeit erhält, sodass man aus ihrer Grösse die Dicke der Oelschicht berechnen kann.

Bei den in dem folgenden Abschnitte beschriebenen Versuchen trat der zweite Fall ein. Die Dicke der Oelschicht war kleiner als diejenige Grenzdicke, bis zu welcher, nach Sohncke, eine Oelmenge sich ausbreiten kann, bevor sie in kleine Tröpfchen zerfällt. Sie war aber grösser als diejenigen Dicken, für welche Röntgen und Rayleigh eine Reihe von Wirkungen der Oberflächenschicht nachweisen konnten. Hierdurch wurde ich veranlasst, weitere Versuche über das ganze, mit Rücksicht auf die Wirkungssphäre der Molecularkräfte, so interessante Ausbreitungsphänomen anzustellen. Insbesondere legte ich mir die Frage vor, ob sich eine Anzahl chemisch ähnlicher Substanzen als dünne Oberflächenschichten ähnlich verhalten oder ob dabei grössere individuelle Unterschiede hervortreten.

Es zeigte sich, dass dieselben mit zunehmender Oelmenge für eine bestimmte Wasseroberfläche eine Reihe charakteristischer Zustände durchlaufen, dass hierzu bei Benutzung *fetter Oele* im ganzen dieselben Mengen erforderlich sind, dass dagegen für eine Reihe anderer Flüssigkeiten, welche sich ebenfalls auf Wasser ausbreiten, zur Herstellung derselben Oberflächenbeschaffenheit Mengen von ganz anderer Grössenordnung nöthig sind.

2.

Man wird wohl annehmen dürfen, dass die Oberfläche der See in einiger Entfernung vom Ufer als reine Wasserfläche anzusehen ist. Schiffe, welche dieselbe durchschneiden, bringen allerdings meist kleine Mengen von Fett auf dieselbe, sodass man ihre Spuren verhältnissmässig lange unterscheiden kann. Schliesslich ist aber doch die Wassermenge im Vergleich zu diesen Verunreinigungen so bedeutend, dass dieselben nach einiger Zeit verschwinden.

Für die Wahrnehmung der Oelschicht rechnete ich auf den Unterschied der Reflexion an der Wasserfläche, je nachdem dieselbe glatt oder mit mehr oder weniger kräftigen Wellen bedeckt ist.

Die Versuche wurden in einfachster Weise ausgeführt. In einem Segelboot fuhr ich von dem Hafenort in der Nähe unserer Universitätsstadt etwa zwei Kilometer in die See hinaus, versehen mit einer Reihe von Flaschen von bekanntem Inhalt (0,1 l, 0,2 l und 0,5 l) und gefüllt theils mit Rüböl, theils mit Maschinenöl. Während das Schiff in gleichmässiger, geradliniger Fahrt erhalten wurde, liess ich, am Steuer sitzend, den Inhalt einer Flasche in möglichst dünnem, continuirlichen Strahl ausfliessen.

Das Oel breitete sich schnell aus und zeigte das durch die beistehende (Fig. 1) dargestellte Bild. In der Mitte (*a*) war eine hellgraue Schicht. An diese schlossen sich die prachtvollen farbigen Schichten (*b*) auf beiden Seiten an, welche durch zwei schmälere hellgraue Streifen (*c*) begrenzt sind. Die Schichten breiteten sich fortdauernd weiter aus.

Nach Erschöpfung des Flascheninhaltes wurde der Versuch in einiger Entfernung wiederholt. Schliesslich, nach Verlauf von einer halben bis einer ganzen Stunde, wurde jede einzelne mit Oel bedeckte Stelle, deren Lage aus Merkmalen am Ufer wiedererkannt werden konnte, von neuem aufgesucht. Die Farbenerscheinungen waren verschwunden. Die Oelschichten aber waren deutlich in Form hellgrauer, rechteckiger Streifen zu erkennen. Da infolge eines leichten Windes die Wasserfläche mit kleinen Kräuselwellen bedeckt war, diese aber vollständig durch die Oelschicht gedämpft wurden, so reflectirte dieselbe das Himmelslicht besser, als die bewegte Wasserfläche, hob sich also hell auf dunklem Grunde ab. Das Boot segelte zunächst an dem Streifen in seiner Längsrichtung entlang und wurde dann im Bogen um das eine Ende herumgeführt. Aus der Zeit, die zu dem Vorüberfahren nöthig war, noch mehr aus dem Anblick, konnten die Dimensionen desselben geschätzt werden. Bei der ersten Fahrt überlies ich diese Schätzung dem hierin wohlbewanderten Lootsen, welcher das Boot führte, indem ich

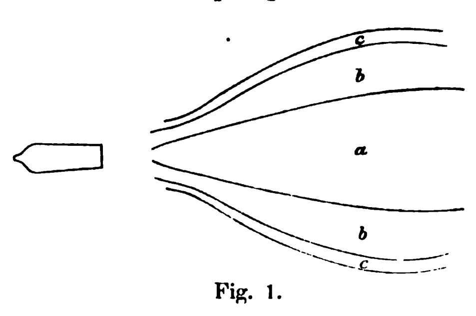


Fig. 1.

mir die Angaben desselben und die dabei verbrauchten Oelmengen notirte.

So wurde geschätzt: bei 0,5 l Oel: Länge 300 m, Breite 30 m; bei 0,2 l: Länge 130 m, Breite 30 m.

Für 1 l würde man nach der ersten Angabe erhalten: 18 000 qm, nach der zweiten: 19 500 qm.

Bei einer zweiten Expedition wurden etwas genauere Messungen angestellt.

Vom Ufer aus ist auf eine ziemlich weite Strecke das tiefere Fahrwasser durch Tonnen in üblicher Weise bezeichnet. Zunächst wurde die Breite desselben mit einer Leine abgemessen. Mit Benutzung dieser Standlinie konnte mit einiger Sicherheit die Entfernung einiger aufeinanderfolgender Tonnen geschätzt werden. Dieselbe ergab sich zu 220 m. Hierauf wurde der Oelungsversuch auf einer, dieser Strecke nahen, parallelen Linie ausgeführt. Der Wind war diesmal erheblich schwächer, die Fahrt langsamer, aber auch die Störung durch Wellen geringer. Es wurde im ganzen 0,7 l verbraucht. Als nach einiger Zeit die betreffende Stelle wieder besichtigt wurde, fand sich, dass der graue Streifen in Richtung seiner Schmalseite durch den Wind etwas weiter getrieben worden war, sodass er das Fahrwasser vollständig bedeckte und noch ungefähr um die halbe Breite darüber hinausragte. Da dieselbe 40 m betrug, so ist für diejenige der Oelschicht 60 m anzunehmen. Der Versuch wurde nach einiger Zeit wiederholt und führte zu demselben Resultat. Hiernach beträgt die von 1 l Oel bedeckte Fläche 18 857 qm. Die Dicke der Oelschicht ergibt sich zu 53 $\mu\mu$ (milliontel Millimeter).

Eine weitergehende theoretische Bedeutung möchte ich dieser Zahl nicht beilegen. Zunächst beruht dieselbe auf Distanzschätzungen von mässiger Genauigkeit. Ferner wird anzunehmen sein, dass durch die Bewegung des Wassers mit der Zeit eine Mischung und vielleicht eine Lösung oder, wie Quincke annimmt, eine langsame Veränderung des Oeles vor sich geht. Endlich ist wahrscheinlich, dass die Oelmenge auch in unsichtbarer resp. unwirksamer, noch dünnerer Schicht sich ausserhalb der sichtbaren Fläche ausgebreitet hatte. Alle diese Umstände würden dazu beitragen, die Dicke der fraglichen Schicht noch zu verringern. Hiernach wird man das immerhin

bemerkenswerthe Resultat dahin aussprechen können, dass eine Oelschicht von rund 50 $\mu\mu$ genügt, um eine Wasserfläche gegen die kleinen Wellen eines mässigen Windes zu schützen und dass diese Schicht auch nach einiger Zeit (über eine halbe Stunde) sichtbar und wirksam war. Einen Rückschluss auf den Radius der Wirkungssphäre glaubte ich aus dieser Zahl nicht ziehen zu sollen. Hierzu schien es mir nöthig, das Ausbreitungsphänomen noch weiter in allen Einzelstadien zu untersuchen. Die Erklärung dieser Erscheinung, sowie eine Beschreibung derselben ist schon früher von Quincke[1]), Marangoni[2]) und anderen gegeben. Da meine Versuchsanordnung indess anschaulich alle Phasen derselben darzustellen geeignet ist, so erlaube ich mir zunächst über die hierauf bezüglichen Versuche zu berichten.

3.

Ein rechteckiger Kasten mit Glaswänden (eine Wellenrinne) von 2 m Länge, 10 cm Breite und Höhe ist so aufgestellt, dass das eine Ende (*A*) etwas höher steht, als das andere (*B*). In *A* ist am Boden eine Oeffnung mit Hahn. An demselben ist ein zur Wasserleitung führender Schlauch befestigt, so dass die Rinne von unten her gefüllt werden kann. Es wird Wasser zugelassen, bis der Abfluss über die Schmalseite in *B* beginnt und dieser noch einige Zeit in Gang erhalten, sodass dort nur das an der Oberfläche befindliche Wasser abläuft. Da die etwa an den Wänden haftenden kleinen Fettmengen sich über die Oberfläche ausbreiten, so werden dieselben nach einiger Zeit ohne allzu grossen Wasserverlust mitgenommen. Der Wasserleitungshahn wird schliesslich langsam zugedreht, sodass die freie Oberfläche den Rand in *B* mit einem capillaren Meniskus überragt.

Um die Wirkung des Oeles beobachten zu können, werden kleine Mengen Schwefelblumen auf das Wasser gestreut. Wird in die Nähe von *A* ein Tropfen Oel gebracht, so breitet sich derselbe im ersten Augenblick kreisförmig aus. Sehr schnell indess setzen demselben die drei nahen Seitenwände ein Hinderniss entgegen und die Ausbreitung erfolgt nur noch in der

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **139.** p. 1—89. 1870.
2) Marangoni, Pogg. Ann. **143.** p. 337—351. 1871.

Längsrichtung. Man kann deutlich verfolgen, wie immer weitere und weitere Schichten der Oberfläche in Bewegung gesetzt werden, lange bevor dort eine Spur von Oel sichtbar wird. Nach kurzer Zeit erreicht die einsetzende Strömung das Ende *B*. Der Abfluss beginnt wieder und hält einige Zeit an. Auf diese Weise wird ein Theil der zugeführten Oelmenge wieder entfernt. Bei Zusatz eines zweiten, dritten und vierten Tropfens kam jedesmal der Abfluss wieder in Gang, wenn auch immer schwächer.

Nach Reinigung der Rinne, die allerdings ziemlich lange Zeit erforderte, wurde wiederum in *A* ein Oeltropfen aufgelegt. Während derselbe sich noch kreisförmig ausbreitete, hatte die Strömung schon wieder das andere Ende erreicht und in kurzer Zeit die Oberfläche reingefegt.

Dies kann nur durch eine sehr dünne, unsichtbare aber

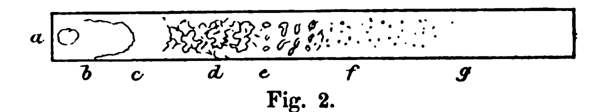


Fig. 2.

mit starker Reibung auf die darunter liegende Wassermenge wirkende Oelschicht erklärt werden, welche den sichtbaren Mengen schnell und weit vorauseilt.

Als eine Oelmenge von etwa 1 mg auf das Wasser in *A* gebracht worden war, hatte sich nach einiger Zeit der durch die beistehende Figur dargestellte Zustand ausgebildet. In derselben ist in *a* der ursprüngliche, langsam an Menge abnehmende Tropfen. In *b* zeigt die Oelschicht die glänzenden Farben dünner Blättchen, in *c* ist die Oberfläche ziemlich gleichmässig hellgrau gefärbt. Diese homogene Schicht löst sich bei *d* in ein Netzwerk *sichtbarer* Fäden auf, während jedenfalls die Zwischenräume durch dünne, *unsichtbare* Schichten ausgefüllt sind. In *e* zerfallen die Zweige des Netzes in eigenthümliche, in fortdauernder Veränderung befindliche Figuren, die schliesslich zu kleinen Tropfen sich umgestalten. Letztere haben in *f* nur noch Durchmesser von ausserordentlich kleinem Radius, sodass sie nur bei günstiger Beleuchtung als kleine Sternchen erkennbar sind. In *g* ist das dort sicher vorhandene Oel ganz unsichtbar. Diese Vertheilung dauert nur kurze Zeit.

Sobald die Strömung in *B* aufhört, verbreiten sich grössere Oelmengen auch in die entfernteren Theile der Rinne.

Die Schicht *c* entspricht wohl, soweit bei der veränderten Versuchsanordnung ein Vergleich zulässig ist, den von Sohncke eingehend untersuchten Oelscheiben, für welche derselbe im Augenblick des Zerfalls die Dicken 121,5 $\mu\mu$ (für Olivenöl) und 93,6 $\mu\mu$ (für Rüböl) gefunden hat. Ist dieser Grenzwerth erreicht, so kann eine Oelschicht von einer geringeren, gleichmässigen Dicke die Wasserfläche nicht mehr bedecken. Es scheint dann eine Art von Gleichgewicht zwischen dickeren und dünneren Schichten einzutreten.

Ist die dem Oel dargebotene Fläche hinreichend gross, so bildet sich wieder eine Schicht von gleichmässiger Dicke, die allerdings unsichtbar, aber an ihren Wirkungen noch sehr wohl zu erkennen ist. Man kann diese Erscheinungen auch in umgekehrter Reihenfolge studiren, indem man einer reinen Wasserfläche sehr viel kleinere Oelmengen nach und nach zuführt. Dann kommt man an einen Punkt, wo die unsichtbare Schicht nicht mehr gleichmässig möglich ist, dies ist daran zu erkennen, dass sich jetzt Anhäufungen von sehr geringer Menge: die oben erwähnten Sternchen bilden. Das Auftreten derselben bei zunehmender Dicke scheint mir ein ebenso charakteristisches Stadium, wie der Zerfall der dickeren Schicht. Um weitere Anhaltspunkte für eine quantitative Bestimmung der hierzu erforderlichen Dicke der Oelschicht zu finden, schien es mir zunächst erforderlich, ausführlicher das Verhalten der dünnsten Schichten zu untersuchen.

4.

Da diese Beobachtungen sich über eine grössere Anzahl von Flüssigkeiten, welche sich in dünner Schicht auf Wasser ausbreiten, erstrecken sollten, so kam es mir darauf an, eine leicht zu handhabende Methode zu benutzen, welche aber gleichzeitig eine quantitative Schätzung der Wirkung der Oberflächenschicht gestattet.

Ich benutzte zu diesem Zweck — im Anschluss an Versuche von Lord Rayleigh[1]) — die Wirkung eines Luft-

1) Lord Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. **48.** p. 132. 1890.

stromes auf eine Wasserfläche. Wird derselbe schräg — etwa unter einem Winkel von 30° gegen die Oberfläche des in einem kreisförmigem Gefäss befindlichen Wassers gerichtet, so erregt er zunächst eine leichte Wellenbewegung. Ferner erzeugt er Strömungen, welche durch kleine Mengen aufgestreuten Pulvers sichtbar gemacht werden können. Endlich hat er die Eigenschaft, ganz dünne Fettschichten von einem Theil der Oberfläche zu vertreiben und an denjenigen Orten zu condensiren, wo die Strömung schwächer ist. Solange, als der Luftstrom dauert, wird demnach an bestimmten Orten der Wasserfläche Gleichgewicht zwischen der Reibungswirkung desselben und der Tendenz der Fettschicht, sich auszubreiten, bestehen. In dieser Beziehung ist die Wirkung des Luftstromes eine ähnliche, wie diejenige von Aetherdampf, welche Röntgen[1]) näher untersucht hat. Auch dort findet — in einer Kreislinie — Gleichgewicht statt zwischen dem Einfluss des Aetherdampfstromes und der entgegengerichteten Wirkung der fremden Oberflächenschicht.

Die Herstellung einer reinen Wasseroberfläche geschah nach dem ebenso einfachen, als zweckmässigen Vorschlag von Röntgen[2]). Ein Trichter, dessen oberer Rand einen Durchmesser von 20 cm hatte, wird unten mit der Wasserleitung in Verbindung gesetzt. Bei Oeffnung der Leitung fliesst das Wasser über den oberen Rand ab. Der Trichter wird von einem eisernen Statif gehalten. Das Wasser fliesst in ein grosses darunter stehendes Blechgefäss. Die Wasserfläche war stets nach kurzer, kräftiger Strömung völlig rein.

Als Pulver wurden Schwefelblumen benutzt. Da dieselben, obgleich specifisch schwerer, auf dem Wasser schwimmen, so muss man wohl annehmen, dass sie mit einer geringen Fettschicht bedeckt sind. Dieselbe haftet aber ziemlich fest an den einzelnen Theilchen. Jedenfalls ist die etwa auf das Wasser übergehende Quantität klein im Vergleich zu den geringsten Fettmengen, mit denen ich experimentirte. Die Benutzung einer grösseren oder kleineren Menge änderte nicht wesentlich die Versuchsresultate. Richtet man auf die reine,

---

1) Röntgen, Wied. Ann. **41.** p. 321—329. 1890.
2) Röntgen, Wied. Ann. **46.** p. 152. 1892.

nur mit wenig Pulver bedeckte Wasserfläche einen Luftstrom, der unter einem Einfallswinkel von etwa 60° einen Punkt in der Nähe des Randes trifft, so wird das Pulver an die entgegengesetzte Stelle des Randes getrieben und sammelt sich dort in einer schmalen Schicht. Dabei sind die einzelnen Theilchen in lebhafter Wirbelbewegung innerhalb des kleinen Raumes, den sie einnehmen. Nach Aufhören des Stromes breiten sie sich von hier aus langsam wieder über die Wasserfläche aus.

Berührt man dann die Wasserfläche mit der Spitze eines feinen, in Oel getauchten Platindrahtes, so wird das Pulver schnell an den Rand des Gefässes getrieben, vertheilt sich dann aber wieder langsam über die ganze Fläche. Durch einen neuen Luftstrom wird dasselbe wieder an dem entgegengesetzten Rande angesammelt. Doch ist der von demselben eingenommene Raum jetzt grösser geworden. Die einzelnen Theilchen rotiren nicht mehr um ihre Axe, sondern beschreiben Bahnen von geringer Ausdehnung. Bei weiterer Oelzufuhr wird der durch den Luftstrom gesäuberte Raum immer kleiner, bis schliesslich die Fettschicht überall dem Luftstrome Widerstand leistet. Dabei sind die Bewegungen des Pulvers charakteristisch für die verschiedenen Stadien der Oelzufuhr. Die Theilchen beschreiben stets geschlossene Bahnen, deren Umfang immer grösser und grösser wird.

Hiernach kann man aus der Grösse der gesäuberten Wasserfläche und aus der Bewegung des Pulvers ausserhalb derselben einen Schluss auf die Gegenwirkung der Fettschicht ziehen. Da es mir hauptsächlich darum zu thun war, den Endzustand zu ermitteln, bei welchem eine weitere Oelzufuhr keine merkliche Veränderung hervorbrachte, so habe ich keine Messungen der beiden Theile der Oberfläche vorgenommen, sondern nur zwischen einer Reihe aufeinanderfolgender Oberflächenbilder unterschieden, welche in den Fig. 3 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) dargestellt sind. Von denselben stellt *a* die Wirkung des Luftstromes auf die reine Fläche, *e* den Endzustand dar.

Es liess sich annehmen, dass Neigung und Stärke des Luftstromes von Einfluss auf die beschriebenen Erscheinungen sein würden. Deshalb wurden hierüber Vorversuche angestellt. Der Luftstrom wurde durch ein Gebläse geliefert, welches zu

akustischen Versuchen diente. Der Strom ging durch einen längeren Kautschukschlauch und eine Glasröhre von 6 mm Durchmesser. Das Ende derselben befand sich 2 cm über der Wasserfläche. War die Neigung gegen letztere sehr gering, so war die Wirkung merklich schwächer. Bei grösserer Neigung aber, von etwa 20° an, war kein erheblicher Unterschied mehr zu erkennen. Die Versuche konnten sogar mit einem senkrechten Strome ausgeführt werden. Dann waren selbstverständlich die Bewegungen und die einander folgenden Bilder andere, da jetzt das Pulver radial nach den Rändern zu getrieben wurde. Der Grenzzustand aber, bei welchem die Fettschicht der

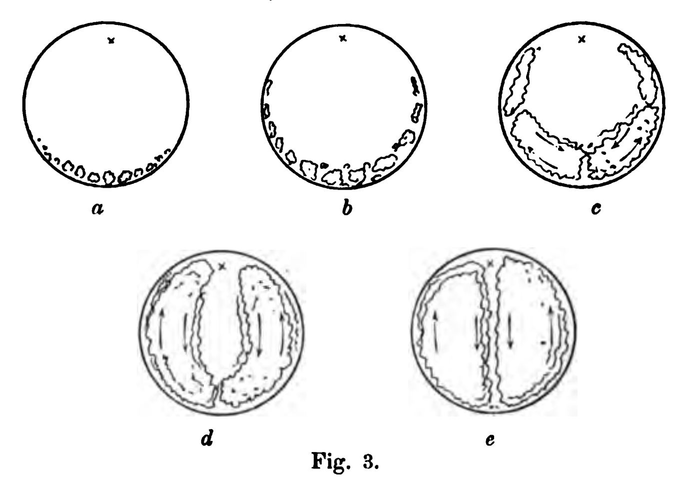


Fig. 3.

Wirkung des Stromes widerstand, wurde durch dieselbe Oelmenge erreicht. Eine mässige Vergrösserung des Druckes durch Bleigewichte brachte ebenfalls bei einer Neigung von etwa 30° keine Veränderung der Resultate hervor.

Die Messung der kleinen, an die Wasserfläche abzugebenden Oelmengen bereitet bei derartigen Versuchen die Hauptschwierigkeit. Ich verfuhr in der folgenden Weise. Auf eine kleine Glasplatte wurde ein Tropfen des zu untersuchenden Oeles von einigen Milligramm gebracht, welcher einen Durchmesser von 3—4 mm hatte. In denselben wird die Spitze eines Platindrahtes von 0,07 mm Durchmesser getaucht und damit eine kleine Oelmenge abgehoben. Für die Wägung derselben an meiner zehntel Milligramm zeigenden Waage war

dieselbe zu klein. Wird aber diese Operation häufig wiederholt, so verringert sich der Oeltropfen um wägbare Mengen. Dementsprechend wurde der Platindraht, nachdem derselbe die kleine Oelmenge angenommen hatte, in die Flamme eines Bunsen'schen Brenners gehalten. Ein momentanes Aufblitzen zeigt die Verbrennung derselben. Dann wird eine neue Portion abgehoben etc. Die bei mehrmaliger Wiederholung dieser Versuche für die Menge der Einzelportion erhaltenen Werthe stimmten einigermaassen überein.

So ergab sich z. B. für Mohnöl folgendes Resultat:

Gewicht der Glasplatte . .	1,2251 g
Platte und Oeltropfen . .	1,2321 „
Draht 30mal eingetaucht .	1,2319 „
„ „ „ .	1,2316 „
„ 40mal „ .	1,2312 „

Die Einzelmengen würden hiernach zwischen 0,007 und 0,01 mg liegen und im Mittel 0,009 mg betragen.

Bei mehreren anderen Sorten fetter Oele ergaben sich Werthe, welche hiermit nahezu übereinstimmten, d. h. für eine einzige Portion Werthe lieferten, welche auch zwischen den soeben angegebenen Grenzen lagen. Nur bei dem schwerflüssigen Ricinusöl waren die Einzelmengen erheblich grösser.

Hiernach wurden die Versuche in der folgenden Weise ausgeführt. Nach Herstellung der reinen Wasserfläche und Bestreuung derselben mit einer geringen Menge Schwefelblumen wird zunächst der Zustand der Oberfläche durch die Einwirkung des Luftstromes geprüft. Es musste die Anordnung der Fig. 3a entstehen.

Dann wird die erste kleine Oelmenge an die Wasserfläche abgegeben und durch den Luftstrom dieselbe untersucht; hierauf erfolgt die Zufuhr einer zweiten Portion etc., bis der Endzustand *e* erreicht ist. Das Flächenbild wird jedesmal notirt. Ist, wie in dem folgenden Beispiel, zweimal dieselbe Bezeichnung vorhanden, so ist damit nicht ausgedrückt, dass das Strömungsbild unverändert geblieben ist, sondern nur, dass dasselbe dem vorhergehenden Bilde noch näher steht, als dem folgenden.

Die folgende Zusammenstellung bezieht sich auf Olivenöl.

Die Nummern bedeuten die Oelmengen, die Buchstaben die Stromfiguren.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
b	*b*	*c*	*c*	*d*	*e*	*e*	*e*

Da sich ausserdem ergeben hatte, dass eine Portion $^1/_{100}$ mg war, so wurde der Endzustand durch 0,06 mg erreicht. Doch war schon 0,01 mg von merklichem Einfluss. In dieser Weise wurden mehrere fette Oele untersucht. Der Gang der Versuche war in allen Fällen derselbe. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in welcher die Grenzwerthe zur Erreichung des Bildes *e* aus drei verschiedenen Reihen herrühren. Diese Zahlen bedeuten tausendstel Milligramme. In der zweiten Spalte befinden sich die specifischen Gewichte. Endlich sind unter *d* die Mittelwerthe der Grenzdicken in Mikromillimetern angegeben, wobei die Wasserfläche zu 300 qcm angenommen wurde.

	s	I	II	III	*d*
Rüböl	0,917	40	50	50	1,7
Olivenöl	0,913	60	60	60	2,2
Mohnöl	0,921	54	52	45	1,8
Leberthran . . .	0,930	50	52	45	1,7
Mandelöl	0,919	52	60	60	2,1
Ricinusöl	0,969	50	45	45	1,6
Leinöl	0,935	47	62	62	2,0

Die Unterschiede der einzelnen Zahlen der letzten Reihe sind nicht derart, dass man daraus auf charakteristische Verschiedenheiten für die einzelnen Substanzen schliessen könnte. In runder Summe repräsentirt also 2 $\mu\mu$ die Dicke derjenigen Oelschicht, welche einem Luftstrom unter den gegebenen Verhältnissen Widerstand zu leisten vermag.

Diese Zahl befindet sich in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Röntgen[1]) und von Lord Rayleigh.[2]) Röntgen findet die Dicke einer Oelschicht, welche gerade die Durchbrechung durch Aetherdampf verhindert, zu 1,8 $\mu\mu$. Lord Rayleigh gibt 2 $\mu\mu$ für diejenige Oelschicht, welche die Eigenbewegungen kleiner Kampherstückchen zu hemmen vermag.

1) Röntgen, Wied. Ann. **41.** p. 321—329. 1890.

2) Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. **47.** p. 364—367. 1890.

Hiernach gibt es also eine gewisse Grenzdicke, bei welcher eine Oelschicht fähig wird, verschiedenartige Wirkungen auszuführen und zwar scheint diese Grösse für verschiedene fette Oele dieselbe zu sein.

Ferner stimmen auch darin meine Versuche mit denjenigen der genannten beiden Physiker überein, dass es noch cohärente Schichten von sehr viel geringerer Dicke gibt, deren Wirkung man nach einer der angegebenen Methoden sichtbar machen und allenfalls auch noch messen kann. Die dünnste Schicht, mit der ich zu thun hatte, war $^1/_6$ der oben angegebenen Zahl, also ungefähr 0,3 $\mu\mu$.

Ich habe auch noch eine ganze Reihe anderer Substanzen nach der von mir beschriebenen Methode untersucht, besonders eine Anzahl ätherischer Oele. Auch hier gelingt es bei einer Reihe von Substanzen, die verschiedenen Stadien der Strömungsbilder und den Grenzzustand herbeizuführen. Man muss dann aber sehr viel grössere Mengen benutzen. Diese Substanzen verdunsten stark, sodass die beobachteten Mengen zu gross ausfallen. Trotzdem übertreffen dieselben die früher gefundenen jedenfalls ganz ausserordentlich. Cassiaöl steht den fetten Oelen noch am nächsten; hier ist ungefähr die zehnfache Menge nöthig. Bei Bergamottöl und Pfeffermünzöl war die Menge nahezu hundertfach, bei Petroleum noch grösser. Hiernach scheinen noch andere Eigenschaften der Flüssigkeiten bei diesen Versuchen eine Rolle zu spielen.

Schliesslich habe ich noch eine andere Erscheinung untersucht. Führt man nach Erreichung des Grenzzustandes bei den fetten Oelen noch weitere Mengen zu, so bleibt das Oel zunächst noch unwahrnehmbar [1]), indem nur die gleichmässige Dicke der Oelschicht zunimmt. Bei Ueberschreitung einer gewissen Gewichtsmenge bilden sich aber die früher erwähnten kleinen Tröpfchen oder Sternchen, welche sich längere Zeit erhalten. In denselben muss die Oelschicht eine grössere Dicke besitzen, als in der Umgebung. Die zur Herbeiführung dieses Zustandes nöthigen Mengen habe ich für einige fette

1) Die optische Wirkung sehr viel geringerer Fettschichten hat Lord Rayleigh (Phil. Mag. (5) **33**. p. 1. 1892) durch Beobachtung der Reflexion polarisirten Lichtes festgestellt. Hier handelte es sich nur um das Aussehen der Oberfläche.

Oele festgestellt. Die Versuche wurden ähnlich ausgeführt, wie zuvor. Doch wurde jetzt ein dickerer Platindraht benutzt, um von dem abgewogenen Tropfen eine etwas grössere Menge zu entnehmen. Genügte dieselbe noch nicht, so wurde nach Ausglühen des Drahtes eine weitere Portion entnommen und schliesslich der Gewichtsverlust des Tropfens festgestellt.

Die Sternchen werden am besten sichtbar bei der Reflexion der dunkleren Theile eines hellen Fensters an der Wasseroberfläche. Das Aussehen derselben ist bei den verschiedenen Substanzen etwas anders; bei einigen sind die Sternchen sehr klein und zahlreich, bei anderen etwas grösser und seltener. Die zuzuführenden Mengen betrugen bei derselben Wasserfläche von 300 qcm bis zur ersten Wahrnehmung der Sternchen bei zwei Versuchsreihen:

1. für Olivenöl 0,4 und 0,5 mg; 2. für Rüböl 0,5 und 0,5 mg; 3. für Mohnöl 0,4 und 0,4 mg; 4. für Mandelöl 0,5 und 0,7 mg.

Bei der Unsicherheit der Beobachtung kann nur geschlossen werden, dass die Menge und also die durchschnittliche Dicke ungefähr das neun- bis zehnfache der früher beobachteten ist, also etwa 18 $\mu\mu$ beträgt.

5.

Vergegenwärtigen wir uns hiernach nochmals die Reihenfolge der Eigenschaften einer Oelschicht auf Wasser in dem Sinne, dass wir uns einer reinen Wasserfläche jedesmal eine etwas grössere Oelmenge mitgetheilt denken.

1. Die durchschnittliche Dicke der Oelschicht ist kleiner als 2 $\mu\mu$. Die Schicht ist überall gleichmässig dick. Oberflächenzähigkeit, sowie Widerstandsfähigkeit gegen Aetherdampf sind vorhanden, nehmen aber mit der Dicke zu.

2. Die Dicke der Schicht ist grösser als 2 $\mu\mu$, aber kleiner als 18 $\mu\mu$. Auch jetzt ist die Vertheilung noch eine gleichmässige. Die Oberflächenzähigkeit hat einen gewissen Grenzwerth erreicht. Ebenso ist die Oberfläche jetzt für Aetherdampf undurchlässig.

3. Wird der Grenzwerth von ungefähr 18 $\mu\mu$ überschritten, so wird die Vertheilung des Oeles über die Wasserfläche eine ungleichmässige. An einzelnen Stellen sind oder bleiben grössere

Oelmengen einige Zeit angehäuft, während der grössere Theil mit einer dünneren Schicht bedeckt ist. Die Oelschicht fängt auf diese Weise an, für das unbewaffnete Auge sichtbar zu werden. Die dämpfenden Wirkungen sind beträchtlich, wie die im zweiten Abschnitte beschriebenen Erscheinungen an der Oberfläche der See zeigen. Auch bei erheblicher Vergrösserung der Oelmenge bleibt dieser Zustand — Tropfenbildung auf einer mit einer dünneren Schicht belegten Fläche — bestehen. Unter günstigen Umständen können die Tropfen — wie die Versuche von Sohncke zeigen — grosse Dimensionen vorübergehend annehmen. Im allgemeinen wird aber der Gleichgewichtszustand einer gegebenen Oelmenge, welche man auf eine bestimmte Wasserfläche bringt, von der Art der Zuführung abhängen.

4. Soll eine Wasserfläche dauernd mit einer gleichmässig dicken Oelschicht überzogen werden, so sind dazu sehr beträchtliche Oelmengen nöthig. —

Wie ich schon früher angedeutet, habe ich diese Erscheinungen verfolgt, um aus denselben einen Rückschluss auf die Wirkungssphäre der Molecularkräfte ziehen zu können. Nach längerer Ueberlegung bin ich indess davon zurückgekommen.

Handelt es sich um einen Vorgang an der Grenze zweier Flüssigkeiten, von denen die eine aus einer Schicht von sehr geringer Dicke besteht, so machen sich jedenfalls ausser den Molecularkräften, wie sie in der Capillaritätstheorie behandelt werden, noch andere Wirkungen geltend. Ich möchte hierzu mit Quincke[1]) den Umstand rechnen, dass sich zwei im gewöhnlichen Sinne nicht mischbare Flüssigkeiten doch in sehr geringen Mengen in einander lösen können, und dass diese Lösung — allerdings wiederum sehr langsam — sich durch Diffusion verändert.

Hiernach würde man die dünnsten Oelschichten wohl nicht mehr als eine *über* das Wasser ausgebreiteten Menge, sondern als eine Lösung derselben an der Wasserfläche aufzufassen haben.

1) Quincke, Pogg. Ann. **139**. p. 20 und 75 und Wied. Ann. **35**. p. 582. 1888.

Dieser Mischschicht müssen wir grosse Zähigkeit und kleine Oberflächenspannung zuschreiben. Die Zähigkeit wächst, die Spannung nimmt ab mit zunehmender Oelmenge, bis dieselbe eine gewisse Grenze erreicht hat. Dann ist die Wasserfläche für den Augenblick mit Oel gesättigt. Weitere Oelmengen vermögen sich zunächst nicht mehr auszubreiten. Hierzu ist, wie früher bemerkt, bei einigen fetten Oelen eine Quantität von ungefähr 0,0017 mg für ein Quadratcentimeter nöthig.

Hiernach haben wir es gerade bei den dünnsten Oelschichten nicht mehr ausschliesslich mit capillaren Gleichgewichtszuständen, sondern mit einem durch Lösung und Diffusion (bei manchen anderen Flüssigkeiten kommt hierzu noch die Verdunstung) modificirten Vorgang zu thun, aus welchem mir die Berechnung der Wirkungssphäre der Capillarkräfte nicht ausführbar erscheint.

Greifswald, den 25. März 1893.

10. ***Notiz, betreffend die Möglichkeit einer zugleich den elastisch-optischen wie den electromagnetischen Principien entsprechenden Dispersionsformel; von E. Ketteler.***

Im letztem Hefte der Annalen [1]) ist es Hrn. von Helmholtz gelungen, die Gesetze der Farbenzerstreuung aus den Principien der electromagnetischen Lichttheorie abzuleiten. Im Folgenden soll die von ihm gewonnene Dispersionsformel mit denjenigen Gleichungen zusammengestellt werden, die ich selber früher auf elastisch-optischer Grundlage aufgestellt habe.

Zunächst findet man in diesen Annalen [2]) und weiter in meiner Optik p. 93 die Bewegungsgleichungen der Aether- und Körpertheilchen in folgender Form ausgedrückt:

(8a) $$m \frac{d^2 \xi}{d t^2} - m' \frac{d^2 \xi}{d t^2} C = \mathfrak{e} \frac{d^2 \xi}{d z^2} + \mathfrak{b}\, m' \xi'$$

(9) $$\frac{d^2 \xi}{d t^2} C + \frac{d^2 \xi'}{d t^2} = - \mathfrak{k}' \xi' - \mathfrak{g}' \frac{d \xi'}{d t}$$

Darin beziehen sich m, $\mathfrak{e}$, ξ auf die Aethertheilchen, m', ξ' auf die Molecüle, und sind

$$C.\ \mathfrak{b} (= B \mathfrak{k}'),\ \mathfrak{k}' \left(= \frac{4 \pi^2}{T_m^2}\right),\quad \mathfrak{g}' \left(= G \frac{2 \pi}{T_m}\right)$$

Constanten.

Die Integration derselben mittels der Ausdrücke:

$$\xi = A \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - n \frac{z}{\lambda}\right),\ \xi' = A' \cos 2 \pi \left(\frac{t}{T} - n \frac{z}{\lambda}\right),$$

worin $n = \nu + \varkappa \sqrt{-1}$ das complexe Brechungsverhältniss bedeutet, führt zur Bedingungsgleichung:

(11) $$n^2 - 1 = \frac{m'}{m} \frac{B C \frac{T^2}{T_m^2} - C^2}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\, G \frac{T}{T_m}},$$

unter T die variable Schwingungsdauer verstanden.

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. **48.** p. 389. 1893.

2) v. Helmholtz, Wied. Ann. **21.** p. 199. 1884; Ketteler, Theoretische Optik. Braunschweig, 1885. Die Nummern der im Folgenden citirten Formeln sind die der Optik.

Weiterhin habe ich in meinem Buche p. 95 die Gleichung (8a) durch Hinzufügung eines neuen Dämpfungsgliedes zu verallgemeinern gesucht, sodass dann das System entsteht:

$$(12)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - m'\dfrac{d^2\xi'}{dt^2}C = \mathfrak{e}\dfrac{d^2\xi}{dz^2} + \mathfrak{b}\,m'\xi' + \mathfrak{c}\,m'\dfrac{d\xi'}{dt} \\ \dfrac{d^2\xi}{dt^2}C + \dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = -\mathfrak{k}\,\xi' - \mathfrak{g}'\dfrac{d\xi'}{dt}. \end{cases}$$

Setzt man darin $\mathfrak{c} = (2\pi / T_m) H'$, so erhält man die entsprechende Bedingungsgleichung:

$$(\text{XII})\qquad n^2 - 1 = \frac{m'}{m}\,\frac{BC\dfrac{T^2}{T_m^2} - C^2 - \sqrt{-1}\,H'C\dfrac{T}{T_m}}{\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\,G\dfrac{T}{T_m}}.$$

Beide Ausdrücke (11) und (XII) geben für $\lambda = \infty$, bez. $\lambda = 0$ die identischen Extremwerthe:

$$(28)\qquad n_\infty^2 - 1 = \frac{m'}{m}BC,\quad n_0^2 - 1 = \frac{m'}{m}C^2.$$

Führt man schliesslich (p. 101) statt H' eine neue Constante H ein, die mit ihr verknüpft ist, durch die Gleichung:

$$H' - BG = H,$$

so geht Ausdruck XII dadurch über in:

$$(\text{XIIc})\qquad n^2 - n_\infty^2 = \frac{m'}{m}\,\frac{(B-C)\,C - \sqrt{-1}\,CH\dfrac{T}{T_m}}{\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\,G\dfrac{T}{T_m}}.$$

Bezüglich der Bedeutung des Coefficienten H ist p. 101 bemerkt, dass die Annahme $H = 0$ in der eigentlichen Optik auf Grund der bisherigen Erfahrungen wohl durchweg genügen werde, dass indess das mit dem Coefficienten H behaftete Glied doch immerhin für die quantitative Spectralanalyse sowie besonders für die Lichtbewegung in Metallen und vielleicht auch für die von Kerr entdeckte Doppelbrechung electrisirter Flüssigkeiten zu einem merklichen Einfluss werde gelangen können.

In den ferneren Abhandlungen ist dann wesentlich aus practischen Gründen durchweg $H = 0$ gesetzt, sodass Ausdruck (XIIc) sich dadurch abkürzt auf:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{n_\infty^2 - n_0^2}{\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\,G\dfrac{T}{T_m}}\qquad (H' = 0),$$

während der etwas weniger bequeme Ausdruck (11) der Annahme $H' = \mathfrak{c} = 0$ entspricht. Derselbe schreibt sich nunmehr:

$$n^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1)\frac{T^2}{T_m^2} - (n_0^2 - 1)}{\frac{T^2}{T_m^2} = 1 - \sqrt{-1}\, G \frac{T}{T_m}} \qquad (H' = 0).$$

Wie ich übrigens vor kurzem[1]) nachgewiesen habe, lassen sich die Gleichungen (12) unter der Annahme $H = 0$ auch auf die Form bringen:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{d t^2} &= \mathfrak{e} \frac{d^2 \xi}{d x^2} - B C m' \frac{d^2 \xi}{d t^2} - (B - C) m' \frac{d^2 \xi'}{d t^2} \\ \frac{d^2 \xi'}{d t^2} &= - \mathfrak{k}_\mu' \xi' - \mathfrak{g}_\mu' \frac{d \xi'}{d t} + \frac{C}{1 + C}\left(\frac{d^2 \xi'}{d t^2} - \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right). \end{aligned} \right. \qquad (H = 0).$$

Dagegen erhält das System der Gleichungen (8a) und (9) durch die gleiche Transformirung noch ein zusätzliches Glied und geht so über in:

$$\text{(b)} \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{d t} &= \mathfrak{e} \frac{d^2 \xi}{d x^2} - B C m' \frac{d^2 \xi}{d t^2} - (B - C) m' \frac{d^2 \xi'}{d t^2} - B (1 + C) m' \mathfrak{g}_\mu' \frac{d \xi'}{d t} \\ \frac{d^2 \xi'}{d t^2} &= - \mathfrak{k}_\mu' \xi' - \mathfrak{g}_\mu' \frac{d \xi'}{d t} + \frac{C}{1 + C}\left(\frac{d^2 \xi'}{d t^2} - \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right). \end{aligned} \right. \qquad (H' = 0)$$

Auf dem von mir eingehaltenen Standpunkte sind die Gleichungen (8a) und (9), bez. (12) die eigentlichen Grundgleichungen der Theorie, die als solche ausführlich begründet sind. Aus ihnen wie nicht minder aus den Gleichungen (a) und (b) ersieht man, dass es wesentlich die Constante C ist, welche die Wechselwirkung zwischen den Aether- und Molecularschwingungen vermittelt. Es würde daher auch ein Nullsetzen von C die ganze Theorie vernichten.

Andererseits ist nicht ausgeschlossen, vielleicht wegen der Kleinheit der Molecularamplituden sogar recht wahrscheinlich, dass C eine äusserst kleine Grösse ist, so klein vielleicht, dass es genügt, nur die erste Potenz derselben beizubehalten, dagegen schon die zweite zu vernachlässigen. Unter dieser Annahme wird zufolge Gleichungen (28) für $\lambda = 0$:

(c) $$n_0^2 = 1,$$

und so schreibt sich dann der Ausdruck (11):

1) Ketteler, Wied. Ann. **46.** p. 572. 1892.

$$\text{(d)} \qquad n^2 - 1 = \frac{(n_\infty^{\,2} - 1)\frac{T^2}{T_m^{\,2}}}{\frac{T^2}{T_m^{\,2}} - 1 - \sqrt{-1}\,G\,\frac{T^2}{T_m}}$$

in denkbar bequemster Weise. Die von mir sogenannte dispergirende Kraft:

$$D = n_\infty^{\,2} - n_0^{\,2}$$

würde folglich hiernach mit der brechenden Kraft $(n_\infty^{\,2} - 1)$ identisch werden.

Vorstehende Formel spaltet sich schliesslich in die beiden reellen Theilausdrücke:

$$\nu^2 - \varkappa^2 - 1 = \frac{(n_\infty^{\,2} - 1)\left(1 - \frac{T_m^{\,2}}{T^2}\right)}{\left(1 - \frac{T_m^{\,2}}{T^2}\right)^2 + G^2\,\frac{T_m^{\,2}}{T^2}}, \quad 2\,\nu\,\varkappa = \frac{(n_\infty^{\,2} - 1)\,G\,\frac{T_m}{T^2}}{\left(1 - \frac{T_m^{\,2}}{T}\right)^2 + G^2\,\frac{T_m^{\,2}}{T^2}}.$$

* * *

Wenden wir uns hiernach zu den aus der electromagnetischen Lichttheorie abgeleiteten Formeln des Herrn v. Helmholtz.

Die von demselben aufgestellte Gleichung (146) auf p. 396, welche lautet:

$$p = -\frac{q}{in} + \frac{1}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{1+h}{1-h}},$$

schreibt sich bei meiner Bezeichnung:

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{-1}\,q\,T + \frac{1}{v} = \frac{1}{V}\sqrt{\frac{1+h}{1-h}},$$

oder kürzer:

$$N^2 = (\sqrt{-1}\,\varkappa + \nu)^2 = \frac{1+h}{1+h}.$$

Entnehmen wir weiter den Werth von h der zweiten der Gleichungen (13c), so kommt:

$$N^2 = \frac{a^2 - m\,n^2 + k\,i\,n + 1}{a^2 - m\,n^2 + k\,i\,n - 1}.$$

Oder auch:

$$N^1 - 1 = \frac{2}{a^2 - m\,n^2 + k\,i\,n - 1}.$$

Darin sind a^2, m, k Constanter und bedeutet n die Schwingungszahl. Man kann dafür dann weiter schreiben:

$$N^2 - 1 = \frac{\frac{2}{m} T^2}{\left(\frac{a^2 - 1}{m}\right) T^2 - 1 + \sqrt{-1}\,\frac{k}{m}\, T}.$$

Führt man jetzt die Bezeichnungen ein:

$$\frac{2}{a^2 - 1} = n_\infty^2 - 1\,, \quad \frac{m}{a^2 - 1} = T_m'^2, \quad \frac{2}{m} = \frac{n_\infty^2 - 1}{T_m^2}\,, \quad \frac{k}{m} = -\frac{G}{T_m}$$

so erhält man die Dispersionsformel:

$$N^2 - 1 = \frac{(n\infty^2 - 1)\frac{T^2}{T_m^2}}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{1}\,G\,\frac{T^2}{T_m}}\,,$$

die sonach völlig mit Gleichung (d) *übereinstimmt.*

Vorläufig ist der Abhandlung nicht explicite zu entnehmen, ob T_m und G, wie es die optische Erfahrung zu verlangen scheint, von der Dichtigkeit unabhängig ist, und ob $(n\infty^2 - 1)$ den optischen Versuchen von Arago, Dulong und mir und den electrischen Versuchen von Boltzmann und Klemenčič entsprechend genau oder wenigstens genähert der Dichtigkeit proportional ist.

Würden diese Voraussetzungen zutreffen, so würde das für Gase von mir experimentell gefundene weitere Dispersionsgesetz, dass der Abstand zweier Spectrallinien eines Gasspectrums der Dichtigkeit des Gases proportional ist, auch durch die electromagnetische Lichttheorie erwiesen sein.

Münster i./W., im April 1893.

11. *Zur polarisirenden Wirkung der Lichtbeugung; von Karl Exner.*

Die experimentellen Studien über die durch Beugung bewirkte Polarisation des Lichtes haben zu wenig übereinstimmenden Resultaten geführt. Es schien mir deshalb eine Revision des Gegenstandes angezeigt, welche, wie ich glaube, zu einem einigermassen befriedigenden Resultate führte.[1])

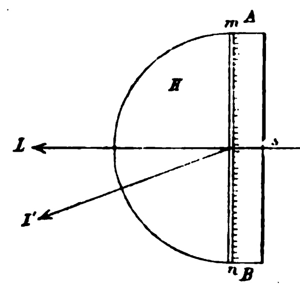
Schon Stokes erkannte die Schwierigkeiten, welche sich dem Experimente entgegenstellten. Man braucht grosse Beugungswinkel und ist folglich auf die Erscheinungen angewiesen, welche Glasgitter zeigen. Hier stösst man nun weiter auf zwei Schwierigkeiten:

1. Fällt ein Bündel paralleler Strahlen s senkrecht auf die erste, ungeritzte Fläche des Glasgitters, so tritt ein Theil dieses Bündels durch das Glas, begleitet von den an der zweiten, geritzten Fläche entstehenden gebeugten Bündeln. Heisse das $q$te dieser Bündel s_q. Ein anderer Theil des Bündels s wird an der zweiten Fläche des Glases reflectirt und ist ebenfalls begleitet von den durch Reflexion gebeugten Bündeln. Heisse das $q$te dieser gebeugten Bündel s'_q. Nachdem das Bündel s'_q an der ersten Fläche Reflexion und an der zweiten Brechung erlitten hat, geht es, wie eine einfache Rechnung zeigt, in derselben Richtung wie s_q. In dieser Richtung gehen überdiess noch andere, schwächere Bündel, welche wiederholte Reflexionen erlitten haben. Von allen diesen, in derselben Beugungsrichtung gehenden Bündeln ist es das Bündel s_q allein, dessen Polarisationszustand untersucht werden soll, während die übrigen Bündel beträchtliche Intensität und einen völlig abweichenden Polarisationszustand haben. Handelt es sich also um die Einwirkung lediglich der Beugung auf den Polarisationszustand, so müssen diese letzteren Bündel ausgeschlossen werden. Stokes vewendete zu diesem Zwecke ein sehr dünnes Bündel s und beobachtete ohne Fernrohr, so dass das Bündel s_q und die begleitenden Bündel getrennt wahrgenommen und bezüglich ihres Polarisationszustandes untersucht werden konn-

1) Karl Exner, Sitzgb. d. kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. 1890—92.

ten. Wenn man aber einen Collimator verwendet und mittels eines auf unendliche Entfernung eingestellten Fernrohrs beobachtet, so müssen alle jene Bündel zur Entstehung eines einzigen Bildes beitragen, dessen Polarisationszustand von jenem des Bündels s_q verschieden sein wird. Wenn die geritzte Fläche des Glases der Lichtquelle zugekehrt ist, ergeben sich analoge Verhältnisse.

2. Ist die geritzte Fläche eines Glasgitters dem Beobachter zugekehrt, so ist die polarisirende Wirkung der Beugung auch bei grossen Beugungswinkeln eine kaum merkliche; ist hingegen die geritzte Fläche der Lichtquelle zugekehrt, so erweist sich trotz der Brechung an der zweiten Fläche des Glases das gebeugte Licht stark wie durch Reflexion polarisirt. Man muss hieraus schliessen, dass der die Beugung begleitende Wechsel des Mittels von wesentlichem Einflusse auf den Polarisationszustand des gebeugten Lichtes ist. Es stellt sich also dem Experimente die weitere Schwierigkeit entgegen, dass zwei Ursachen für die Veränderung des Polarisationszustandes vorhanden sind: Die Beugung und der Wechsel des Mittels.



Stokes begegnete dieser Schwierigkeit mit einer Hypothese: Die Beugung bei gleichzeitigem Wechsel des Mittels sei so aufzufassen, als fände zuerst die Beugung (noch im ersten Mittel) nach dem Cosinusgesetze, und dann gewöhnliche Brechung statt.

Die nach dieser Hypothese gerechneten Zahlen stimmten mit den durch Messung gewonnenen überein, mochte die geritzte Fläche des Gitters dem Beobachter zu- oder abgekehrt sein. Gleichwohl ist diese Uebereinstimmung keineswegs eine so gute, dass man hiedurch die beiden Theile der Hypothese als erwiesen ansehen möchte.

Aus diesem Grunde suchte ich den Wechsel des Mittels ganz zu vermeiden und verfuhr in der folgenden Weise:

Das Glasgitter *AB* (vgl. die Fig.) ist mit der geritzten Fläche *mn* mittelst eines Tropfens Oel an eine Halbcylinderlinse *H* geklebt und die ungeritzte Fläche bis auf einen Spalt *s* mit

Asphaltfirniss überzogen. Die beiden Gläser, das Oel und der Firniss haben nahe den gleichen Brechungsindex. Diese Vorrichtung wird auf das Tischchen eines Spectrometers gesetzt. Das Spaltfernrohr ist von der Linse befreit und trägt ein drehbares Nicol. Das Beobachtungsfernrohr ist von beiden Linsen befreit und trägt ein drehbares, mit verticalem Theilkreise versehenes Nicol. Das vom Heliostaten kommende Sonnenlicht geht durch den Polarisator, dessen Hauptschnitt mit den verticalen Gitterstäben einen Winkel von 45° bildet, tritt durch den Spalt *s* und erfährt am Gitter *mn* Beugung. Das gebeugte Licht *L'* erfährt keinerlei Brechung und tritt durch den Analysator, durch welchen der Winkel der Polarisationsebene des gebeugten Lichtes mit der horizontalen Ebene (Beugungsebene) bestimmt wird.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate meiner Messungen bei dem eben beschriebenen Versuche. In derselben bedeutet θ den Beugungswinkel, φ die Drehung der Polarisationsebene im Sinne einer Annäherung an die Beugungsebene, φ' die nach dem Stokes'schen Cosinusgesetze gerechnete Drehung. Sämmtliche Zahlen bedeuten ganze Grade. Jede derselben wurde als Mittel aus zahlreichen Messungen innerhalb eines Spielraumes von je 5° Beugungswinkel gewonnen.

θ	φ'	φ	θ	φ'	φ
5°	0°	0°	50°	12°	14°
10	1	0	55	15	16
15	1	1	60	18	20
20	2	2	65	22	24
25	3	4	70	26	27
30	4	3	75	30	32
35	6	6	80	35	34
40	8	8	85	40	43
45	10	11	90	45	46

Diese Zahlen zeigen eine rohe aber doch sehr deutliche Uebereinstimmung mit dem Stokes'schen Cosinusgesetze.

Noch eine Fehlerquelle kann möglicherweise in dem durch die Furchen des Gitters zerstreuten Lichte liegen. Bei kleineren Beugungswinkeln, wo die Spectren noch getrennt wahrgenommen werden, stört diese Fehlerquelle nicht, da das Verschwinden eines solchen Spectrums oder eines Theiles dessel-

ben bei bestimmter Stellung des Analysators den Polarisationszustand des Spectrums, also des gebeugten Lichtes erkennen lässt. Bei grösseren Beugungswinkeln hingegen, wo die Spectra sich überdecken und einen gleichmässigen Lichtstreifen hervorbringen, ist man einer Täuschung ausgesetzt, da hier das gebeugte Licht nicht mehr von dem zerstreuten unterschieden wird. Wenn man aber mit homogenem Lichte arbeitet und das Lichtbild die Maxima zweiter Classe und die Minima erster Classe an richtiger Stelle zeigt, ist man wohl versichert, dass man es mit gebeugtem Lichte zu thun habe. So war es ein Fortschritt in der Methode der Beobachtung, wenn G. Quincke die Messungen auf die Maxima zweiter Classe bezog.

Um dieser möglichen Fehlerquelle Rechnung zu tragen, habe ich in Ergänzung der oben angeführten Messungen einen Controlversuch mit homogenem Sonnenlichte angestellt, dessen Resultate die folgende Tabelle enthält. In derselben bedeutet n die Ordnungszahl des Spectrums zweiter Classe. Die Spectra 6, 7, 8 waren durch die Nähe des ersten Minimums erster Classe zu sehr verdunkelt, um eine Messung zu gestatten.

n	θ	φ'	φ
1	4° 42′	0°	0°
2	9 24′	0	0
3	14 11′	1	1
4	19 4′	2	2
5	24 6′	3	3
9	47 20′	11	12

Diese Zahlen zeigen, das das untersuchte Licht bis zu einem Beugungswinkel von nahe 50 Graden von jeder merklichen Beimischung zerstreuten Lichtes frei war, wahrscheinlich aber weit über diese Grenze hinaus.

Diesen meinen Messungen, welche das Stokes'sche Cosinusgesetz bestätigen, hat jüngst Hr. Quincke seine eigenen früheren Messungen entgegengesetzt[1]). Obgleich nun Hrn. Quincke's experimentelle Resultate mit meinen eigenen Messungen in der That durchaus nicht übereinstimmen, kann doch, wie ich glaube, ebensowenig ein Gegensatz zwischen den bei-

1) G. Quincke, Wied. Ann., **47.** p. 765. 1892.

derseitigen Resultaten constatirt werden. Was nämlich zunächst Hrn. Quincke's Messungen bei reflectirt gebeugtem Lichte betrifft, so beziehen sich auf diesen Fall weder das Cosinusgesetz noch meine Messungen. Während ferner in Beziehung auf das durchgehend gebeugte Licht bei meinen Experimenten die Polarisation lediglich durch die Beugung hervorgebracht wurde, waren bei Hrn. Quincke's entsprechenden Experimenten noch andere Ursachen der Polarisation vorhanden, von denen oben ausführlicher die Rede war, beispielsweise der Wechsel des Mittels. Einzig ausgenommen hievon sind Hrn. Quincke's Messungen an Drahtgittern. Hier wurden aber nur kleine Beugungswinkel verwendet, welcher im äussersten Falle einen Grad kaum überstiegen, während bei meinen eigenen Messungen die kleinsten Beugungswinkel mehr als zwei Grade betrugen. Es scheint also, dass ein eigentlicher Widerspruch zwischen Hrn. Quincke's und meinen eigenen experimentellen Resultaten nicht zu constatiren sei.

Wien, März, 1893.

---

12. *Notiz zum Weber'schen Grundgesetz;*
von H. Lorberg.

In einem Aufsatze in den Compt. rend. 110. p. 825. 1890 behauptet Hr. Poincaré, dass nach dem Weber'schen Grundgesetz das Potential zweier Stromelemente aufeinander

(1) $$Q = -i i' d s d s' \cdot \frac{1}{r} \frac{d r}{d s} \frac{d r}{d s'}$$

sei, d. h. dass die in der Zeit dt geleistete ponderomotorische Arbeit

(2) $$A_p = \delta Q$$

sei, wo das Zeichen δ sich auf die Bewegung der zwei Stromelemente bezieht; und er findet es auffällig, dass hiernach die ponderomotorischen Kräfte zweier Stromelemente oder ungeschlossenen Ströme nach Weber ein Potential besitzen, während dies doch nach der Ampère'schen Formel, auf welche das Weber'sche Grundgesetz führt, bekanntlich nicht der Fall ist; er glaubt diesen anscheinenden Widerspruch dadurch erklären zu können, dass das Weber'sche Grundgesetz nur unter der Annahme einer gleichförmigen Strömungsgeschwindigkeit zu der Ampère'schen Formel führe, eine Annahme, welche für nicht geschlossene Ströme unzulässig sei. Diese in den Gleichungen (1) und (2) ausgesprochene Behauptung, welche der Verf. auch in seinem Buche „Electricität und Optik" II. p. 35 (1892) wiederholt, ist, soviel ich sehe, unrichtig, und damit fällt auch jener vermeintliche Widerspruch, welcher sich durch die angeführte Erklärung unmöglich würde beseitigen lassen, da das Weber'sche Grundgesetz eben unter der Annahme zu der Ampère'schen Formel führt, dass jedes Stromelement sich so verhält, *als ob* es einem gleichförmigen Strome angehörte. Aus dem Weber'schen Grundgesetz wie aus der Ampère'schen Formel ergibt sich nämlich die ponderomotorische Arbeit

$$(3)\quad A_p = \delta Q + i i' \, ds \, ds' \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{\delta r}{dt}\right) + \frac{d}{ds'}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{\delta r}{dt}\right)\right]$$

und nicht $A_p = \delta Q$, wie der Verf. behauptet. Wie die angezogene Stelle seines Buches zeigt, ist der Verf. zu diesem irrthümlichen Werth durch die Erwägung gekommen, dass nach dem Weber'schen Grundgesetz das System zweier Electricitätstheilchen e, e bekanntlich eine innere potentielle Energie

$$(4)\qquad P = -\frac{e e'}{2 c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

besitzt, d. h. dass die in der Zeit dt von den gegenseitigen Kräften geleistete Arbeit

$$(5)\qquad A = -\frac{dP}{dt}\cdot dt$$

ist, und dass man durch Summation der Werthe von P für die vier nach Weber in den zwei Stromelementen sich bewegenden Electricitätstheilchen den Ausdruck Q in Gleichung (1) erhält. Diese Summe besitzt aber gar nicht den Charakter eines Potentials, weder für die ponderomotorischen noch für die gesammten ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte; ersteres schon deshalb nicht, weil sich aus der Gesammtarbeit nichts über die ponderomotorische Arbeit allein schliessen lässt; letzteres deshalb nicht, weil aus der Gleichung (5) durchaus nicht für die Gesammtarbeit der Ausdruck $A = -dQ$ folgt, da die auf die vier Electricitätstheilchen bezügliche Summe ΣdP nicht $= d\Sigma P$ ist; denn in letzterem Ausdruck bezieht sich das Zeichen d bloss auf die Aenderung durch Bewegung der Leiter und durch Aenderung der Intensität, d. h. der Strömungsgeschwindigkeit, dagegen in ersterem auf die Strömungsgeschwindigkeiten selbst. Bezeichnet man mit δ, d', d'' die Aenderung durch Bewegung der Leiter, Intensitätsänderung und Strömung, so ist

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\delta P}{dt} + \frac{d' P}{dt} + \frac{d'' P}{dt},$$

und wenn man dies für die vier Theilchen summirt, erhält man

$$\sum \frac{\delta P}{dt} = \frac{\delta Q}{dt}, \quad \sum \frac{d' P}{dt} = \frac{d' Q}{dt}.$$

Dagegen in

$$\frac{d'' P}{d t} = \frac{d P}{d s}\frac{d s}{d t} + \frac{d P}{d s'}\frac{d s'}{d t}$$

hat ds/dt und ebenso ds'/dt für zwei entgegengesetzte Electricitätstheilchen entgegengesetzte Werthe; bezeichnet man die zwei Electricitätstheilchen in ds mit 1 und 2, in ds' mit 3 und 4, die Strömungsgeschwindigkeit nach ds und ds' mit u und u' und setzt

$$e = h\,d s, \quad e' = h' d s, \quad \frac{2 h u}{c} = i, \quad \frac{2 h' u'}{c} = i',$$

so wird

$$\sum \frac{d'' P}{d t} = u \frac{d}{d s}(P_{13} - P_{23} + P_{14} - P_{24}) + u' \frac{d}{d s'}(P_{13} + P_{23} - P_{14} - P_{24}),$$

wo

$$P_{13} = - d s\, d s' \frac{h h'}{2 c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{\delta r}{d t} + u \frac{d r}{d s} + u' \frac{d r}{d s'}\right)^2,$$

also

$$(6) \qquad \sum \frac{d'' P}{d t} = - i i' d s\, d s' \left[\frac{d}{d s}\left(\frac{1}{r}\frac{d r}{d s'}\frac{\delta r}{d t}\right) + \frac{d}{d s'}\left(\frac{1}{r}\frac{d r}{d s}\frac{\delta r}{d t}\right)\right].$$

Die Gesammtarbeit der ponderomotorischen und electromotorischen Kräfte ist also

$$(7) \qquad A = - \delta Q - d' Q - \sum \frac{d P''}{d t} d t$$

und die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte nach Gleichung (3)

$$(7\text{a}) \qquad A_p = \delta Q - \sum \frac{d'' P}{d t} d t,$$

woraus sich die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

$$A - A_p = - 2 \delta Q - d' Q$$

ergibt, übereinstimmend mit dem directen Resultat des Weber'schen Grundgesetzes. Dass den Gleichungen (7) und (6) zufolge das System zweier Stromelemente oder ungeschlossenen Ströme nach dem Weber'schen Grundgesetz keine Energiefunction in *dem* Sinne besitzt, dass der Zustand des Systems lediglich durch die Lage der Leiter und durch die Stromstärke bestimmt wäre; dass aber eine Energiefunction in diesem beschränkten Sinne in einem System, welches in jedem Punkte *verschieden*

gerichtete, von der Bewegung der ponderabeln Träger unabhängige Bewegungen enthält, durch die Principien der Mechanik auch gar nicht gefordert wird: darauf habe ich schon vor Jahren aufmerksam gemacht. [1])

Bonn, März 1893.

---

1) Lorberg, Pogg. Ann. **12.** p. 115. 1881.

13. *Ueber ein von Wertheim aufgestelltes Gesetz für die Elasticitätsconstanten fester Körper; von W. Voigt.*

Wertheim[1]) hat aus seinen Beobachtungen über den „Dehnungswiderstand" („Elasticitätcoefficienten") E einiger Metalle den Schluss gezogen, dass der Quotient dieser Zahl und der siebenten Potenz der Anzahl A der Atome auf der Längeneinheit für alle Metalle nahezu denselben Werth hat, sodass also $E / A^7 = K$ eine universelle Constante darstellen würde. So unvollkommen auch die Wertheim'schen Messungen diese Relation bestätigten — K ist nach ihm für Platin nahe 2,6 mal so gross, als für Kupfer —, so hat seine Regel doch ein gewisses Ansehen bewahrt, vielleicht wegen des Schlusses, den Wertheim aus ihr gezogen hat, dass nach ihr die Wechselwirkung zwischen den kleinsten Theilchen den fünften Potenzen ihres Abstandes indirect proportional sein müsste.

So hat Hr. Tomlinson[2]) in neuerer Zeit unter speciellem Hinweis darauf, dass die bekannte Arbeit Maxwell's über die kinetische Gastheorie von demselben Attractionsgesetz ausgeht, eine Prüfung der Wertheim'schen Regel und einiger daraus folgender Beziehungen unternommen, ist aber bezüglich der Constanz von K nicht zu wesentlich besseren Resultaten gelangt.

Die von mir unlängst für eine grössere Zahl nahe isotroper (oder quasi-isotroper) Metalle erhaltenen Elasticitätsconstanten gestatten nun, in weiterem Umfange und in durchgreifenderer Weise jene Regel zu prüfen. In der am Schluss dieser Arbeit gegebenen kleinen Tabelle enthält die fünfte Columne für elf Metalle Zahlen, welche mit E / A^7 proportional sind, nämlich die Werthe von $E / (\varepsilon / \gamma)^7$, wobei ε die Dichte der untersuchten Metalle nach den früher mitgetheilten Beobachtungen, und γ das Atomgewicht nach L. Meyer bezeichnet.

1) Wertheim, Ann. de Chim. (3) **12.** 385 (speciell p. 447 u. f.) 1844.

2) H. Tomlinson, Phil. Trans. **174.** p. 32. 1884; Proc. Roy. Soc. **38.** p. 488. 1885.

Man erkennt, dass die Unterschiede dieser Zahlen ja zwar erheblich kleiner sind, als die der in der ersten Columne gegebenen E, aber doch immer noch recht beträchtlich; der Werth für Wismuth ist das 2,8-fache von dem für Kupfer.

Dazu kommt, dass die Relation $E / A^7 = K$ gar nicht die ihr beigelegte physikalische Bedeutung hat. Es ist von vornherein unwahrscheinlich, dass durch Vergleichung der Constanten *verschiedener* Metalle eine Aufklärung über das zwischen den Theilen eines jeden einzelnen wirksamen Attractionsgesetzes gewonnen werden sollte, und in der That lässt sich der Wertheim'sche Schluss meines Erachtens nicht hinreichend begründen.

Es scheint mir aber nicht ohne Interesse, dass zwei der Wertheim'schen sehr ähnliche Relationen noch etwas besser als jene durch meine Beobachtungen bestätigt werden, welche eine sehr anschauliche physikalische Bedeutung besitzen, nämlich die Beziehungen $E / A^6 = K_1$ und $T / A^6 = K_2$, wo in letzterer T den Torsionswiderstand der Substanz, und K_1, K_2 je eine Constante bezeichnet. Analoge Formeln gelten natürlich für alle anderen elastischen Widerstände, indessen gehe ich nur auf E und T ein, da diese Grössen direct gemessen und daher relativ genau bekannt sind.

Der Sinn dieser Beziehungen erhellt aus der Ueberlegung, dass in Körpern mit nur einer Atomart, falls $f(r)$ das Gesetz der Wechselwirkung zwischen zwei Atomen bezeichnet, die auf die Flächeneinheit bezogenen Druckcomponenten gegen ein Flächenelement q, dessen Normale n ist, definirt sind durch die Formeln

$$X_n = \frac{1}{q} \sum \sum f(r) \cos(r, x),$$

$$Y_n = \frac{1}{q} \sum \sum f(r) \cos(r, y),$$

$$Z_n = \frac{1}{q} \sum \sum f(r) \cos(r, z).$$

Hierin bezieht sich die eine Summe Σ auf alle die *anziehenden* Massen, welche sich auf der einen Seite einer durch q gelegten Ebene befinden, die andere auf die *angezogenen* Massen, welche auf der anderen Seite dieser Ebene und zwar in einem

über q, parallel mit n errichteten geraden Cylinder liegen. Die Summen sind also im Grunde beide dreifache.

Ist die Anzahl der innerhalb der Wirkungssphäre liegenden Atome sehr gross, so kann man, vorausgesetzt, dass die der Grenze q unendlich nahe zweiter Ordnung gelegenen Massen keinen endlichen Antheil zu dem Werthe der Summe beitragen, die Summen in Raumintegrale verwandeln, wobei dann die Anzahl A^3 der Atome in der Volumeneinheit zweimal vor die Summe tritt. Man kann also schreiben:

$$X_n = \frac{A^6}{q}\int dv \int dv' f(r)\cos(r, x),$$

$$Y_n = \frac{A^6}{q}\int dv \int dv' f(r)\cos(r, y),$$

$$Z_n = \frac{A^6}{q}\int dv \int dv' f(r)\cos(r, z).$$

Die in A^6 multiplicirten Summen hängen nun nicht mehr von der wirklich im Körper vorhandenen Massenvertheilung ab, sondern nur noch von dem Gesetz der Elementarwirkung zwischen zwei Atomen. Sie stellen nämlich die Werthe dar, welche X_n, Y_n, Z_n annehmen würden, wenn in jedem Volumenelement dv nur je *ein* Atom läge.

Entwickelt man diese Ausdrücke in gewohnter Weise, um zu den Grundformen der Elasticität

$$- X_x = c\, x_x + c_1\, y_y + c_1\, z_z,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$- X_y = \frac{c - c_1}{2}\, x_y$$

zu gelangen, so erkennt man, dass die Constanten c und c_1 den Factor A^6 erhalten und, in ihn multiplicirt, je einen nur von der Elementarwirkung abhängenden Term, sodass man schreiben kann:

$$c = A^6 c', \quad c_1 = A^6 c_1'.$$

Nun sind die elastischen Widerstände linear in den Elasticitätsconstanten, man kann unter den gemachten Voraussetzungen also auch setzen:

$$E = A^6 E', \quad T = A^6 T',$$

worin E' und T' allein von dem Elementargesetz der Wechselwirkung zwischen zwei Atomen abhängen.

Ergibt nun die Beobachtung für verschiedene Metalle nahezu gleiche Werthe der Verhältnisse E/A^6 und T/A^6, so folgt daraus die Constanz von E' und T', und diese hat man dahin zu deuten, dass für jene Metalle die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Atomen bei gleicher Entfernung nahezu gleiche Intensität besitzt.

Die folgende Tabelle enthält in der sechsten und siebenten Columne die Werthe der mit E/A^6 resp. T/A^6 proportionalen Grössen $E.(\gamma/\varepsilon)^2$ und $T.(\gamma/\varepsilon)^2$.

	$E.10^{-6}$	$T.10^{-6}$	ε	γ	$E.(\gamma/\varepsilon)^{7/3}.10^{-8}$	$E.(\gamma/\varepsilon)^2.10^{-8}$	$T.(\gamma/\varepsilon)^2.10^{-8}$
Al	6,57	2,58	2,676	27,03	31,2	6,70	2,63
Cd	7,07	2,45	8,665	111,7	59,4	11,77	4,08
Fe	12,8	5,21	7,188	55,9	33,0	7,74	3,15
Au	7,58	2,85	19,284	196,2	36,6	7,84	2,95
Cu	10,85	4,78	8,860	63,2	22,9	5,52	2,43
Mg	4,26	1,71	1,741	23,95	41,6	8,06	3,24
Ni	20,3	7,82	8,795	58,0	35,7	8,82	3,40
Ag	7,79	2,96	10,493	107,7	39,3	8,40	3,12
Bi	3,19	1,24	10,05	207,5	80,4	13,61	5,29
Zn	10,3	3,88	7,212	64,9	37,4	8,34	3,14
Sn	5,41	1,73	7,328	117,5	75,6	13,91	4,45

Man erkennt, dass *erheblich* aus der Reihe der übrigen Zahlen nur die Werthe für Cd, Bi und Sn herausfallen, Werthe, die in der That auch zu den zweifelhaftesten gehören, da Cd und Sn äusserst ductil und daher Veränderungen durch mechanische Einwirkung sehr ausgesetzt sind, Bi wegen der höchst groben krystallinischen Structur nicht mit voller Sicherheit als quasi-isotrop betrachtet werden kann. Aber auch wenn man diese Zahlen beibehält, da eine *grosse* Abweichung von dem wahren Werth nicht eben wahrscheinlich ist, erreicht das Verhältniss der Zahlen in der vorletzten Columne nur 2,5, in der letzten nur 1,6. Insbesondere ist die nahe Uebereinstimmung der Werthe für Fe, An, Mg, Ni, Ag, Zn von Interesse, bei denen die elastischen Widerstände E und T zum Theil ganz ausserordentlich abweichen.

Eine vollständige Gleichheit ist natürlich bei Substanzen, deren Constanten die Poisson'sche Relation $T/E =$ const. nicht befolgen, nicht möglich; dies hängt damit zusammen, dass auf E und T bei quasi-isotropen Körpern die krystallinische Structur einwirkt. Man könnte daher versucht sein, die Prüfung der aufgestellten Relation statt an E und T lieber

an den Widerstand K der kubischen Compression anzuknüpfen, welcher von jenem Einfluss frei sein muss; indessen ist eine directe Beobachtung von K, so wichtig sie wäre, äusserst schwierig und seine Berechnung aus E und T ungenau, daher hat auch eine auf diese Grösse begründete Berechnung wenig Beweiskraft. Ich will demgemäss nur mittheilen, dass $K(\gamma / \varepsilon)^2$ für Al, Fe, An, Mg, Ni, Ag, Zn im Mittel gleich $6{,}4 . 10^{+8}$ ist und der Werth, den man für Hg bei Zugrundelegung des Mittelwerthes $K = 3{,}2 . 10^{-6}$ aus den vorliegenden, in sich wenig stimmenden Beobachtungen[1]) erhält, nämlich $6{,}9 . 10^{+8}$, hiermit recht gut übereinstimmt.

Was die erhaltenen Resultate lehren, ist insbesondere dieses.

Man betrachtet es vielfach als nahezu selbstverständlich, dass die Wechselwirkungen zwischen den Atomen, auf denen die Elasticitätserscheinungen beruhen, die Form des Newton'schen Gesetzes insoweit besitzen, als sie dem Product der sich anziehenden Massen proportional sind, sodass also

$$f(r) = m . m' . F(r)$$

gesetzt wird, wo $F(r)$ eine universelle Function bezeichnet.

Ein solcher Ansatz ist den obigen Resultaten gegenüber nicht zu halten, denn er würde — die gemachten Voraussetzungen zugestanden — auf elastische Widerstände führen, die mit dem Quadrat der Dichtigkeit proportional sind. Die Tabelle zeigt aber, dass für die grosse Mehrzahl der untersuchten Metalle, trotz des vom einfachen bis zum zehnfachen variirenden Atomgewichtes (was einem vom einfachen bis zum hundertfachen variirenden Product $m . m'$ entspricht) die Grösse der Wechselwirkung $f(r)$ zwischen zwei Atomen sehr nahe dieselbe ist. Dieser Umstand legt wiederum von einer neuen Seite her die Vorstellung nahe, dass nicht die ponderabeln Massen bei den Processen im Innern der Körper die Wirkungen bestimmen, sondern ihnen mitgetheilte, etwa electrische Ladungen.

Hierin liegt das Interesse, welches die oben zusammengestellten Zahlen besitzen.

Göttingen, März 1893.

1) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 203. 1889.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1893. ANNALEN № 7.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 49.

1. *Ueber die specifischen Wärmen verschieden zusammengesetzter Gläser; von A. Winkelmann.*

Eine Untersuchung über die thermische Leitungsfähigkeit verschiedener Gläser, die im hiesigen Institut von Hrn. Paalhorn ausgeführt wurde, liess es wünschenswerth erscheinen, die specifische Wärme der Gläser kennen zu lernen, um eventuell einen Zusammenhang der genannten beiden Grössen aufzudecken. Dies war die erste Veranlassung zu der im Folgenden mitgetheilten Untersuchung, die sich auf 18 verschiedene Gläser erstreckt; gleichzeitig sollte dieselbe Aufschluss darüber geben, mit welcher Genauigkeit sich die specifische Wärme eines Glases berechnen lässt, wenn seine chemische Zusammensetzung gegeben ist.

Eine systematische Untersuchung verschiedener Gläser in Bezug auf ihre specifische Wärme ist, soviel mir bekannt, bisher noch nicht ausgeführt. Die von Regnault und Dulong und Petit untersuchten vier Gläser[1]) zeigen in ihren specifischen Wärmen nur geringe Unterschiede (4 Proc.). Dagegen ist die specifische Wärme einer grösseren Anzahl von Mineralien untersucht und zwar von F. E. Neumann[2]), Regnault[3]), Kopp[4]), Oeberg[5]) und Sella.[6]) Aus diesen Untersuchungen geht hervor, dass sich die specifische Wärme eines Minerals aus der chemischen Zusammensetzung berechnen lässt; allerdings kommen Unterschiede zwischen Beobachtung und Berechnung von 8 Proc. vor.

1) Landolt-Bornstein, Physik.-chem. Tabellen p. 70 c. 1883.
2) F. E. Neumann, Pogg. Ann. **23.** p. 1. 1831.
3) Regnault, Pogg. Ann. **53.** p. 60. 243. 1841.
4) Kopp, Lieb. Ann. **3.** Suppl. p. 1. 289. 1864.
5) Oeberg, Stockholmer Academ. Nr. 8. p. 43. 1885; Beibl. **12.** p. 521. 1888.
6) Sella, Göttinger Nachrichten p. 311. 1891.

Hr. Dr. Schott stellte aus den Beständen des hiesigen glastechnischen Laboratoriums mit bekannter Bereitwilligkeit die zu untersuchenden Gläser nebst Angabe ihrer chemischen Zusammensetzung zur Verfügung und gewährte durch vielfache Winke sowohl bei der Auswahl der Gläser als auch bei der späteren Ausführung der Versuche eine werthvolle Unterstützung.

§ 1. Methode.

Die angewandte Methode war die Regnault'sche. Die Gläser wurden in kleinen Stücken in ein Körbchen von Messingdraht gelegt und dieses wurde in einem Heizapparate an einem Seidenfaden so befestigt, dass das Gefäss des die Temperatur angebenden Thermometers sich in der Mitte des Körbchens befand. Der Heizapparat bestand aus drei coaxialen Cylindern; durch die beiden Zwischenräume dieser Cylinder strömte der Wasserdampf eines Kochapparates, während in dem inneren Cylinder sich das Körbchen mit dem Thermometer befand. Der zuletzt genannte Cylinder war unten durch eine aufgeschliffene Metallplatte verschliessbar und trug oben eine ebenfalls aufgeschliffene Metallplatte, in der sich ein gut schliessender Kork befand, der das Thermometer und den Seidenfaden hindurchliess.

Nachdem die Temperatur des Thermometers hinreichend lange constant geworden war (es nahm dies etwa $2^1/_2$ Stunden in Anspruch), wurde das Körbchen mit den Glasstücken in ein unter den Heizapparat geschobenes Calorimeter herabgelassen, unmittelbar, nachdem durch einen Gehülfen die untere Verschlussplatte des Cylinders zur Seite geschoben war.

Das cylinderförmige Calorimeter von 10 cm Höhe und 9 cm Durchmesser bestand aus Messing; die benutzte Wassermenge war rund 500 g. Das Calorimeter stand zum Schutze gegen äussere Einflüsse auf drei Korkstückchen in einem zweiten Cylinder von 10,8 cm Durchmesser.

Das im Calorimeter verwandte Thermometer war in $0,1^0$ getheilt; 1^0 hatte eine Länge von 0,8 cm, sodass man mit Hülfe einer Lupe noch $0,01^0$ ablesen konnte; es wurde mit einem Normalthermometer Nr. 233, dessen Angaben auf das Gasthermometer reducirt waren, verglichen.

Das im Heizapparate gebrauchte Thermometer war gleich-

falls in 0,1° getheilt; da die abzulesenden Temperaturen in der Nähe von 100° lagen, wurde die Correction durch directe Beobachtung in Wasserdämpfen ermittelt.

In dem Calorimeter befand sich ausser dem Thermometer noch ein Rührer, der vor dem Eintauchen des Körbchens gebraucht wurde, um den Gang der Temperatur festzustellen und diesen zur späteren Ermittelung des Einflusses der Umgebung zu benutzen. Nach dem Eintauchen des Körbchens wurde mit diesem selbst, durch den Seidenfaden gehalten, das Rühren bis zum Schlusse des Versuches fortgesetzt.

§ 2. Berechnung der Versuche.

Die Berechnung eines Versuches wurde nach der Formel

$$(p \cdot c + B)\{T - (t_2 + \Delta t_2)\} = (P + A)(t_2 + \Delta t_2 - t_1)$$

ausgeführt. Es bedeutet:

p das Gewicht des untersuchten Glases in Gramm;

c die gesuchte specifische Wärme des Glases;

P das Gewicht des Wassers in Gramm;

A den Wasserwerth des Calorimeters, Rührers und Thermometers;

B den Wasserwerth des Messingkörbchens;

T die Temperatur der Substanz vor dem Eintauchen;

t_1 die Anfangstemperatur des Calorimeters;

t_2 die Endtemperatur des Calorimeters;

Δt_2 die Correction an t_2, die den Einfluss der Umgebung berücksichtigt.

Zur Bestimmung des Wasserwerthes A wurde die specifische Wärme des Messings gleich 0,093 gesetzt. Das Calorimeter, welches nahe bis an den Rand gefüllt wurde, wog 142,70 g, der Wasserwerth ist 13,27. Der Wasserwerth des Rührers und Thermometers, letzterer aus den Dimensionen abgeleitet, ist 1,86; daher $A = 15,13$.

Es wurden zwei Körbchen aus Messing benutzt; ihr Wasserwerth ist 2,864 resp. 2,184; vgl. § 3.

Um die Berechnung der Correction Δt_2 zu zeigen, möge eine vollständige Beobachtungsreihe mitgetheilt werden. Die Anfangstemperatur wurde meistens so gewählt, dass keine oder nur eine geringe Aenderung mit wachsender Zeit eintrat; es wurde dies dadurch erreicht, dass man das Calorimeter längere

Zeit vor dem Versuche an den für dasselbe bestimmten Ort brachte und dann unmittelbar vor dem Versuche das Gewicht des Wassers bestimmte. Die Ablesungen der Calorimetertemperaturen geschahen von 20 zu 20 Secunden.

Glas S. 201.

Temperatur	Secunden	Intervalle	
14,645	0	0	
14,655	60	3	
14,655	120	6	
14,660	180	9	
—	200	10	Mom. d. Eint.: $\Theta_0 = 14,662$.
15,08	220	11	
17,92	240	12	
18,06	260	13	
18,065	280	14	
18,065	300	15	$\Theta_n = 18,065$.
18,055	320	16	
18,05	340	17	
18,04	360	18	
18,03	380	19	
18,03	400	20	
18,02	420	21	

Die Bestimmung der Correction $\varDelta t_2$ wurde nach der Formel von Pfaundler[1])

$$\varDelta t_2 = n \,.\, v + \frac{v' - v}{t' - t} \left\{ \sum_1^{n-1} \Theta + \frac{\Theta_0 + \Theta_n}{2} - n \,.\, t \right\}$$

ausgeführt. Hier bedeutet:

v die Temperaturänderung pro Intervall von 20 Sec. *vor* dem Eintauchen; in dem obigen Beispiel ist

$$v = -\frac{0,015}{9} = -0,0017;$$

v' die Temperaturänderung pro Intervall *nach* dem Eintauchen, nachdem diese Aenderung constant geworden ist; in dem obigen Beispiel trifft dies vom 15. Intervall an zu; es ist

$$v' = \frac{0,045}{6} = 0,0075$$

t die mittlere Temperatur vor dem Eintauchen, $t = 14,65$;

t' die mittlere Temperatur nach dem Eintauchen, nachdem v' constant geworden, $t' = 18,04$;

Θ_0 die Temperatur im Moment des Eintauchens, $\Theta_0 = 14,662$;

1) Pfaundler, Pogg. Ann. **129.** p. 117. 1866.

Θ_n die Endtemperatur nach dem Ausgleich, $\Theta_n = 18{,}065$;
n die Zahl der Intervalle von Θ_0 bis Θ_n, $n = 5$.

Mit diesen Werthen wird $\Delta t_2 = 0{,}0245$, ferner $(t_2 + \Delta t_2 - t_1) = (\Theta_n + \Delta t_2 - \Theta_0) = 3{,}427$.

Bei dem so schnell verlaufenden Versuche lässt sich mit genügender Genauigkeit die Berechnung der Correction etwas kürzer in folgender Weise gestalten. Es werden v und v' berechnet; die Anfangstemperatur ist 14,662, die Endtemperatur 18,065 wie oben. Für das Intervall 10—11 beträgt die Correction nahezu v, weil die Temperatur 15,08 nur wenig von 14,66 abweicht. Unter der gleichen Voraussetzung beträgt die Correction für das Intervall 11—12 $\frac{1}{2}(v' + v)$; für jedes Intervall 12—15 beträgt die Correction v', weil die Temperatur sich nur wenig ändert. Man hat daher

Intervall	10—11,	Correction	$= v$	$= -0{,}0017$
„	11—12,	„	$= \frac{1}{2}(v' + v)$	$= +0{,}0029$
„	12—15,	„	$= 3v'$	$= +0{,}0225$
				$\Delta t_2 = +0{,}0237$

in naher Uebereinstimmung mit dem früher bestimmten Werth $\Delta t_2 = 0{,}0245$.

Ferner war in dem oben angegebenen Versuche: $T = 99{,}24$; $P = 534{,}23$; $A = 15{,}13$; $B = 2{,}864$; $p = 107{,}21$; $t_2 + \Delta t_2 = 18{,}089$; $t_1 = 14{,}662$.

Diese Werthe liefern $c = 0{,}1897$.

Es möge bemerkt werden, dass die Correction Δt_2 im Mittel 0,023 betrug, und da die Temperatursteigerung, die das Calorimeter erfuhr, grösser als 3° war, ist Δt_2 geringer als 1 Proc. dieses Werthes.

§ 3. Beobachtungen.

Im Folgenden sind die Beobachtungen nach der Grösse der specifischen Wärme geordnet. In der zweiten Verticalreihe ist neben der fortlaufenden Nummer die Fabriknummer des betreffenden Glases angegeben. Die Bedeutung der an der Spitze der Reihen stehenden Buchstaben ist die gleiche wie in § 2.

Tabelle I.

$A = 15{,}13.$

Fortl. Nr.	Fabrik-Nr.	T	$t_2 + \Delta t_2$	$(t_2 + \Delta t_2) - t_1$	P	B	p	c	Mittel von c
1	S. 185	99,34	19,83	3,556	532,48	2,864	93,26	0,2319	0,2318
		99,47	17 48	3,590	542,14	2,184	96,22	0,2309	
		99,42	18,87	3,772	529,79	2,184	100,31	0,2326	
2	S. 205	99,50	17,80	3,430	542,11	2,864	94,33	0,2176	0,2182
		99,05	17,35	3,550	541,70	2,184	100,67	0,2186	
		99,01	19,50	3,609	530,10	2,184	103,30	0,2184	
3	172III	99,42	17,98	3,231	520,49	2,864	87,87	0,2090	0,2086
		99,40	18,71	2,827	518,67	2,864	76,06	0,2082	
4	164III	99,46	17,69	3,770	529,33	2,184	112,02	0,2046	0,2044
		99,50	17,51	3,431	516,16	2,864	94,88	0,2041	
5	802	99,45	18,29	3,376	508,10	2,864	93,08	0,2031	0,2038
		99,77	18,39	3,295	522,10	2,864	92,95	0,2032	
		99,90	18,09	3,475	526,94	2,184	101,80	0,2050	
6	16III	99,66	18,65	4,018	513,86	2,184	120,81	0,1991	0,1988
		99,60	18,77	3,759	514,51	2,184	113,06	0,1986	
7	165III	99,50	19 13	3,977	519,27	2,184	124,10	0,1955	0,1958
		99,50	17,41	3,316	526,47	2,864	96,90	0,1962	
8	1419	99,71	18 01	3,657	526,09	2,864	111,72	0,1912	0,1907
		99,40	18,78	3,745	531,26	2,184	121,88	0,1903	
9	S. 201	99,24	18,09	3,427	534,23	2,864	107,21	0,1897	0,1901
		99,20	18,29	3,652	524,95	2,184	116,72	0,1901	
		98,98	17,32	3,541	525,52	2,864	108,13	0,1904	
10	290	99,58	18,81	3,460	530,53	2,864	108,68	0,1887	0,1887
		99,55	18,06	3,767	513,14	2,184	117,92	0,1886	
		99,41	17,52	3,475	514,01	2,864	103,76	0,1888	
11	665	99,78	19,56	3,850	541,67	2,864	144,75	0,1648	0,1644
		99,74	17,31	3,942	525,46	2,184	144,18	0,1642	
		99,61	18,10	3,632	530,75	2,864	130,70	0,1642	
12	121III	99,64	17,53	3,355	531,65	2,184	124,93	0,1613	0,1617
		99,58	19,40	3,096	531,38	2,184	116,63	0,1623	
		99,39	17,58	3,130	531,47	2,184	115,90	0,1616	
13	S. 206	98,97	18,82	3,595	537,89	2,184	142,72	0,1585	0,1589
		99,01	17,48	3,572	524,05	2,864	130,78	0,1587	
		99,15	19,40	3,575	524,85	2,184	138,07	0,1595	
14	S. 95	99,10	18,62	3,443	529,03	2,864	139,52	0,1463	0,1464
		99,19	17,21	3,390	530,07	2,184	138,72	0,1468	
		99,27	18,00	3,391	528,30	2,864	135,64	0,1461	
15	1442	99,59	19,03	3,695	529,03	2,184	163,08	0,1398	0,1398
		99,70	19,33	3,787	522,22	2,184	165,42	0,1399	
16	S. 120	99,43	17,87	3,595	512,05	2,184	155,12	0,1357	0,1359
		99,42	17,97	3,640	512,51	2,184	157,57	0,1358	
		99,30	18,07	3,551	521,78	2,184	156,45	0,1361	
17	O. 331	99,50	17,42	3.634	533,43	2,184	176,28	0,1254	0,1257
		99,51	18,68	3,250	521,23	2,864	148,46	0,1260	
18	S. 163	99,50	18,34	3,396	469,64	2,864	214,30	0,08130	0,08174
		99.50	18,19	3,417	471,48	2,864	214,63	0,08188	
		99,37	18,38	3,410	550,15	2,184	263,46	0,08205	

Die Differenz der Einzelwerthe erreicht bei keinem Glase 1 Proc.; das Glas Nr. 5 zeigt die Maximaldifferenz von 0,93 Proc. Jene Gläser, für welche drei Beobachtungen angestellt sind, wurden zuerst untersucht; später begnügte man sich mit zwei Beobachtungen als ausreichend.

Die Frage, ob die Versuche *constante* Fehlerquellen enthalten, hat sich besonders auf drei Punkte zu erstrecken: 1. Besitzt die Substanz im Moment des Eintauchens jene Temperatur, die sie im Heizapparate hatte? 2. Welchen Einfluss hat ein Fehler in dem Wasserwerthe A auf das Resultat? 3. Wie wirken constante Fehler in den Temperaturangaben?

ad 1. Da das Körbchen mit der Substanz unmittelbar nach dem Oeffnen des Schiebers in sehr kurzer Zeit (einem Bruchtheil einer Secunde) in das Wasser des Calorimeters, welches eine vorher genau fixirte Stellung hatte, eingetaucht wurde, ist die Wärmeabgabe an die äussere Luft nur gering. Regnault[1]) hat gezeigt, wie man derselben Rechnung tragen kann, indem man die Erwärmung des Calorimeters durch eine Substanz *ohne* Körbchen und dann durch die gleiche Substanz *mit* dem Körbchen beobachtet. Ich habe drei Versuche mit einem Körbchen allein (d. h. ohne Glas, im übrigen aber in der gleichen Weise wie bei den sonstigen Versuchen) ausgeführt und für den Wasserwerth des Körbchens, das aus Messingdraht bestand, 2,184 gefunden. Da das Körbchen 24,23 g wiegt, so würde sich mit der specifischen Wärme 0,093 des Messings, für den Wasserwerth 2,251 berechnen. Der beobachtete Werth 2,184, der dem abkühlenden Einflusse des Weges vom Heizgefäss zum Calorimeter Rechnung trägt, wurde den Berechnungen zu Grunde gelegt. Berechnet man aus diesem Werthe die (scheinbare) specifische Wärme des Messings, so findet man 0,09015. Mit diesem Werthe wird der Wasserwerth des zweiten Körbchens von 31,76 g gleich 2,864, der der Berechnung zu Grunde gelegt ist. Es wurde ferner zur Controlle die specifische Wärme des Messings untersucht. Zu dem Zwecke wurden 335,77 g Messing in das Körbchen, dessen Wasserwerth 2,864 ist, gebracht und in der gewöhnlichen Weise untersucht. Die Resultate der beiden Beobachtungen sind folgende:

1) Regnault, Pogg. Ann. 122. p. 272. 1864.

T	$(t_2+\Delta t_2)$	$\frac{(t_2+\Delta t_2)}{t}$	P	A	B	p	c
98,99	17,92	5,078	530,23	15,13	2,864	335,77	0,09320
99,07	20,46	4,992	522,82	15,13	2,864	335,77	0,09321

Dass die beiden Werthe von c fast identisch sind, beruht auf Zufall.

Um den Einfluss eines Fehlers in dem Wasserwerthe B auf das Endresultat zu zeigen, wurde in dem Beispiel des § 2 der Wasserwerth von B um 1 Proc. grösser angenommen. Man erhält dann für die specifische Wärme 0,1894 statt des früheren Werthes 0,1897, also eine Differenz von 0,16 Proc.

ad 2. Der Wasserwerth A des Calorimeters, Rührers und Thermometers lässt sich experimentell nur schwer bestimmen. Das Calorimeter, welches nahe bis zum Rande gefüllt war, repräsentirt nach dem Einbringen der Substanz einen etwas grösseren Wasserwerth als vorher. Beim Thermometer ist wegen der schlechten Wärmeleitung des Glases eine Unsicherheit über das Glasgewicht vorhanden, welches in Rechnung zu ziehen ist; dieser Einfluss ist um so grösser, je dicker der Stiel des Thermometers ist. Es hat aber bei dem benutzten grossen Wassergewicht selbst ein grösserer Fehler von A nur einen kleinen Einfluss auf c; würde man in A einen Fehler von 3 Proc. voraussetzen, so würde sich in dem früher gegebenen Beispiel c blos um 0,10 Proc. ändern.

ad 3. Bei der Temperaturdifferenz $\{T-(t_2+\Delta t_2)\}$ ist ein kleiner Fehler in den Hunderteln ohne Belang. Bei der Temperaturdifferenz $(t_2+\Delta t_2-t_1)$ ist dagegen ein Fehler von grösserer Bedeutung; da aber beide Temperaturen t_1 und t_2 an dem gleichen Thermometer abgelesen werden, ist ein *constanter* Fehler, der $0,01^0$ überschreitet, unwahrscheinlich; dieser hätte auf c einen Einfluss von 0,33 Proc.

Fasst man das Gesagte zusammen, so ergibt sich, dass die *constanten* Fehler im ungünstigsten Falle zusammen die Höhe von 0,6 Proc. erreichen.

§ 4. Berechnung der specifischen Wärmen aus der chemischen Zusammensetzung.

Nach dem Wöstyn'schen Gesetz[1]) ist

$$C = \frac{n_1 . a_1 . c_1 + n_2 . a_2 . c_2 + n_3 . a_3 . c_3 + \ldots}{n_1 . a_1 + n_2 . a_2 + n_3 . a_3 + \ldots}$$

Hier bezeichnet

C die gesuchte specifische Wärme der Verbindung;

$c_1, c_2 \ldots$ die specifischen Wärmen der Elemente;

$a_1, a_2 \ldots$ die Atomgewichte der Elemente,

$n_1, n_2 \ldots$ die Zahl der einzelnen Atome, die in der Verbindung enthalten sind.

Kopp[2]) hat nach der gleichen Formel eine grosse Anzahl von starren Verbindungen berechnet und dabei für alle Elemente das Product $c . a$ (die Atomwärme) gleich 6,4 gesetzt mit Ausnahme folgender Elemente:

für	*S* und *P*	wurde	$c . a$	gesetzt	5,4
,,	*Fl*	,,	,,	,,	5,0
,,	*O*	,,	,,	,,	4,0
,,	*Si*	,,	,,	,,	3,8
,,	*B*	,,	,,	,,	2,7
,,	*H*	,,	,,	,,	2,3
,,	*C*	,,	,,	,,	1,8

Nach den Kopp'schen Atomwärmen erhält man für die specifischen Wärmen der einzelnen Bestandtheile, die in den untersuchten Gläsern vorkommen, folgende Werthe:

(I)

	Specifische Wärme[3])		Specifische Wärme
ZnO	0,128	BaO	0,0680
B_2O_3	0,249	Mn_2O_3	0,1574
Al_2O_3	0,241	Na_2O	0,2709
SiO_2	0,197	K_2O	0,1787
As_2O_5	0,125	Li_2O	0,5600
PbO	0,0466	CaO	0,1860
MgO	0,260	P_2O_5	0,2169

1) Wöstyn, Pogg. Ann. 76. p. 129. 1849.

2) Kopp, Lieb. Ann. Suppl. 3. p. 329 (1864 u. 1865).

3) Die Werthe der ersten Verticalreihe sind von Kopp berechnet; die Werthe der zweiten Verticalreihe von BaO bis P_2O_5, die von Kopp nicht angegeben sind, wurden von mir berechnet.

Tabelle II.

Chemische Zusammensetzung.

Laufende Nr.	Fabrik-Nr.	SiO_2	B_2O_3	ZnO	Pb.O	MgO	Al_2O_3	As_2O_5	BaO	Na_2O	K_2O	Li_2O	CaO	P_2O_5	Mn_2O_3
1	S. 185	—	71,8	—	—	—	22,4	—	—	—	—	5,8	—	—	—
2	S. 205	—	69,1	—	—	—	18,0	0,2	4,7	8,0	—	—	—	—	—
3	172III	64,4	12,0	—	—	11,0	4,5	—	—	8,0	—	—	—	—	0,1
4	164III	55,0	—	—	—	—	17,0	—	—	14,0	14,0	—	—	—	—
5	802	71,0	14,0	—	—	—	5,0	—	—	10,0	—	—	—	—	—
6	16III [1])	67,8	2,0	7,0	—	—	2,5	—	—	14,0	—	—	7,0	—	0,2
7	165III	73,8	—	5,0	—	—	3,5	—	—	10,5	—	—	7,0	—	0,2
8	1419	67,9	—	5,8	8,1	—	1,0	0,3	—	16,8	—	—	—	—	0.1
9	S. 201	—	3,0	—	—	—	10,0	0,5	—	—	12,0	—	—	70,5	—
10	290	58,7	—	—	—	—	—	0,3	—	—	33,0	—	8,0	—	—
11	665	—	41,0	59,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	121III	51,8	14,0	5,0	—	—	4,5	0,2	25,0	—	—	—	—	—	—
13	S. 206	—	3,0	—	—	—	8,0	1,5	28.0	—	—	—	—	59,5	—
14	S. 95	—	3,0	—	—	—	1,5	1,5	3,8	—	—	—	—	56,0	—
15	1442	34,2	10,2	7,8	—	—	5,0	0,7	42,1	—	—	—	—	—	—
16	S. 120	—	42.8	—	52,0	—	5,0	0,2	—	—	—	—	—	—	—
17	O. 331 [2])	45,22	—	—	46,0	—	—	0,2	—	1,0	7,5	—	—	—	0,08
18	S. 163	22,0	—	—	78,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1) Thermometernormalglas. 2) Gewöhnliches Flintglas.

Führt man mit diesen Werthen die Berechnung nach der Formel

$$C = \frac{p_1 \cdot k_1 + p_2 \cdot k_2 + p_3 \cdot k_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}$$

durch, wo $k_1, k_2 \ldots$ die specifischen Wärmen der Bestandtheile, $p_1, p_2 \ldots$ die Gewichtsmengen dieser Bestandtheile in dem betreffenden Glase bedeuten, so erhält man in der Tabelle III die Werthe, die unter „berechnet Kopp" stehen. Die Tabelle II gibt die chemische Zusammensetzung der Gläser in übersichtlicher Darstellung an.

Tabelle III.

Specifische Wärme.

Nr.	beobachtet	berechnet Kopp	beob.-ber. in Proc.	berechnet Winkelmann	beob.-ber. in Proc.
1	0,2318	0,2652	− 14,4	0,2488	− 7,3
2	0,2182	0,2406	− 10,3	0,2262	− 3,7
3	0,2086	0,2180	− 4,5	0,2092	− 0,3
4	0,2044	0,2122	− 3,8	0,2040	+ 0,2
5	0,2038	0,2139	− 5,0	0,2068	− 1,7
6	0,1988	0,2038	− 2,5	0,1985	+ 0,2
7	0,1958	0,2020	− 3,2	0,1964	− 0,3
8	0,1907	0,1935	− 1,5	0,1888	+ 1,0
9	0,1901	0,2169	− 14,1	0,1947	− 2,4
10	0,1887	0,1898	− 0,6	0,1893	− 0,3
11	0,1664	0,1776	− 8,0	0,1710	− 4,0
12	0,1617	0,1704	− 5,4	0,1640	− 1,4
13	0,1589	0,1766	− 11,0	0,1576	+ 0,8
14	0,1464	0,1603	− 9,5	0,1442	+ 1,5
15	0,1398	0,1442	− 3,2	0,1389	+ 0,7
16	0,1359	0,1431	− 5,3	0,1388	− 2,1
17	0,1257	0,1272	− 1,2	0,1272	− 1,2
18	0,08174	0,07969	+ 2,5	0,08201	− 0,3

Die Differenzen zwischen den beobachteten und den nach Kopp berechneten Werthen sind theilweise bedeutend und steigen bis zu 14,4 Proc. Es war dieses Resultat nach den Vergleichungen, die Kopp selbst zwischen den beobachteten und berechneten specifischen Wärmen zahlreicher Verbindungen angestellt, zu erwarten; so ist, um nur ein Beispiel anzuführen, die von Kopp berechnete specifische Wärme von PbO gleich 0,0466, während er selbst einen um 18 Proc. und Regnault einen um 10 Proc. grösseren Werth beobachtet hat.

Führt man, soweit dies möglich ist, statt der *berechneten* specifischen Wärmen der Verbindungen, die das Glas zusammensetzen, die *beobachteten* ein, so erhält man eine viel weitergehende Uebereinstimmung. Da die Beobachtungen von Regnault fast in demselben Temperaturintervall (etwa 15° bis 99°) ausgeführt sind, wie die oben mitgetheilten Untersuchungen der Gläser, so sind ausschliesslich die Regnault'schen Beobachtungen zu Grunde gelegt; nämlich:

Verbindung	Specifische Wärme	Temperaturintervall
ZnO	0,1248	17—98
B_2O_3	0,2374	16—98
Al_2O_3	0,2074[1])	8—98
SiO_2	0,1913	13—99
As_2O_5	0 1276	13—97
PbO	0,05118	22—98
MgO	0,2439	24—100

Von den übrigen Bestandtheilen der Gläser liegen, so weit mir bekannt, keine Beobachtungen vor. Für die Berechnung der specifischen Wärmen dieser Bestandtheile, die sämmtlich O enthalten, ist es von besonderer Wichtigkeit, welcher Werth für die Atomwärme des O in starren Verbindungen eingeführt wird. Wüllner[2]) hat diese Atomwärme aus den Beobachtungen Regnault's berechnet und findet im Mittel 4,2. Dieser Werth ist deshalb zur Berechnung benutzt.

1. **BaO.** Atomgewicht Ba = 136,8. Zur Berechnung ging man von der specifischen Wärme von $BaCl_2$ aus, die von Regnault in dem Intervall 14° bis 98° zu 0,08957 bestimmt wurde; hiermit wird die Molecularwärme von $BaCl_2$ gleich 18,6. Die Atomwärme des Cl in starren Verbindungen ist nach Wüllner's Berechnung[3]) 6,26; damit wird die Atomwärme von Ba gleich 6,08. Da die Atomwärme des O, wie erwähnt, gleich 4,2 zu setzen ist, erhält man für die Molecularwärme von BaO 10,28 und die specifische Wärme von BaO **0,06728.**

2. **Mn_2O_3.** Atomgewicht Mn = 54,8. Nach Regnault ist die specifische Wärme von Mn (welches etwas Si enthielt)

1) Diese Zahl ist das Mittel der Werthe 0,1976 für Corund und 0,2178 für Sapphir.

2) Wüllner, Exp.-Physik. **3.** p. 590. 1885.

3) Wüllner, l. c. p. 590 Der obige Werth ist das Mittel von 6,40 und 6,13.

0,1217 zwischen 14° und 97°. Die Atomwärme von Mn wird hiermit 6,67; die Molecularwärme von Mn_2O_3 wird 25,94, die specifische Wärme 0,1646.

Ferner ist von Regnault die specifische Wärme von MnO gleich 0,1570 zwischen 13° und 98° bestimmt. Die Molecularwärme von MnO wird 11,11, die Molecularwärme von Mn_2O_3 wird 26,42, die specifische Wärme 0,1676. Das Mittel der beiden Werthe ist **0,1661.**

3. **Na_2O.** Atomgewicht Na = 23. Die specifische Wärme von Na, die nur zwischen − 28° und + 6° bestimmt wurde, ist mit den übrigen Werthen nicht vergleichbar und wurde deshalb bei der Berechnung von Na_2O nicht berücksichtigt. Nach Regnault ist die specifische Wärme von NaCl 0,2140 zwischen 15° und 98°. Die Molecularwärme von NaCl wird 12,50, die Atomwärme von Na 6,24. Die Molecularwärme von Na_2O wird 16,68, die specifische Wärme 0,2690.

Ferner ist nach Regnault die specifische Wärme von NaJ 0,08684 zwischen 16° und 99°. Die Molecularwärme von NaJ wird 12,98. Die Atomwärme von J ist 6,84; daher die Atomwärme von Na gleich 6,14. Die Molecularwärme von Na_2O ist deshalb 16,48 und die specifische Wärme 0.2658. Das Mittel der beiden Werthe ist **0,2674.**

4. **K_2O.** Atomgewicht K = 39. Die specifische Wärme von K ist nur zwischen − 78° und 0° bestimmt und wurde deshalb nicht berücksichtigt. Aus der specifischen Wärme von Chlorkalium 0,1729 zwischen 14° und 99° nach Regnault ergibt sich die Molecularwärme gleich 74,4; hieraus in der gleichen Weise wie bei Na_2O für die specifische Wärme von K_2O 0,1864.

Ferner ist die specifische Wärme von KJ 0,08191 zwischen 20° und 99° nach Regnault; hieraus die Molecularwärme von KJ gleich 13,47, und die specifische Wärme von K_2O 0,1857. Das Mittel der beiden ist **0,1860.**

5. **Li_2O.** Atomgewicht Li = 7,0. Die specifische Wärme von Li ist nach Regnault 0,9408 zwischen 27° und 99°; hiermit wird die specifische Wärme von Li_2O 0,5793.

Ferner ist die specifische Wärme von LiCl 0,2821 zwischen 13° und 97°; damit wird die specifische Wärme von Li_2O 0,5207. Der Mittelwerth ist **0,5497.** Der Unterschied der

beiden Werthe, aus dem das Mittel berechnet wurde, ist gross; für die spätere Berechnung der Gläser ist dies indessen nicht von grossem Einfluss, weil nur ein Glas Li enthält und zwar in kleiner Menge.

6. **CaO.** Atomgewicht Ca = 39,9. Die specifische Wärme von Ca ist 0,1804 zwischen 0° und 100° nach Bunsen; hiermit wird die specifische Wärme von CaO 0,2039.

Ferner ist die specifische Wärme von $CaCl_2$ 0,1642 zwischen 23° und 99° nach Regnault; hiermit wird die specifische Wärme von CaO 0,1767. Das Mittel ist **0,1903.**[1])

7. **P_2O_5.** Atomgewicht von P = 31. Die specifische Wärme von P ist unsicher und deshalb nicht berücksichtigt. Die specifische Wärme von $Pb_2P_2O_7$ ist nach Regnault 0,08208 zwischen 11° und 98°, die Molecularwärme ist deshalb 48,16. Aus der specifischen Wärme von PbO folgt die Molecularwärme von PbO = 11,38. Deshalb ist die Molecularwärme von P_2O_5 = 48,16 − 2 . 11,38 = 25,40; damit wird die specifische Wärme von P_2O_5 = 0,1789.

Ferner ergibt sich ans der specifischen Wärme von $Na_4P_2O_7$, die nach Regnault 0,2283 zwischen 17° und 98° ist, die Molecularwärme 60,73. Da die Molecularwärme von Na_2O (vgl. oben) = 0,2674 . 62 ist, so wird die specifische Wärme von P_2O_5 = 0,1941. In ähnlicher Weise liefert die specifische Wärme von $K_4P_2O_7$, die nach Regnault 0,1910 zwischen 17° und 98° ist, die Molecularwärme 63,03 und die specifische Wärme von P_2O_5 0,1975. Das Mittel der drei Werthe ist **0,1902.**

Oeberg hat aus seinen Mineraluntersuchungen die specifische Wärme folgender Verbindungen, die oben behandelt sind, berechnet.

	Specifische Wärme, berechnet von Oeberg	Winkelmann
Na_2O	0,228; 0,242; 0,234	0,2674
K_2O	0,146; 0,142	0,1860
Li_2O	0,450	0,5497
CaO	0,164	0,1903

1) F. E. Neumann (Pogg. Ann. **23.** p. 33. 1831) hat die specifische Wärme von CaO zu 0,196 berechnet, während, wie Neumann mittheilt, Lavosier und Laplace 0,217 (die Angabe 0,271 ist, wie aus dem Zusammenhang hervorgeht, ein Druckfehler) beobachtet haben.

Wie man sieht, sind sämmtliche Werthe Oeberg's kleiner, als die von mir berechneten; ich habe aber geglaubt, diese Resultate für die Bestimmung der specifischen Wärme nicht berücksichtigen zu sollen und stelle im Folgenden zunächst alle Werthe zusammen, die der Berechnung zu Grunde gelegt sind.

(II)

	Specifische Wärme		Specifische Wärme
ZnO	0,1248	BaO	0,06728
B_2O_3	0,2374	Mn_2O_3	0,1661
Al_2O_3	0,2074	NaO	0,2674
SiO_2	0,1913	K_2O	0,1860
As_2O_5	0,1276	Li_2O	0,5497
PbO	0,05118	CaO	0,1903
MgO	0,2439	P_2O_5	0,1902

Mit diesen Werthen erhält man die in Tabelle III unter Spalte „berechnet Winkelmann" mitgetheilten Werthe; die Differenzen gegenüber den beobachteten Werthen, ausgedrückt in Procenten, stehen in der folgenden Spalte.

Es kommen dreimal (Nr. 1, 2, 11) Differenzen vor, die 3 Proc. überschreiten. Die grösste Differenz von 7,3 Proc. in Nr. 1 ist, wie Hr. Dr. Schott mitzutheilen die Güte hatte, theilweise durch die nicht ganz zuverlässig anzugebende Zusammensetzung dieses Glases bedingt. Der angegebene Gehalt von 5,8 Li_2O ist thatsächlich nicht vorhanden, weil das benutzte Li_2O nicht trocken war. Da aber Li_2O eine grosse specifische Wärme hat, so würde der berechnete Werth der specifischen Wärme dieses Glases bei einem kleineren Gehalt an Li_2O sich kleiner herausstellen, als der in der Tabelle angegebene. Dagegen sind die Differenzen in Nr. 2 und 11 von 3,7 resp. 4,0 Proc. durch eine etwaige Ungenauigkeit in der Zusammensetzung nicht zu erklären. Stellt man die Differenzen, die mehr als 2 Proc. betragen, zusammen, so hat man die Nr. 1, 2, 9, 11 und 16 mit den Differenzen 7,3; 3,7; 2,4; 4,0; 2,1 Proc. Von diesen Gläsern haben die Nr. 1, 2, 11 und 16 einen hohen Borsäuregehalt und hierdurch wird man auf die Vermuthung geführt, dass die specifische Wärme der Borsäure vielleicht zu gross in die Rechnung eingeführt ist.

Diese Vermuthung erhält eine Stütze durch die Beobachtungen, die sich auf Verbindungen der Borsäure beziehen. Nach Regnault ist die specifische Wärme von PbB_2O_4 gleich

0,09046. Aus der Molecularwärme von PbB_2O_4 erhält man durch Abzug der Molecularwärme von PbO die Molecularwärme von B_2O_3 gleich 15,038; damit wird die specifische Wärme von B_2O_3 0,2158. — Ferner erhält man aus der von Regnault bestimmten specifischen Wärme von PbB_4O_7 0,1141 in ähnlicher Weise die specifische Wärme von B_2O_3 0,2153. — Diese so ermittelten Werthe der specifischen Wärme der Borsäure stimmen untereinander nahe überein, zeigen aber gegenüber dem direct von Regnault ermittelten Werth 0,2374 einen Unterschied von 10 Proc. Um zu untersuchen, ob der letztere Werth richtig ist, wurde die specifische Wärme der Borsäure bestimmt.

§ 5. Untersuchung der Borsäure.

Da die Borsäure in Wasser löslich ist, musste die Untersuchung in einer anderen Flüssigkeit durchgeführt werden; es wurde hierzu Petroleum gewählt.[1]) Die frisch geschmolzene Borsäure wurde in eins der beiden Messingkörbchen gelegt und in dem Heizapparate erhitzt. Das Thermometer des Heizapparates zeigte nach Verlauf der üblichen Zeit eine Temperatur, die höher war, als nach dem Barometerstand zu erwarten war und stieg um 0,43° über die aus dem Barometerstand berechnete Temperatur der den Heizapparat durchströmenden Wasserdämpfe. Trotz dieser auffallenden Erscheinung wurde der Versuch ausgeführt und ergab für die specifische Wärme der Borsäure den Werth 0,2348. Auch die folgenden Versuche zeigten übereinstimmend, dass in dem Heizapparate bei Anwesenheit der Borsäure das Thermometer eine höhere Temperatur, als die der Dämpfe annahm. Der Grund dieser Erscheinung liegt in dem Wassergehalt der in dem inneren Heizraum vorhandenen Luft. Die Borsäure nimmt den Wasserdampf der Luft auf und wird hierdurch erwärmt; diese Erwärmung überträgt sich auf das Thermometer, dessen Gefäss ringsum von Borsäure eingeschlossen ist. Die Richtigkeit dieser Erklärung wurde in zweifacher Weise geprüft. Erstens konnte die Gewichtszunahme des Körbchens mit Bor-

1) Regnault benutzte Terpentinöl und erhielt für die specifische Wärme der Borsäure 0,23872 und 0,23615; das Mittel hiervon ist der oben angegebene Werth 0,2374.

säure, das längere Zeit in dem Heizraume gehangen hatte, constatirt werden. Zweitens musste, da das Gewicht des aufgenommenen Wassers in den vorliegenden Versuchen nur gering war (es betrug in drei Stunden 0,33 Proc. des Gewichtes der Borsäure) und da trotzdem eine Temperatursteigerung des Thermometers von etwa 0,5° in der Nähe von 100° stattfand, die Lösung der Borsäure von einer beträchtlichen Wärmeentwickelung begleitet sein. Da mir Versuche über diesen zuletzt genannten Punkt nicht bekannt waren, wurde in einem kleinen Becherglase pulverisirte Borsäure in solcher Menge in das Wasser eingeführt, dass ein Brei entstand; die Temperatur stieg hierbei von Zimmertemperatur ausgehend um 30°.

Um eine ganz einwandfreie Untersuchung der Borsäure zu ermöglichen, wurde dieselbe in kleine Glasröhrchen von etwa 6 cm Höhe und 1,5 cm Durchmesser eingeschmolzen. Diese Röhrchen wurden in ein Messigkörbchen gelegt und dann in der schon angegebenen Weise auf ihre specifische Wärme untersucht.

Bezeichnet p_1 und c_1 das Gewicht resp. die specifische Wärme des Glases, so ist, wenn die übrigen Bezeichnungen die gleiche Bedeutung haben, wie in § 2, die specifische Wärme c der Borsäure aus der Formel

$$c = \frac{(P + A)(t_2 + \Delta t_2 - t_1) - (p_1 . c_1 + B)\{T - (t_2 + \Delta t_2)\}}{p\{T - (t_2 + \Delta t_2)\}}$$

zu berechnen. Die Versuche ergaben folgende Resultate:

$(t_2+\Delta t_2)-t_1$	T	$t_2+\Delta t_2$	P	A	B	$p_1 . c_1$	p	c	Mittel
2,644	99,36	19,12	518,22	15,13	2,555	6,457	36,58	0,2341	0,2365
2,656	99,52	17,53	532,53	15,13	2,555	6,457	36,58	0,2389	

Die beiden Werthe c der specifischen Wärme der Borsäure zeigen einen Unterschied von 2 Proc.; dies ist dadurch bedingt, dass bei den vorliegenden Versuchen die Zeit bis zur Erreichung des Temperaturmaximums im Calorimeter viel länger dauert, als bei den früheren Versuchen mit den Gläsern; infolgedessen ist die Correctionsgrösse Δt_2 hier etwa viermal so gross, wie früher und naturgemäss mit einer grösseren Untersicherheit behaftet. Das Mittel 0,2365 stimmt mit dem von Regnault

erhaltenen Resultat 0,2374 soweit überein, dass die Richtigkeit der Regnault'schen Beobachtung bestätigt wird. Es bleibt deshalb die Differenz zwischen dem direct beobachteten Werth und den aus den Verbindungen PbB_2O_4 und PbB_4O_7 berechneten Werthen der specifischen Wärme der Borsäure bestehen.

§ 6. Schlussresultate.

Regnault hat ausser den Bleiverbindungen noch je eine Verbindung mit Kalium und Natrium untersucht, aus der sich die specifische Wärme der Borsäure berechnen lässt. Die specifische Wärme von $K_2B_4O_7$ ist gleich 0,2197 zwischen 18° und 99°. Setzt man, wie früher angegeben, für die specifische Wärme von K_2O 0,1860, so erhält man für die specifische Wärme der Borsäure 0,2421. Ferner ist nach Regnault die specifische Wärme von $Na_2B_4O_7$ gleich 0,2382 zwischen 16° und 98°..., mit der früher angegeben specifischen Wärme 0,2674 für Na_2O erhält man die specifische Wärme der Borsäure gleich 0,2252.

Die einzelnen Werthe für die specifische Wärme der Borsäure zeigt folgende Zusammenstellung:

0,2374 direct von Regnault beobachtet;
0,2158 berechnet aus der Regnault'schen Beobachtung für PbB_2O_4;
0,2153 „ „ „ „ „ „ PbB_4O_7;
0,2421 „ „ „ „ „ „ $K_2B_4O_7$;
0,2252 „ „ „ „ „ „ $Na_2B_4O_7$;
0,2272 Mittel.

Führt man diesen Mittelwerth für die specifische Wärme der Borsäure in die Berechnung ein, indem man im übrigen die früher in § 4 unter (II) angegebenen Werthe festhält, so erhält man folgende Resultate.

Tabelle IV.

Nr.	Specifische Wärme			Specifisches Gewicht	Product
	beobachtet c	berechnet c'	Differenz beob.-ber. in Proc.	s	$s.\ c$
1	0,2318	0,2415	− 4,2	2,238	0,5188
2	0,2182	0,2192	− 0,5	2,243	0,4894
3	0,2086	0,2080	+ 0,3	2,424	0,5056
4	0,2044	0,2040	+ 0,2	2,480	0,5069
5	0,2038	0,2049	− 0,5	2,370	0,4830
6	0,1988	0,1983	+ 0,3	2,585	0,5139

Nr.	Specifische Wärme beobachtet c	berechnet c'	Differenz beob.-ber. in Proc.	Specifisches Gewicht s	Product $s. c.$
7	0,1958	0,1964	− 0,3	2,479	0,4854
8	0,1907	0,1888	+ 1,0	2,629	0,5013
9	0,1901	0,1944	− 2,3	2,588	0,4920
10	0,1887	0,1893	− 0,3	2,518	0,4751
11	0,1644	0,1668	− 1,5	3,527	0,5798
12	0,1617	0,1626	− 0,6	2,848	0,4605
13	0,1589	0,1573	+ 0,9	3,070	0,4878
14	0,1464	0,1439	+ 1,0	3,238	0,4740
15	0,1398	0,1379	+ 1,4	3,532	0,4938
16	0,1359	0,1344	+ 1,1	3,691	0,5016
17	0,1257	0,1272	− 1,2	3,578	0,4498
18	0,08174	0,08201	− 0,3	5,831	0,4766

Wenn man von dem Werthe Nr. 1 absieht, weil wegen des Lithiumgehaltes die chemische Zusammensetzung nicht sicher bekannt ist, so zeigt eine Durchsicht der letzten Tabelle, *dass die specifische Wärme der untersuchten Gläser sich aus derjenigen der Bestandtheile berechnen lässt mit einer Genauigkeit von rund 1 Proc.*; nur das Glas Nr. 9 zeigt eine Abweichung, die 2 Proc. überschreitet.

In der letzten Tabelle ist unter *s* das specifische Gewicht angegeben. Dasselbe wurde bei Zimmertemperatur (rund 16°) ermittelt und auf Wasser von 4° als Einheit reducirt. Im allgemeinen wächst mit abnehmender specifischer Wärme das specifische Gewicht; indessen zeigen sich doch bedeutende Abweichungen, wie aus der letzten Spalte, die das Product aus specifischer Wärme und specifischem Gewicht darstellt, hervorgeht. Der grösste Werth dieses Productes (Nr. 11) zeigt gegenüber dem kleinsten Werth (Nr. 17) eine Differenz von 30 Proc.

Ein einfacher Zusammenhang der specifischen Wärme und der thermischen Leitungsfähigkeit der Gläser nach den Beobachtungen von Paalhorn liess sich nicht erkennen, wie aus folgenden Werthen ersichtlich ist.

Nr.	Therm. Leitungsfähigkeit bezogen auf cm; g; sec.	Therm. Leitungsfähigkeit relativ	Specifische Wärme c	Specifisches Gewicht s	Product $c.s$
18	0,00108	1,00	0,0817	5,831	0,4766
9	0,00141	1,30	0,1901	2,588	0,4920
17	0,00143	1,32	0,1272	3,578	0,4498
2	0,00144	1,33	0,2182	2,243	0,4894
5	0,00227	2,09	0,2038	2,370	0,4830

Die Gläser sind nach der Grösse ihrer Leitungsfähigkeit geordnet. Weder die specifischen Wärmen c noch das Product $c.s$ der specifischen Wärmen und specifischen Gewichte zeigen eine durchgehende Zu- oder Abnahme.

Jena, April 1893.

2. *Ueber eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche; von E. Riecke.*

(Nach den Gött. Nachr. 1891, Nr. 7 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Wir beziehen den Turmalin auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen z-Axe mit der dreizähligen Symmetrieaxe zusammenfällt, während die x-Axe auf einer Symmetrieebene senkrecht steht. Es sei eine beliebige Richtung dadurch bestimmt, dass ihre Cosinusse mit Bezug auf die Coordinatenaxen gleich γ_1, γ_2, γ_3 sind. Durch einen in dieser Richtung ausgeübten Druck p werden in den einzelnen Volumenelementen des Turmalins electrische Momente erzeugt, welche bezogen auf die Einheit des Volumens die Componenten a, b, c besitzen mögen. Nach den von Voigt aufgestellten Gleichungen ist:

$$a\,/\,p = \gamma_1 (2\,\gamma_2\,Q + \gamma_3\,R)$$
$$b\,/\,p = (\gamma_2 - \gamma_2^2)\,Q + \gamma_2\,\gamma_3\,R$$
$$c\,/\,p = S + \gamma_1^2\,T,$$

wo Q, R, S und T gewisse dem Turmalin eigenthümliche Constanten sind.

Trägt man nun die einem bestimmten Drucke entsprechenden Werthe von a/p, b/p, c/p auf den Coordinatenaxen auf, so bestimmen sie einen Punkt, p, welcher eine gewisse Fläche beschreiben wird, wenn man dem Drucke alle möglichen Richtungen im Raume ertheilt. Die Eigenschaften dieser Fläche sollen im Folgenden untersucht werden. Man bemerkt zunächst, dass jeder gegebenen Druckrichtung ein bestimmter Punkt der Fläche entspricht; der Radius Vector dieses Punktes gibt durch seine Richtung die Richtung des piëzoelectrischen Momentes, durch seine Länge die Grösse des Momentes an.

Es ist zweckmässig, an Stelle der rechtwinkeligen Coordinaten Polarcoordinaten einzuführen, indem man

$$\gamma_1 = \sin\Theta\cos\Phi, \qquad \gamma_2 = \sin\Theta\sin\Phi, \qquad \gamma_3 = \cos\Theta$$
$$a\,/\,p = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, \quad b\,/\,p = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad c\,/\,p = \varrho\cos\vartheta$$

und zur Abkürzung noch

$$\varrho \sin \vartheta = \sigma$$

setzt. Die Voigt'schen Gleichungen werden dann:

$$\xi = \sigma \cos \varphi = Q \sin^2 \Theta \sin 2 \Phi + R \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi$$

$$\eta = \sigma \sin \varphi = Q \sin^2 \Theta \cos 2 \Phi + R \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi$$

$$\zeta = \varrho \cos \vartheta = S + T \cos^2 \Theta.$$

Wir betrachten zunächst die Schnitte der Fläche durch Ebenen, welche senkrecht zu der z-Axe gelegt werden; die einer solchen Schnittcurve angehörenden Flächenpunkte entsprechen Druckrichtungen, welche einen um die z-Axe als Rotationsaxe beschriebenen Kreiskegel bilden. Es ergibt sich dies aus der für die z-Coordinate eines beliebigen Flächenpunktes geltenden Gleichung $\zeta - S = T \cos^2 \Theta$. Setzen wir:

$$Q \sin^2 \Theta = Q', \quad R \sin \Theta \cos \Theta = R',$$

so wird

$$\xi = Q' \sin 2 \Phi + R' \cos \Phi$$

$$\eta = Q' \cos 2 \Phi + R' \sin \Phi.$$

Die Grössen Q', R' und $\zeta - S$ können mit Hülfe einer einfachen geometrischen Construction gefunden werden, sobald Q, R, T und Θ gegeben sind.

Die einem bestimmten Werthe des Winkels Θ entsprechende Schnittcurve, bez. ihre Projection auf die xy-Ebene kann in folgender Weise construirt werden. Wir beschreiben in der xy-Ebene um den Anfangspunkt des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser R'; durch den Anfangspunkt ziehen wir einen Radius Vector, welcher mit der x-Axe den Winkel Φ einschliesst und welcher demzufolge in der durch die Druckrichtung gehenden Meridianebene liegt. Durchschneidet dieser Radius den mit R' beschriebenen Kreis in dem Punkte c, so ziehen wir durch c eine Linie, welche mit der y-Axe den Winkel 2Φ einschliesst und schneiden auf dieser von c aus die Strecke Q' ab; der so erhaltene Punkt ist die Projection eines Punktes der Oberfläche, welcher das der Druckrichtung (Θ, Φ) entsprechende electrische Moment repräsentirt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Werthe des Winkels Φ dem Winkel $\varphi = \pi / 6$ entsprechen. Die Gleichungen sind

$$\sigma \cos \pi / 6 = Q' \sin 2\,\Phi + R' \cos \Phi,$$

$$\sigma \sin \pi / 6 = Q' \cos 2\,\Phi + R' \sin \Phi,$$

woraus

$$Q' \cos (2\,\Phi + \pi / 6) = -R' \sin (\Phi - \pi / 6)$$

oder

$$Q' \sin 2 (\Phi - \pi / 6) = R' \sin (\Phi - \pi / 6).$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhält man, indem man $\Phi = \pi / 6$ setzt; in diesem Falle liegt also die Richtung des piëzoelectrischen Momentes in derselben durch die Hauptaxe gehenden Ebene, wie die Druckrichtung. Da allgemein

$$\sigma^2 = Q'^2 + R'^2 + 2\,Q' R' \sin 3\,\Phi,$$

so wird für $\Phi = \pi / 6 : \sigma = R' + Q'$.

Zwei weitere Wurzeln der für Φ geltenden Gleichung sind:

$$\Phi = \frac{\pi}{6} \pm \arccos \frac{R'}{2\,Q'}.$$

Ist $Q' < R' / 2$, so sind die dieser Gleichung entsprechenden Winkel imaginär. Es existiren in diesem Falle keine weiteren Druckrichtungen, für welche das electrische Moment in das Azimuth $\pi / 6$ fällt. Ist $Q' = R' / 2$, so sind die beiden anderen Wurzeln der Gleichung ebenfalls gleich $\pi / 6$. Wenn aber $Q' > R' / 2$, so existiren noch zwei andere Azimuthe Φ, für welche das Azimuth des electrischen Momentes gleich $\pi / 6$ wird. Es ergibt sich in diesem Falle

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= R'^2 + Q'^2 + 2\,R' Q' \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 3 \arccos \frac{R'}{2\,Q'}\right)\\ &= R'^2 + Q'^2 + 2\,R' Q' \cos\left(3 \arccos \frac{R'}{2\,Q'}\right)\\ &= R'^2 + Q'^2 + (R'^2 - 3\,Q'^2)\frac{R'^2}{Q'^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir hier für R' und Q' ihre Werthe in Q, R und Θ, so ergibt sich:

$$\sigma\,Q = R^2 \cos^2 \Theta - Q^2 \sin^2 \Theta.$$

Da nun

$$\cos^2 \Theta = \frac{\zeta - S}{T},$$

so erhält man die Gleichung

$$T\,Q(\sigma + Q) = (R^2 + Q^2)(\zeta - S).$$

In dieser Gleichung ist die folgende merkwürdige Eigenschaft unserer Fläche ausgesprochen. Wir haben gesehen, dass die betrachtete Curve auf dem durch $\varphi = \pi / 6$ bestimmten Radius Vector jedenfalls einen Punkt besitzt, für welchen $\sigma = R' + Q'$ und Φ ebenfalls gleich $\pi/6$. Ausserdem hat aber die Curve auf demselben Radius noch einen Doppelpunkt, wenn $Q' > 2R'$; für diesen ist $\sigma Q = R^2 \cos^2 \Theta - Q^2 \sin^2 \Theta$ und $\Phi = \pi / 6 \pm \arccos R' / 2Q'$. Auf der Oberfläche selbst liegt die betrachtete Curve in einer zur z-Axe senkrechten Ebene, deren Abstand von der xy-Ebene durch $\zeta = S + T \cos^2 \Theta$ gegeben ist. Nun zeigt die letzte Gleichung, dass zwischen σ und ζ eine lineare Gleichung besteht; d. h. die Doppelpunkte der in den verschiedenen aufeinanderfolgenden Schnittebenen befindlichen Curven liegen auf einer geraden Linie.

Für $Q' = R'$ oder $\operatorname{tg} \Theta = R / Q$ wird $\sigma = 0$ und $\Phi = \pi / 2$ oder gleich $-\pi / 6$.

Aus den Gleichungen $\xi = R' \cos \Phi + Q' \sin 2\Phi$ und $\eta = R' \sin \Phi + Q' \cos 2\Phi$ ergibt sich, dass die zu untersuchenden Schnittcurven *Hypocycloiden* sind, welche in folgender Weise construirt werden können. In der xy-Ebene beschreiben wir um den Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser $3R' / 2$; in diesem lassen wir einen zweiten Kreis rollen, dessen Halbmesser gleich $R' / 2$ ist; nehmen wir auf dem rollenden Kreise einen Punkt, π, im Abstande Q' von seinem Mittelpunkte c und stellen wir den Kreis so, dass die Azimuthe der Linien Oc und $O\pi$ gegen die x-Axe gleichzeitig den Werth $\pi / 6$ annehmen, so beschreibt der Punkt π die zu untersuchende Schnittcurve.

Es ist hiernach leicht, einen Ueberblick über die verschiedenen Gestalten zu gewinnen, welche die Schnittcurve annimmt, wenn Θ von 0 bis $\pi/2$ wächst und dementsprechend ζ von $S + T$ bis S abnimmt. Für sehr kleine Werthe von Θ ist $R' = R\Theta$ und $Q' = Q\Theta^2$; die entsprechende Hypocycloide weicht demnach nur sehr wenig ab von einem mit dem Halbmesser R' beschriebenen Kreise. Da der Halbmesser des rollenden Kreises gleich dem dritten Theil von demjenigen des Bahnkreises ist, so kehrt der erstere genau in seine Anfangslage zurück, wenn er drei Umwälzungen vollzogen hat. Die Hypocykloide bildet eine geschlossene Curve; sie ist

symmetrisch mit Bezug auf drei durch den Mittelpunkt des Bahnkreises gezogene Durchmesser, welche mit der x-Axe die Winkel $\pi / 6$, $5\pi / 6$, $9\pi / 6$ einschliessen. Der Radius Vector der Hypocykloide hat seinen grössten Werth $R' + Q'$ in den Azimuthen $\varphi = \pi / 6$, $= 5\pi / \sigma$, $= 9\pi / 6$, seinen kleinsten Werth $R' - Q'$ in den Azimuthen $\varphi = 3\pi / 6$, $= 7\pi / 6$, $= 11\pi / 6$. Die Cycloide ist eine verkürzte, solange $Q' < R' / 2$. Wird $Q' = R' / 2$, also $\operatorname{tg} \Theta = R / 2 Q$ und $\zeta = S + (4 Q^2 T)/(4 Q^2 + R^2)$, so erhalten wir eine gewöhnliche Hypocycloide mit drei Spitzen. Wird $Q' > R' / 2$, so wird die Hypocycloide eine verlängerte, mit Doppelpunkten in den Richtungen $\varphi = \pi / 6$, $= 5\pi / 6$, $= 9\pi / 6$. Für $Q' = R'$ geht die Cycloide durch den Mittelpunkt des Bahnkreises hindurch, die drei Doppelpunkte fallen in einen dreifachen Punkt zusammen. Wird $Q' > R'$, so fallen die Doppelpunkte in die Azimuthe $\varphi = 7\pi / 6$, $= 11\pi / 6$, $= 3 / \pi 6$. Wenn endlich Θ nahe an $\pi / 2$ rückt, so wird $Q' = Q$ und $R' = R(\pi / 2 = \Theta)$; für $\Theta = \pi / 2$ geht die Cycloide über in einen Kreis mit dem Halbmesser Q; gleichzeitig wird $\zeta = S$ und für die Doppelpunkte $\sigma = - Q$.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der *Meridianschnitte der Fläche.* Zuerst mögen die in einer der Symmetrieebenen liegenden Curven betrachtet werden. Setzen wir $\varphi = \pi / 6$, so wird für die Maximalwerthe $R' + Q'$ des Radius Vectors auch $\Phi = \pi / 6$; lassen wir Θ wachsen von 0 bis $\pi / 2$, so sind jene Maximalwerthe gegeben durch $\sigma = R \sin \Theta \cos \Theta + Q \sin^2 \Theta$, die entsprechenden Werthe der z-Coordinate durch $\zeta = S + T \cos^2 \Theta$. Die in derselben Symmetrieebene liegenden Minima der Radien Vectoren, $R' - Q' = R \sin \Theta \cos \Theta - Q \sin^2 \Theta$ erhalten wir, wenn wir $\varphi = 7\pi / 6$, und dementsprechend auch $\Phi = 7\pi / 6$ setzen und dann wiederum Θ von 0 bis $\pi / 2$ wachsen lassen. Die zugehörigen z-Coordinaten sind wieder gegeben durch $\zeta = S + T \cos^2 \Theta$. Wenn wir nun in der betrachteten Symmetrieebene für die beiden in Frage kommenden Quadranten die positive Richtung von σ so wählen, dass sie mit der Maximalrichtung des Radius Vectors übereinstimmt, so haben wir das Vorzeichen des Minimalwerthes umzukehren und erhalten, wenn Θ in dem Quadranten z, $+\sigma$ liegt: $\sigma = Q \sin^2 \Theta + R \sin \Theta \cos \Theta$, wenn Θ in dem Quadranten z, $-\sigma$ liegt: $\sigma = Q \sin^2 \Theta - R \sin \Theta \cos \Theta$. Beide Ausdrücke können in

den einen $\sigma = \Theta \sin^2 \Theta + R \sin \Theta \cos \Theta$ zusammengefasst werden, wenn wir Θ selbst in dem ersten Quadranten positiv, in dem zweiten negativ nehmen. Bezeichnet man durch σ und σ' die beiden Radien, welche einem und demselben absoluten Werthe von Θ entsprechen, so wird

$$\frac{\sigma + \sigma'}{2} = Q \sin \Theta$$

und daher

$$\frac{\sigma + \sigma'}{2Q} + \frac{\zeta - S}{T} = 1.$$

Es ergibt sich somit der Satz: Zieht man in der Symmetrieebene Linien senkrecht zu der z-Axe, so schneiden diese die Oberfläche in zwei Punkten; die Halbirungspunkte der durch die Schnittpunkte gebildeten Segmente liegen in einer geraden Linie, welche die Punkte mit den Coordinaten $\zeta = S$, $\sigma = \sigma' = Q$ und $\zeta = S + T$, $\sigma = \sigma' = 0$ verbindet. Setzt man nun

$$\tau = \sigma - \frac{Q}{2}, \quad \zeta' = \zeta - S - \frac{T}{2},$$

so ergibt sich durch Elimination von Θ:

$$(T\tau + Q\zeta')^2 + R^2 \zeta'^2 = \frac{R^2 T^2}{4}.$$

Die betrachtete Curve ist somit eine *Ellipse*, deren Mittelpunkt in dem ursprünglichen System die Coordinaten $\sigma = Q/2$, $\zeta = S + T/2$ hat und welche von einer zu der xy-Ebene in der Entfernung S gelegten Parallelebene im Abstande Q von der z-Axe, von einer in der Entfernung $S + T$ gelegten Parallelebene in der z-Axe selbst berührt wird.

Diese Ellipse repräsentirt aber nicht den ganzen Schnitt der Fläche durch die dem Azimuth $\varphi = \pi / 6$ entsprechende Symmetrieebene; denn in dieser Ebene liegen noch die Doppelpunkte der Hypocycloiden; die von diesen gebildete gerade Linie

$$TQ(\sigma + Q) = (R^2 + Q^2)(\zeta - S)$$

genommen zwischen den Ordinaten

$$\zeta = S \text{ und } \zeta = S + \frac{4 Q^2 T}{4 Q^2 + R^2}$$

muss der Ellipse noch hinzugefügt werden, um den vollständigen Schnitt zu erhalten. Aus dem Folgenden geht hervor, dass die gerade Linie als eine doppelt zählende zu betrachten ist.

Für eine beliebige Meridianebene erhält man die Gleichung der Schnittcurve am einfachsten, wenn man zunächst die Gleichung der zu der xy-Ebene parallelen Schnittcurven in rechtwinkeligen Coordinaten aufstellt. Setzt man zu diesem Zwecke in den Gleichungen

$$\xi = R' \cos \Phi + 2\, Q' \sin \Phi \cos \Phi$$
$$\eta = R' \sin \Phi + Q' (\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi)$$
$$\cos \Phi = \frac{x}{z}, \quad \sin \Phi = \frac{y}{z},$$

so erhält man die in x, y und z homogenen Gleichungen

$$2\, Q' x y + R' x z - \xi z^2 = 0$$
$$Q' x^2 - Q' y^2 + R' y z - \eta z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen x, y, z und setzt man zugleich für R' und Q' ihre Werthe in R, Q und Θ, so ergibt sich als Gleichung der Hypocycloiden in rechtwinkeligen Coordinaten:

$$16\, Q^2 (\xi^2 + \eta^2)\, \xi^2 + 4\, Q R^2 \cos^2 \Theta (4\, \eta^2 - 9 \xi^2)\, \eta$$
$$- 8\, (2\, Q^2 \sin^2 \Theta + R^2 \cos^2 \Theta)(Q^2 \sin^2 \Theta - R^2 \cos^2 \Theta)\, \xi^2$$
$$+ (4\, Q^2 \sin^2 \Theta - R^2 \cos^2 \Theta)^2 \eta^2 + 8 \sin^2 \Theta (Q^2 \sin^2 \Theta - R^2 \cos^2 \Theta)^3 = 0.$$

Setzt man hier an Stelle von $\cos^2 \Theta$ und $\sin^2 \Theta$ die Ausdrücke

$$\cos^2 \Theta = \frac{\xi - S}{T}, \quad \sin^2 \Theta = \frac{S + T - \xi}{T},$$

so erhält man die Gleichung der piëzoelectrischen Fläche in rechtwinkeligen Coordinaten, welche darnach von der vierten Ordnung ist.

Setzt man $\eta = 0$, so erhält man die Gleichung der Curve, in welcher die Fläche durch die xz-Ebene geschnitten wird:

$$16\, Q^2 \xi^4 - 8\, (2\, Q^2 \sin^2 \Theta + R^2 \cos^2 \Theta)(Q^2 \sin^2 \Theta - R^2 \cos^2 \Theta)\, \xi^2$$
$$+ 8 \sin^2 \Theta (Q^2 \sin^2 \Theta - R^2 \cos^2 \Theta) = 0.$$

Die Schnittcurve ist symmetrisch gegen die z-Axe. Ihre Gestalt wird durch die beistehende Fig. 1 anschaulich gemacht; gleichzeitig gibt Fig. 2 die Schnittcurve in einer Meridianebene, deren Azimuth $\varphi = \pi / 12$ ist, Fig. 3 die Schnittcurve in der Symmetrieebene mit $\varphi = \pi / 6$. Man sieht, dass die in

der letzteren Figur auftretende gerade Linie in der That aus dem Zusammenfallen zweier Curvenzweige entsteht.

Es bleibt endlich noch zu untersuchen, welche Curven der Endpunkt des electrischen Momentes auf der piëzoelectrischen Fläche beschreibt, wenn der Druck in einer und derselben Meridianebene alle möglichen Richtungen durchläuft.

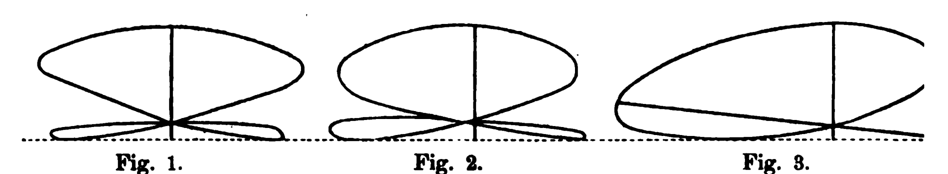


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Eliminiren wir $\cos\Theta$ und $\sin\Theta$ aus je zweien der Gleichungen

$$\xi = R\cos\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\sin 2\Phi\sin^2\Theta$$
$$\eta = R\sin\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\cos 2\Phi\sin^2\Theta$$
$$\zeta = (S+T)\cos^2\Theta + S\sin^2\Theta,$$

so erhalten wir die Projectionen der gesuchten Curven auf die drei Coordinatenebenen.

Die Elimination aus den ersten beiden Gleichungen gibt:

$$(Q\sin 2\Phi\,\eta - Q\cos 2\Phi\,\xi)^2 + (R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi)(R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi - RQ\cos 3\Phi) = 0.$$

Die Projection der Curve auf die xy-Ebene ist somit eine Ellipse, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgeht. Für $\Phi = \pi/6$ wird die Gleichung $\eta\cos\Phi - \xi\sin\Phi = 0$; d. h. die Ellipse geht über in eine gerade Linie, welche mit der x-Axe den Winkel $\pi/6$ einschliesst. Für $\Phi = 0$ ergibt sich

$$\frac{\xi^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{\left(\eta - \frac{Q}{2}\right)^2}{\frac{Q^2}{4}} = 1.$$

Für $\Phi = \pi/2 : \xi^2 = 0$, die Ellipse geht über in ein doppelt zu zählendes Stück der Axe η, ebenso wie in der ersten Symmetrieebene, für welche $\Phi = \pi/6$ ist.

Für die Projectionen der auf der piëzoelectrischen Fläche verlaufenden Curven auf die beiden anderen Coordinatenebenen erhält man die Gleichungen:

$$\{Q\cos 2\Phi(S+T-\zeta)-T\eta\}^2-R^2\sin^2\Phi(S+T-\zeta)(\zeta-S)=0$$
$$\{Q\sin 2\Phi(S+T-\zeta)-T\xi\}^2-R^2\cos^2\Phi(S+T-\zeta)(\zeta-S)=0.$$

Multiplicirt man dieselben bez. mit $\cos^2\Phi$ und $\sin^2\Phi$, so ergibt sich durch Subtraction:

$$(S+T-\zeta)\,Q(\cos 2\Phi\cos\Phi\mp\sin 2\Phi\sin\Phi)=T(\eta\cos\Phi\mp\xi\sin\Phi).$$

Die für constante Werthe von Φ auf der piëzoelectrischen Fläche sich ergebenden Curven sind somit ebene Curven; da aber ihre Projection auf die xy-Ebene eine Ellipse ist, so müssen auch die auf der Fläche liegenden Curven selbst *Ellipsen* sein. Ob in der vorhergehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, ergibt sich, wenn man den aus derselben folgenden Werth von $S+T-\zeta$ in der Gleichung

$$\{Q\cos 2\Phi(S+T-\zeta)-T\eta\}^2-R^2\sin^2\Phi(S+T-\zeta)(\zeta-S)=0$$

substituirt; die resultirende Gleichung muss identisch sein mit der zuvor für die Projection auf die xy-Ebene gefundenen. Aus dieser Bedingung ergibt sich, dass das negative Zeichen das richtige ist. Die Gleichung der Ebenen der Ellipsen wird somit

$$(S+T-\zeta)\,Q\cos 3\Phi=T(\eta\cos\Phi-\xi\sin\Phi).$$

Für $\Phi=0$ wird dieselbe

$$(S+T-\zeta)\,Q=T\eta.$$

Wenn der Druck alle möglichen Richtungen in der xz-Ebene annimmt, so beschreibt der Endpunkt des piëzoelectrischen Momentes eine zur yz-Ebene senkrecht stehende Ellipse.

3. *Thermodynamik des Turmalins und mechanische Theorie der Muskelcontraction; von Eduard Riecke.*

Wenn ich in dem dritten Theile der folgenden Mittheilung die Principien der Mechanik und Thermodynamik auf ein Problem in Anwendung bringe, dessen Untersuchung eine Aufgabe der physiologischen Forschung bildet, so wird es nothwendig sein, diesem Unternehmen ein paar Worte zur Erklärung und Entschuldigung voranzuschicken.

Die Untersuchungen über die electrischen Eigenschaften der Krystalle, insbesondere des Turmalins, mit welchen ich mich längere Zeit hindurch beschäftigt hatte, haben für mich durch die gemeinsam mit Voigt ausgeführte Bestimmung für piëzoelectrischen Constanten des Quarzes und Turmalins [1]) und durch meine Abhandlung über die Moleculartheorie der electrischen Erscheinungen [2]) einen gewissen Abschluss gewonnen. In der Zwischenzeit hatte G. E. Müller eine Theorie der Muskelcontraction [3]) veröffentlicht, welcher die Annahme einer pyroelectrischen Erregbarkeit von krystallinischen Elementen der Muskelsubstanz zu Grunde lag. In dieser Beziehung zu meinen eigenen Studien lag für mich der Reiz einer Prüfung der Müller'schen Theorie. Dabei haben sich Resultate ergeben, welche für die Beurtheilung der experimentellen Thatsachen der Muskelphysiologie vielleicht nicht ohne Werth sind. Ueber das Ziel der Untersuchung, so weit sie sich auf das Verhalten des gereizten Muskels bezieht, schicke ich noch eine Bemerkung voraus. Gegen die Annahme Müller's von einer pyroelectrischen Erregbarkeit der Muskelelemente lassen sich Einwände erheben, welche ich vorerst nicht zu beseitigen

1) Riecke u. Voigt, Die piëzoelectrischen Constanten des Quarzes und Turmalins. Wied. Ann. **45**. p. 523. 1892.

2) Riecke, Moleculartheorie der piëzoelectrischen und pyroelectrischen Erscheinungen. Göttinger Abhandlungen. **38**. 1892.

3) G. E. Müller, Theorie der Muskelcontraction. **1**. Leipzig 1891.

vermag. Es wird daher besser sein, von der Frage nach dem Ursprung der contrahirenden Kräfte ganz abzusehen und sich zu beschränken auf die Frage nach den Bewegungs- und Wärmeerscheinungen des Muskels bei gegebenen Kräften. Zu ihrer Lösung würden die Principien der Mechanik und Thermodynamik hinreichen, wenn die chemische Natur der Muskelsubstanz eine unveränderliche wäre. Da dies nicht der Fall ist, so bleibt eine physikalische Theorie der Muskelcontraction von vornherein unvollständig, selbst wenn die auf dem rein physikalischen Gebiete liegenden Schwierigkeiten sich besiegen lassen; immerhin schien es der Mühe werth, nachzusehen, wie weit die Anwendung physikalischer Gesetze führt, und der Erfolg hat die Erwartungen in manchem Punkte übertroffen.

Der erste Abschnitt der Arbeit ist einigen allgemeinen Betrachtungen über thermodynamische Systeme gewidmet; der zweite erläutert sie an dem Beispiel des Turmalins und gibt eine vollständige Uebersicht über seine thermodynamischen Eigenschaften mit mumerischer Angabe der Constanten. Im dritten vergleichen wir die electrischen Erscheinungen des Turmalins mit dem Verhalten des gereizten Muskels, stellen ein System thermodynamischer Gleichungen auf, welches der verallgemeinerten Theorie Müller's entspricht, und prüfen die aus ihm fliessenden Folgerungen an den Thatsachen der Beobachtung.

1. Ueber thermodynamische Systeme im allgemeinen.

Nehmen wir den einfachsten Fall eines Körpers der dem allseitig gleichen Druck der umgebenden Luft unterworfen ist, so können wir seinen Zustand in jedem Augenblick durch Angabe seiner Temperatur Θ und seines Volumens v bestimmen; ebenso ist aber auch der Druck p eine den Zustand charakterisirende Grösse und wir pflegen daher Volumen, Druck, Temperatur als Zustandsgrössen des Körpers zu bezeichnen. Wir schreiben ausserdem jedem Körper eine bestimmte Energie E zu, welche als eine Function der Zustandsgrössen zu betrachten ist. Die Energie wächst durch Wärmezufuhr, sie nimmt ab, wenn der Körper dem äusseren Druck entgegen eine Arbeit leistet, so dass

$$dE = A\,dQ - p\,dv. \tag{1}$$

Dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie zufolge ist die während eines sehr kleinen Zeitraumes zugeführte Wärme d $Q = \Theta d U$, wo Θ die absolute Temperatur und $d U$ den Zuwachs der Entropie, einer neu einzuführenden Eigenschaft des Körpers, bezeichnet. Ist die Energie als Function der Zustandsgrössen gegeben, so gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial E}{\partial U} = A \Theta \text{ und } \frac{\partial E}{\partial v} = -p.$$

Man erhält also zwei Gleichungen zwischen den vier Grössen v, p, Θ, U, und daraus folgt, dass zwei davon zur Bestimmung des Zustandes vollkommen ausreichend sind. Eine in vielen Fällen bequemere Form der Gleichungen ergibt sich, wenn man an Stelle der gesammten Energie die freie Energie einführt.

$$F = E - A \Theta U. \tag{2}$$

Die Abnahme der freien Energie ist bei constanter Temperatur gleich der von dem Körper geleisteten Arbeit; allgemein wird:

$$d F = -A U d \Theta - p d v.$$

$$A U = -\frac{d F}{\partial \Theta}, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial v}. \tag{3}$$

Gehen wir über zu der Betrachtung eines elastischen Körpers von prismatischer Form, welcher irgend welchen äusseren Kräften unterworfen ist, so wird auch hier der Zustand einerseits abhängig sein von der Temperatur, andererseits von den räumlichen Verhältnissen; in dem vorhergehenden Beispiele waren diese characterisirt durch die Angabe einer einzigen Grösse, des Volumens. In dem Falle eines irgend wie deformirten Prismas sind sie durch sechs Grössen bestimmt, die Verlängerungen der drei Kanten, die Verschiebungen der drei Winkel. Jeder dieser sechs Verschiebungsgrössen entspricht ein besonderer Druck, so dass die bei einer partiellen Verschiebung geleistete Arbeit gleich dem Product aus Verschiebung und zugehörigem Drucke ist. Bezeichnet man die Verschiebungsgrössen und Drucke in der üblichen Weise, so hat man für den Zuwachs der Energie:

$$d E = A \Theta d U - X_x d x_x - Y_y d y_y - Z_z d z_z - Y_z d y_z - Z_x d z_x - X_y d x_y$$

für den Zuwachs der freien Energie:

(4) $dF = -AUd\Theta - X_x dx_x - Y_y dy_y - Z_z dz_z - Y_z dy_z - Z_x dz_x - X_y dx_y$.

Hieraus folgt:

$$(5) \quad \begin{cases} AU = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \; X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \; Y_y = -\frac{\partial F}{\partial y_y}, \; Z_z = -\frac{\partial F}{\partial z_z}, \\ Y_z = -\frac{\partial F}{\partial y_z}, \; Z_x = -\frac{\partial F}{\partial z_x}, \; X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y}. \end{cases}$$

Wir erhalten sieben Gleichungen zwischen den 14 Zustandsgrössen Θ, U, $X_x \ldots X_y$, $x_x \ldots x_y$; der Zustund des Körpers ist somit durch sieben von ihnen vollständig bestimmt.

An die Gleichungen (3) und (5) knüpft sich noch eine wichtige Bemerkung. Da die freie Energie eine Function aller der Grössen ist, welche zur Bestimmung des Zustandes nothwendig sind, so gilt gleiches von ihren Differentialquotienten. In den Gleichungen (3) ist somit die Entropie ebenso eine Function der Temperatur wie des Volumens, der Druck ebenso abhängig von dem Volumen wie von der Temperatur. In den Gleichungen (5) sind die Drucke Functionen der Verschiebungen und der Temperatur; gleiches gilt von der Entropie; da ferner die Wärmemenge, welche dem Körper während einer sehr kleinen Zustandsänderung zugeführt wird, gleich dem mit der absoluten Temperatur multiplicirten Zuwachs der Entropie ist, so wird sie gleichfalls ebenso von der Temperaturerhöhung wie von den Verschiebungen abhängen.

In beiden vorhergehenden Beispielen können wir den Zustand des Körpers bestimmen durch zwei wesentlich verschiedene Klassen von Zustandsgrössen, Temperatur einerseits, Verschiebungen andererseits. Ein complicirteres System wird gebildet von einer Platte, welche aus einem Turmalin senkrecht zu der Axe herausgeschnitten ist. Bei ihr bestehen ausser den elastischen Verschiebungen noch electrische Polarisationen in den kleinsten Theilchen des Krystalles; diese sind bestimmt durch ihre Richtung und Grösse und haben daher den Charakter einer Richtungsgrösse oder eines Vectors; sie sind gegeben durch die Projectionen des Vectors auf drei zu einander senkrechte Coordinatenaxen, die Componenten des electrischen Momentes, α, β, γ. Den electrischen Verschie-

bungen lassen wir electrische Kräfte, A, B, Γ entsprechen, sodass das Product aus einem Momente und dem Zuwachs der entsprechenden Kraft gleich der bei der Verschiebung geleisteten Arbeit wird. Dann ergibt sich für den Zuwachs der freien Energie;

$$(6)\quad dF = -AUd\Theta - X_x dx_x - \ldots X_y dx_y - \alpha dA - \beta dB - \gamma d\Gamma.$$

Hieraus folgen die zehn Gleichungen

$$AU = -\frac{\partial F}{\partial \Theta},\quad X_x = -\frac{\partial F}{\partial x_x}, \ldots X_y = -\frac{\partial F}{\partial x_y},$$

$$\alpha = -\frac{\partial F}{\partial A},\quad \beta = -\frac{\partial F}{\partial B},\quad \gamma - \frac{\partial F}{\partial \Gamma}.$$

Entropie und Wärmezufuhr, elastische Drucke, electrische Momente sind daher nicht blos von den ihnen eigentlich adäquaten Veränderungen, von Temperatur, elastischer Deformation, electrischer Kraft abhängig vielmehr ist jede dieser Grössen zugleich abhängig von allen übrigen Veränderlichen. Der Turmalin unterscheidet sich von den früher besprochenen Systemen dadurch, dass bei ihm drei verschiedene Erscheinungen miteinander verbunden erscheinen, Wirkungen der Wärme, elastische und electrische Vorgänge. Die Temperaturerhöhung des Turmalins hängt nicht allein von Wärmezufuhr und elastischer Deformation, sondern auch von den electrischen Kräften ab. Ebenso die elastischen Drucke nicht allein von den elastischen Deformationen und der Temperatur, sondern auch von den electrischen Kräften. Endlich die electrischen Momente von den electrischen Kräften, den elastischen Verschiebungen und von der Temperatur.

In vielen Fällen kann man die freie Energie eines thermodynamischen Systems in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen der Zustandsgrössen fortschreitet. Unter dieser Voraussetzung werde der Zustand ähnlich wie bei dem Turmalin bestimmt durch die Temperatur, durch die Verschiebungen p_1, $p_2 \ldots p_i$, welche bei einer ersten Klasse von Erscheinungen auftreten, die Kräfte Q_1, $Q_2 \ldots Q_k$, auf welchen eine zweite Erscheinungsklasse beruht; es sei dann der Zuwachs der freien Energie:

$$(7)\qquad dF = -AUd\Theta - \sum_i P_i\,dp_i - \sum_k q_k\,dQ_k,$$

somit

$$A\,U = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \qquad P_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad q_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}.$$

Wir setzen:

(8) $$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$$

wo F_1, $F_2 \ldots$ homogene Functionen erster, zweiter... Ordnung der Veränderlichen Θ, p_i und Q_k sind und erhalten dementsprechend:

(9) $$\begin{cases} \Delta\,U = -\dfrac{\partial F_1}{\partial \Theta} - \dfrac{\partial F_2}{\partial \Theta} - \dfrac{\partial F_3}{\partial \Theta} \cdots \\[2ex] P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial p_i} - \dfrac{\partial F_2}{\partial p_i} - \dfrac{\partial F_3}{\partial p_i} \cdots \\[2ex] q_k = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_k} - \dfrac{\partial F_2}{\partial Q_k} \dfrac{\partial F_3}{\partial O_k} \cdots . \end{cases}$$

Den Differentialquotienten von F_1 würden gewisse ein für allemal constante Werthe von U, P_i und q_k entsprechen; da die Beobachtungen nur über die Veränderungen dieser Grössen Aufschluss geben, so können wir jene Constanten gleich Null setzen, und unsere Reihe sogleich mit dem Gliede zweiter Ordnung F_2 beginnen. Die Differentialquotienten von F_2 aber sind homogene lineare Functionen von Θ, p_i und Q_k, welche sämmtliche Variabeln enthalten, sobald die Function F_2 sämmtliche Quadrate und doppelte Producte der Variabeln enthält. Vereinfachungen der Gleichungen treten ein, sobald das eine oder andere jener Glieder fehlt. Wenn wir gegen F_2 die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen können, so sind die U, P_i und q_k additive Eigenschaften des Systems. Beispielsweise erhalten wir den Druck P_i durch Addition der Drucke, welche den Aenderungen von Θ, p_i und Q_k einzeln genommen entsprechen.

Das dritte Glied der Reihe, F_3, gibt Veranlassung zur Entstehung von Theilen der Grössen U, P_i und q_k, welche durch homogene Functionen zweiter Ordnung der Θ, p_i und Q_k dargestellt sind. Diese neuen Glieder können neben den von F_2 herrührenden die Rolle kleiner Correctionen spielen; man kann ihnen dann Rechnung tragen, indem man die in F_2 auftretenden Coefficienten selbst wieder mit den Zustandsgrössen sich ändern läst. Im allgemeinen sind die neuen Glieder als neue selbständige Wirkungen zu betrachten, deren Eigenthüm-

lichkeit darin liegt, dass sie von den Combinationen der Veränderlichen Θ, p_i und Q_k zu zweigliedrigen Producten abhängen.

Den doppelten Producten entsprechen dabei Wirkungen, welche an das gleichzeitige Bestehen zweier verschiedener Bedingungen gebunden sind; beispielsweise electrische Verschiebungen, die nur auftreten, wenn gleichzeitig electrische Kräfte und elastische Deformationen oder elastische Deformationen zusammen mit einer Aenderung der Temperatur vorhanden sind. Es leuchtet ein, dass die von F_3 abhängenden Eigenschaften des Systems keine additiven sind.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich, dass für die Beurtheilung eines thermodynamischen Systems zwei wesentlich verschiedene Dinge maassgebend sein können. Einmal die Zahl der verschiedenartigen physikalischen Erscheinungen, welche bei dem System miteinander in Wechselwirkung treten; sodann die in der Reihenentwickelung der freien Energie auftretenden Glieder und insbesondere die Ordnung, bis zu der sie zu verfolgen sind.

Man könnte hiernach Stufe und Ordnung thermodynamischer Systeme unterscheiden. Der Turmalin würde ein Beispiel für ein System zweiter, der Muskel eines für ein System dritter Stufe sein.

2. Thermodynamische Eigenschaften des Turmalins.

In der Reihenentwickelung der freien Energie führen wir an Stelle der absoluten Temperatur den Ueberschuss ϑ über eine bestimmte Normaltemperatur Θ ein; das gewöhnliche elastische Potential bezeichnen wir durch $2f$; bezogen auf die Hauptaxen des Turmalins ist:

$$(13)\quad \begin{cases} 2f = c_{11}\,x_x^2 + 2\,c_{12}\,x_x y_y + 2\,c_{13}\,x_x z_z + 2\,c_{14}\,x_x y_z \\ \quad + c_{11}\,y_y^2 + 2\,c_{13}\,y_y z_z - 2\,c_{14}\,y_y y_z + c_{33}\,z_z^2 \\ \quad + c_{44}\,y_z^2 + c_{44}\,z_x^2 + 2\,c_{14}\,z_x x_y + \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2}\,x_y^2 . \end{cases}$$

Wir setzen:

$$(14)\begin{cases} 2\,F = 2\,f - r_1\,A^2 - r_1\,B^2 - r_3\,\Gamma^2 - \dfrac{A\,\varepsilon\,c\,\vartheta^2}{\Theta} \\ \quad - 2\,A\{\varepsilon_{15}\,z_x - \varepsilon_{22}\,x_y\} - 2\,B\{\varepsilon_{15}\,y_z - \varepsilon_{22}\,(x_x - y_y)\} \\ \quad - 2\,\Gamma\{\varepsilon_{31}\,(x_x + y_y) + \varepsilon_{33}\,z_z\} - 2\,\vartheta\,(q_1\,x_x + q_1\,y_y + q_3\,z_z) \\ \quad - 2\,\vartheta\,(e_1\,A + e_1\,B + e_3\,\Gamma) . \end{cases}$$

Dann ergeben sich die Formeln:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
X_x &= -\frac{\partial f}{\partial x_x} - \varepsilon_{22} B + \varepsilon_{31} \Gamma + q_1 \vartheta \\
Y_y &= -\frac{\partial f}{\partial y_y} + \varepsilon_{22} B + \varepsilon_{31} \Gamma + q_1 \vartheta \\
Z_z &= -\frac{\partial f}{\partial z_z} \qquad\qquad + \varepsilon_{33} \Gamma + q_3 \vartheta \\
Y_z &= -\frac{\partial f}{\partial y_z} + \varepsilon_{15} B, \qquad Z_x = -\frac{\partial f}{\partial z_x} + \varepsilon_{15} A \\
X_y &= -\frac{\partial f}{\partial x_y} - \varepsilon_{22} A \\
\alpha &= r_1 A + \varepsilon_{15} z_x - \varepsilon_{22} x_y + e_1 \vartheta \\
\beta &= r_1 B + \varepsilon_{15} y_z - \varepsilon_{22} (x_x - y_y) + e_1 \vartheta \\
\gamma &= r_3 \Gamma + \varepsilon_{31} (x_x + y_y) + \varepsilon_{33} z_z + e_3 \vartheta \\
A U &= \frac{A \varepsilon c \vartheta}{\Theta} + q_1 x_x + q_1 y_y + q_3 z_z + e_1 A + e_1 B + e_3 \Gamma.
\end{aligned}\right.$$

Für die Wärmemenge, deren Zufuhr der Temperaturerhöhung ϑ entspricht, ergibt sich hieraus

$$(16)\quad Q = \varepsilon c \vartheta + \frac{\Theta}{A} \{q_1 x_x + q_1 y_y + q_3 z_z + e_1 A + e_1 B + e_3 \Gamma\}.$$

c ist hiernach die specifische Wärme bei constanter Form im constanten electrischen Felde.

Rühren die Deformationen $x_x, \ldots$ nur von einer gleichmässigen Erwärmung des Turmalins her, so ist

$$x_x = y_y = a_1 \vartheta, \qquad z_z = a_3 \vartheta$$

und somit

$$\alpha = r_1 A + e_1 \vartheta, \quad \beta = r_1 B + e_1 \vartheta, \quad \gamma = r_3 \Gamma + (2 a_1 \varepsilon_{31} + a_3 \varepsilon_{33}) \vartheta + e_3 \vartheta.$$

Die von mir ausgeführten Messungen pyroelectrischer Momente haben in Verbindung mit den gemeinschaftlich mit Voigt gemachten Bestimmungen piëzoelectrischer Constanten gezeigt, dass e_3 innerhalb der Genauigkeitsgrenzen unserer Beobachtungen gleich Null gesetzt werden kann; die Constanten e_1 müssen aus Symmetriegründen verschwinden, sodass die obigen Formeln übergehen in

$$\alpha = r_1 A, \quad \beta = r_1 B, \quad \gamma = r_3 \Gamma + (2 a_1 \varepsilon_{31} + a_3 \varepsilon_{33}) \vartheta.$$

Ein zweites System von Gleichungen erhält man, wenn

man die Gleichungen (15) zur Berechnung der Verschiebungsgrössen benutzt. Setzen wir

$$\begin{aligned}2f' = s_{11} X_x^2 + 2 s_{12} X_x Y_y + 2 s_{13} X_x Z_z + 2 s_{14} X_x Y_z \\ + s_{11} Y_y^2 + 2 s_{13} Y_y Z_z - 2 s_{14} Y_y Y_z + s_{33} Z_z^2 \\ + s_{44} Y_z^2 + s_{44} Z_x^2 + 4 s_{14} Z_x X_y + 2 (s_{11} - s_{12}) X_y^2\end{aligned}$$

so lauten die neuen Gleichungen:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} x_x &= -\frac{\partial f'}{\partial X_x} - \delta_{22} B + \delta_{31} \Gamma + a_1 \vartheta \\ y_y &= -\frac{\partial f'}{\partial Y_y} + \delta_{22} B + \delta_{31} \Gamma + a_1 \vartheta \\ z_z &= -\frac{\partial f'}{\partial Z_z} \qquad + \delta_{33} \Gamma + a_3 \vartheta \\ y_z &= -\frac{\partial f'}{\partial Y_z} + \delta_{15} B, \qquad z_x = -\frac{\partial f'}{\partial Z_x} + \delta_{15} A \\ x_y &= -\frac{\partial f'}{\partial X_y} - 2 \delta_{22} A \\ \alpha &= \varrho_1 A - \delta_{15} Z_x + 2 \delta_{22} X_y \\ \beta &= \varrho_1 B - \delta_{15} Y_z + \delta_{22} (X_x - Y_y) \\ \gamma &= \varrho_3 \Gamma - \delta_{31} (X_x + Y_y) - \delta_{33} Z_z + f_3 \vartheta \\ A\, U &= \frac{A\, s\, c' \vartheta}{\Theta} - a_1 X_x - a_1 Y_y - a_3 Z_z + f_3 \Gamma. \end{aligned}\right.$$

Die Wärmezufuhr, welche der Temperaturzunahme ϑ entspricht, wird

$$(18)\qquad Q = s\, c' \vartheta - \frac{\Theta}{A} (a_1 X_x + a_1 Y_y + a_3 Z_z + f_3 \Gamma).$$

Zwischen den piëzoelectrischen Moduln δ und den piëzoelectrischen Constanten ε bestehen die von Voigt entwickelten Beziehungen. Es ist ferner

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= r_1 + \varepsilon_{15} \delta_{15} + 2 \varepsilon_{22} \delta_{22} \\ \varrho_3 &= r_3 + 2 \varepsilon_{31} \delta_{31} + \varepsilon_{33} \delta_{33} \\ f_3 &= 2 \varepsilon_{31} a_1 + \varepsilon_{33} a_3 .\end{aligned}$$

Wir denken uns nun eine Turmalinplatte von unbegrenzter Ausdehnung senkrecht zu der Axe geschnitten; die z-Axe des Coordinatensystems laufe von dem antilogen zu dem analogen Pole; die elastischen Drucke seien gleich Null mit Ausnahme

von Z_z, die Kraftlinien des electrischen Feldes parallel der z-Axe. Die vorhergehenden Gleichungen werden:

$$(19)\quad \begin{cases} x_x = y_y = -s_{13} Z_z + \delta_{31} \Gamma + a_1 \vartheta \\ z_z = -s_{33} Z_z + \delta_{33} \Gamma + a_3 \vartheta \\ \gamma = \varrho_3 \Gamma - \delta_{33} Z_z + f_3 \vartheta \\ Q = s c' \vartheta - \frac{a_3 \Theta}{A} Z_z + \frac{f_3 \Theta}{A} \Gamma . \end{cases}$$

Die numerischen Werthe der Coefficienten sind in cm, g, sec. die folgenden:

$$\begin{array}{ll} s_{33} = 0{,}624 \times 10^{-12} & s_{13} = -0{,}016 \times 10^{-12} \\ \delta_{33} = 5{,}71 \times 10^{-8} & \delta_{31} = 0{,}88 \times 10^{-8} \\ a_1 = 7{,}73 \times 10^{-6} & a_3 = 9{,}37 \times 10^{-6} \\ f_3 = 1{,}34 & \varrho_3 = 0{,}403 \end{array}$$

$$s = 3{,}116 \qquad c' = 0{,}245 \qquad A = 4{,}18 \times 10^7 .$$

Das electrische Feld, in dem sich der Turmalin befindet, bezeichnen wir als ein positives, wenn die Kraftlinien in der Richtung der positiven z-Axe, also vom antilogen Pol zum analogen laufen.

Wir wenden die Gleichungen (19) noch auf zwei speciellere Aufgaben an.

1. Die beiden Endflächen der Turmalinplatte seien mit Stanniolbelegen versehen; die untere antiloge Fläche werde auf ein Potential von V Volt, die obere analoge auf das Potential 0 gebracht. Jedes cm² der Oberfläche werde einem Zuge von K Megadynen (= 10^6 Dynen = 1,02 Kilogrammgewichten) unterworfen, die Temperatur um ϑ Grade erhöht. Nach electrostatischem Maasse ist

$$\Gamma = 0{,}333 \times 10^{-2}\, V/d ,$$

wenn d die Dicke der Turmalinplatte. Somit ergibt sich:

$$(20)\quad \begin{cases} x_x = -0{,}016 \times 10^{-6} K + 0{,}293 \times 10^{-10} V/d + 7{,}73 \times 10^{-6} \vartheta \\ z_z = 0{,}624 \times 10^{-6} K + 1{,}903 \times 10^{-10} V/d + 9{,}73 \times 10^{-6} \vartheta \\ \gamma = 0{,}134 \times 10^{-2} V/d + 5{,}71 \times 10^{-2} K + 1{,}34 \vartheta \\ Q = 0{,}764 \times \vartheta + 0{,}651 \times 10^{-4} K + 0{,}311 \times 10^{-7} V/d . \end{cases}$$

Setzen wir $\vartheta = 0$ und lassen wir V von Null an zu allmählich grösseren negativen Werthen wachsen, so wird die zu

Anfang durch den Zug K erzeugte Dilatation kleiner, verschwindet, wenn $V = -3280\,Kd$, und geht dann in eine Contraction über. Setzen wir ausser ϑ auch z_z gleich Null, so ergibt sich für die Spannung, die zu Erhaltung einer constanten Plattendicke erforderlich ist, der Werth

$$K = -3{,}046 \times 10^{-4}\,V/d.$$

Gleichzeitig wird in der Volumeneinheit eine Wärmemenge von $0{,}112 \times 10^{-7}\,V/d$ Calorien entwickelt.

Wir können die Dicke der Platte auch gegenüber einer Aenderung der Temperatur constant erhalten und zwar entweder durch eine Spannung oder durch Herstellung eines electrischen Feldes. Im ersten Falle ergibt sich

$$K = -15{,}6\,\vartheta,$$

im zweiten

$$V = -5{,}11 \times 10^4\,\vartheta\,d.$$

Für eine adiabatische Zustandsänderung gelten die Formeln:

$$\vartheta = -0{,}855 \times 10^{-4}\,K - 0{,}408 \times 10^{-7}\,V/d$$

$$x_x = -(0{,}016 \times 10^{-6} + 0{,}066 \times 10^{-8})\,K + (0{,}293 \times 10^{-10} - 0{,}315 \times 10^{-12})\,V/d$$

$$z_z = (0{,}624 \times 10^{-6} - 0{,}080 \times 10^{-8})\,K + (1{,}903 \times 10^{-10} - 0{,}382 \times 10^{-12})\,V/d$$

$$\gamma = 0{,}134 \times 10^{-2}\,V/d + (5{,}71 \times 10^{-2} - 1{,}15 \times 10^{-4})\,K.$$

Bringen wir die Turmalinplatte bei constanter Spannung in ein electrisches Feld, dessen Kraftlinien vom antilogen Pole zu dem analogen laufen, so kühlt sie sich ab; gleichzeitig dehnt sie sich aus in der Richtung der Axe und senkrecht dazu. Machen wir das Potential V gleich Null, so erhalten wir die gewöhnlichen adiabatischen Zustandsänderungen, ausserdem aber eine electrische Polarisation in der Richtung der Axe.

Zu Erhaltung einer constanten Plattendicke ist bei adiabatischer Zustandsänderung eine Spannung

$$K = -3{,}046\,(1 - 0{,}0007)\,10^{-4}\;V/d$$

erforderlich. Die Temperaturänderung ist:

$$\vartheta = -0{,}151 \times 10^{-7}\,V/d.$$

2. Die Endflächen der Turmalinplatte seien isolirt. Es ist $\Gamma = -4\pi\gamma$, und es ergeben sich daher die Gleichungen:

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned} \gamma &= 0{,}944 \times 10^{-2} K + 0{,}221\,\vartheta \\ \Gamma &= -0{,}119\,K \qquad\quad - 2{,}783\,\vartheta \\ x_x &= -(0{,}016 \times 10^{-6} + 0{,}112 \times 10^{-8})K \\ &\quad + (7{,}73 \times 10^{-6} - 2{,}45 \times 10^{-8})\,\vartheta \\ z_z &= (0{,}624 \times 10^{-6} - 0{,}679 \times 10^{-8})K \\ &\quad + (9{,}73 \times 10^{-6} - 15{,}9 \times 10^{-8})\,\vartheta \\ Q &= 0{,}764\,\vartheta + (0.651 \times 10^{-4} - 0{,}011 \times 10^{-4})K. \end{aligned}\right.$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Endflächen der Platte ausgedrückt in Volt ist:

$$35{,}7\,Kd + 835\,\vartheta\,d.$$

Die zur Erhaltung einer constanten Plattendicke erforderliche Spannung

$$K = -15{,}6\,(1 - 0{,}0054)\,\vartheta.$$

Bei einer adiabatischen Aenderung des Zustandes wird:

$$\begin{aligned} \vartheta &= -(0{,}855 \times 10^{-4} - 0{,}015 \times 10^{-4})K \\ x_x &= -(0{,}017 \times 10^{-6} + 0{,}065 \times 10^{-8})K \\ z_z &= (0{,}617 \times 10^{-6} - 0{,}078 \times 10^{-8})K \\ \gamma &= (0{,}944 \times 10^{-2} - 0{,}186 \times 10^{-4})K. \end{aligned}$$

Die mittleren dieser Formeln lassen die Aenderungen erkennen, welche die elastischen Constanten durch den adiabatischen Verlauf der Deformation und die gleichzeitige electrische Polarisation erfahren.

Reciprocitätssätze.

Die eine Reihe der Zustandsgrössen P_i und q_k ist durch die partiellen Differentialquotienten der freien Energie nach den entsprechenden Veränderlichen der anderen Reihe p_i und Q_k dargestellt worden. Aus den betreffenden Formeln folgen allgemein die Beziehungen:

$$\frac{\partial P_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i}, \quad A\frac{\partial U}{\partial p_i} = \frac{\partial P_i}{\partial \Theta}, \quad A\frac{\partial U}{\partial Q_k} = \frac{\partial q_k}{\partial \Theta}.$$

Für den Turmalin insbesondere ergibt sich aus den Gleichungen (15):

$$\frac{\partial Z_z}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_z} = \varepsilon_{33}, \quad \frac{A}{\Theta}\frac{\partial Q}{\partial x_z} = \frac{\partial Z_z}{\partial \vartheta} = q_3.$$

Ebenso aus den Gleichungen (17) oder (19):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Z_z} = -\frac{\partial z_z}{\partial \Gamma} = -\delta_{33}\,, \quad \frac{A}{\Theta}\frac{\partial Q}{\partial Z_z} = -\frac{\partial z_z}{\partial \vartheta} = -a_3\,,$$

$$\frac{A}{\Theta}\frac{\partial Q}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} = f_3.$$

Ein Druck Z_z in der Richtung der Axe erzeugt ein negatives Moment γ und dementsprechend im Innern der Platte ein positives electrisches Feld; ein positives Feld Γ, bei dem die Kraftlinien vom antilogen Pol zum analogen gehen, erzeugt Dilatation in der Axen-Richtung. Umgekehrt entspricht einer Dilatation z_z ein positives Moment γ und ein negatives Feld im Innern der Platte; in einem positiven Feld ist zu Erhaltung der Plattendicke ein Druck in der Axenrichtung nothwendig. Bringt man einen Turmalin bei constanter Temperatur und constantem Druck in ein positives electrisches Feld, so wird er Wärme absorbiren.

Benutzt man als unabhängige Veränderliche z_z und γ, so ergibt sich

$$\frac{\partial Z_z}{\partial \gamma} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial z_z} = \frac{\varepsilon_{33}}{r_3}$$

ebenso für γ und Z_z als unabhängige Veränderliche.

$$\frac{\partial z_z}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Gamma}{\partial Z_z} = \frac{\delta_{33}}{\varrho_3}\,.$$

Diese letztere Gleichung scheint in Verbindung mit $(\partial \gamma / \partial z_z) = (\partial Z_z / \partial \Gamma) = \varepsilon_{33}$ zu einem eigenthümlichen Zirkel zu führen. [1]) Die Dilatation z_z erzeugt ein positives Moment γ, umgekehrt das Moment γ eine Dilatation z_z, sodass zwei sich wechselseitig steigernde Effecte vorzuliegen scheinen. Thatsächlich ist diese Auffassung nicht richtig, da die betreffenden Gleichungen auf der Anwendung verschiedener unabhängiger Veränderlicher beruhen. Man könnte sonst genau denselben Schluss bei den aus der Gasgleichung folgenden Beziehungen $(\partial v / \partial p) = -(R\,T / p^2)$, $(\partial p / \partial v) = -(R\,T / v^2)$ machen.

Die im Vorhergehenden besprochenen Reciprocitätssätze sind zum grössten Theile bekannt. Sie ergeben sich aber aus der Gleichung der freien Energie, welche in diesem Sinne wohl zuerst von Duhem verwerthet wurde, einfacher als auf den von Lippmann und Pockels eingeschlagenen Wegen.

1) Pockels, Neues Jahrb. f. Mineralogie. Beil. 7. p. 201. 1890.

III. Theorie der Muskelcontraction.

Beim Turmalin können wir im electrischen Felde Erscheinungen hervorrufen, welche in gewisser Weise an die Vorgänge bei der Muskelcontraction erinnern. Belasten wir eine senkrecht zur Hauptaxe geschnittene Turmalinplatte mit einem Gewichte, so erleidet sie eine gewisse Verlängerung. Unterwerfen wir sie nun der Wirkung einer constanten in der Richtung vom analogen zum antilogen Pole wirkenden electrischen Kraft, so zieht sie sich zusammen und leistet dabei Arbeit. Gleichzeitig wird im Innern Wärme frei. Wir können andererseits durch Vermehrung des Zuges die Contraction verhindern und zwar würde bei einem Potentialgefälle von 1000 Volt auf das cm^2 ein Zug von etwa 300 g auszuüben sein. Auch hierbei wird Wärme frei, aber um $^2/_3$ weniger, als im vorhergehenden Falle. Durch rasches Anschwellen und Wiederverschwinden der electrischen Kraft würden Bewegungen erzeugt, analog der elementaren Zuckung des Muskels.

Dabei würde beim Turmalin am Schlusse der Zuckung Spannung und Dilatation wieder genau dieselbe, wie zu Anfang und eine Arbeit nicht geleistet sein, es könnte also auch keine Erwärmung auftreten. Hier versagt also die Analogie zwischen Turmalin und Muskel.

Nach der Auffassung Müller's würde nun aber die Ursache der electrischen Erregung nicht in einer von aussen wirkenden electrischen Kraft, sondern in einer Temperatursteigerung im Innern des Muskels liegen. Dementsprechend würde man als Analogon des Muskels den isolirten Turmalin betrachten können, dessen Zustand nur noch von Temperatur und Spannung abhängig ist. Aber nun ergibt sich aus den Gleichungen (21), dass bei wachsender Temperatur der Turmalin sich ausdehnt, während der Muskel sich verkürzen muss; es ist also thatsächlich keine Analogie mehr vorhanden. Man kann zu einer neuen Analogie, welche aber nicht mehr experimentell zu realisiren ist, nur gelangen, wenn man den Constanten des allgemeinen Gleichungssystems (19) wesentlich andere Eigenschaften beilegt. Zunächst ergibt sich mit $\Gamma = -4\pi\gamma$ und mit $D_3 = 1 + 4\pi\varrho_3$

$$
22)\quad \begin{cases}
x_x = -\left(s_{13} - \dfrac{4\pi\,\delta_{33}\,\delta_{31}}{D_3}\right) Z_z + \left(a_1 - \dfrac{4\pi f_3\,\delta_{31}}{D_3}\right)\vartheta \\[2ex]
z_z = -\left(s_{33} - \dfrac{4\pi\,\delta_{33}^2}{D_3}\right) Z_z + \left(a_3 - \dfrac{4\pi f_3\,\delta_{33}}{D_3}\right)\vartheta \\[2ex]
\dfrac{A}{\Theta}\,Q = \left(\dfrac{A}{\Theta}\,s\,c' - \dfrac{4\pi f_3^2}{D_3}\right)\vartheta - \left(a_3 - \dfrac{4\pi f_3\,\delta_{33}}{D_3}\right) Z_z
\end{cases}
$$

Damit eine Temperaturerhöhung bei constantem Druck Contraction in der Axenrichtung erzeugt, muss $(4\pi f_3\,\delta_{33})/(D_3) > a$ sein.

Die Gleichungen (22) würden in der That einige Eigenthümlichkeiten der Muskelbewegung wieder geben, allein auch sie schliessen in dem Falle einer einfachen Zuckung jede bleibende Zunahme der Temperatur aus und bedürfen somit auf alle Fälle einer Ergänzung. Um zu einer solchen zu gelangen, gehen wir von einer etwas allgemeineren Betrachtung aus.

Was immer die Beschaffenheit der Muskelsubstanz sein mag, jedenfalls wird der Zustand des Muskels zu irgend einer Zeit durch Angabe gewisser Zustandsgrössen zu bestimmen sein. Als solche werden wir zu betrachten haben die elastischen Deformationen und die Temperatur; wir nehmen eine weitere Grösse hinzu, welche den Charakter eines Vectors besitze und als *tonisches Moment* bezeichnet werde. Den Componenten des tonischen Momentes lassen wir Componenten einer *tonischen Kraft* entsprechen. Ausserdem muss der Zustand des Muskels mindestens noch von einer Veränderlichen abhängen, da sonst bleibende Temperaturerhöhung als Folge einer Zuckung nicht möglich wäre. Wir wollen diese Grösse in Anlehnung an die Theorie Müller's als *Quellungsgrad* bezeichnen, die entsprechende Kraft als den *Quellungsdruck.*

Durch Angabe der genannten Grössen werden wir den Zustand, in welchem sich ein Muskel befindet, keineswegs vollständig beschreiben. Um den Verhältnissen der Wirklichkeit näher zu kommen, müssten wir den Muskel als ein Aggregat vieler verschiedener Körper betrachten, von denen jeder seine eigenen Zustandsgrössen besitzt. Es ist aber klar, dass eine solche Annahme zu einer hoffnungslosen Complication der Aufgabe führt, und es bleibt also nichts übrig, als sich an das einfachste mögliche Schema zu halten und zu versuchen, ob dieses nicht wenigstens den gröberen und mehr äusserlichen Zügen der Erscheinungen gerecht zu werden vermag. Im

Grunde ist ja auch das Verfahren, welches wir in der Physik der nicht organisirten Körper befolgen, hiervon nicht so ganz verschieden. Körper, welche nachweislich aus Aggregaten kleiner Krystalle bestehen, behandeln wir als Continua; gehen wir über das mikroskopisch Wahrnehmbare hinaus, so betrachten wir die Bewegungen der Molecüle nur in der kinetischen Theorie der Gase, während doch, wenn man sich einmal auf den atomistischen Standpunkt stellt, alle Erscheinungen in letzter Instanz von den Molecülen und ihrer chemischen Zusammensetzung abhängen müssen.

Als unabhängige Veränderliche, durch welche der Zustand des Muskels bestimmt wird, mögen nun im Folgenden *elastische Verschiebungen, tonische Kräfte, Quellungsdruck* und *Temperatur* betrachtet werden. Es muss dann dem Energieprincip zufolge eine Function dieser Veränderlichen existiren, durch deren Differentialquotienten die zweite Reihe der Zustandsgrössen, *elastische Spannungen, tonische Momente, Quellungsgrad* und *Entropie* gegeben wird. Diese Function denken wir uns entwickelt in eine Reihe, welche nach homogenen Functionen zweiter, dritter Ordnung . . . fortschreitet. In dieser Reihe werden wir uns im allgemeinen beschränken auf die Glieder zweiter Ordnung; nur ein einziges Glied der dritten Ordnung möge noch berücksichtigt werden, um auch den von Müller gemachten Annahmen zu entsprechen. Müller denkt sich als Ursache der Contraction die wechselseitigen Anziehungen, welche die in gleichem Sinne polarisirten Disdiaklasten auf einander ausüben, d. h. er betrachtet die *Contraction als eine Folge der Electrostriction.* In den Ausdrücken für die elastischen Drucke erhalten wir Glieder, welche der Electrostriction entsprechen, wenn wir in der freien Energie ein Glied aufnehmen von der Form:

$$\begin{aligned}
&- (l_{11} A^2 + l_{12} B^2 + l_{13} \Gamma^2) x_x - 4 l_{44} B \Gamma y_z \\
&- (l_{12} A^2 + l_{22} B^2 + l_{13} \Gamma^2) y_y - 4 l_{44} \Gamma A z_x \\
&- (l_{13} A^2 + l_{13} B^2 + l_{33} \Gamma^2) z_z - 4 l_{66} A B x_y
\end{aligned}$$

Analoge Terme werden wir auch in die Energie des Muskels einführen, wobei wir dann unter A, B, Γ die Componenten der tonischen Kraft verstehen.

Die allgemeinen Formeln wollen wir vereinfachen durch

die *Annahme, dass ein elastischer Druck und eine tonische Kraft nur in der Längsrichtung des Muskels wirke.* Wir brauchen dann auch die Formel, durch welche die Quercontraction bestimmt wird, nicht weiter zu berücksichtigen; die in derselben auftretenden Constanten sind von den in den übrigen Gleichungen enthaltenen verschieden und würden im allgemeinen durch die Bedingung des constanten Volumens zu bestimmen sein. Bezeichnen wir den Druck in der Richtung der Axe durch Z_z, die tonische Kraft durch Γ, die Temperatur durch ϑ, den Quellungsdruck durch Π, so ergeben sich für die Dilatation z_z, das tonische Moment γ, die Wärmemenge, welche dem Muskel bei seiner Zustandsänderung zugeführt wurde, und endlich den Quellungsgrad die Formeln:

$$(23)\quad \begin{cases} z_z = -s Z_z + \delta \Gamma + a \vartheta + m \Pi - l \Gamma^2 \\ \gamma = \varrho \Gamma - \delta Z_z + f \vartheta + 2 l \Gamma Z_z \\ \frac{A}{\Theta} Q = \frac{A}{\Theta} \varepsilon c \vartheta - a Z_z + f \Gamma - \lambda \Pi \\ \omega = \varkappa \Pi + \lambda \vartheta + m Z_z. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist s der Elasticitätscoefficient, a der Wärmeausdehnungscoefficient des Muskels; A das mechanische Aequivalent der Wärme; Θ die absolute Temperatur; ε Dichte und c specifische Wärme des Muskels; δ, m, l, ϱ, f, λ, $\varkappa$ sind gewisse neu einzuführende Constanten.

Die erste dieser Gleichungen wollen wir umformen, indem wir an Stelle von s den Elasticitätsmodulus $E = 1/s$ und ausserdem ein der inneren Reibung entsprechendes Glied einführen. Wir erhalten:

$$(24)\quad Z_z = - E z_z - H \frac{d z_z}{d t} + E \delta I + E a \vartheta + E m \Pi - E l \Gamma^2$$

Wir knüpfen an diese Formel die Berechnung der Elasticität des Muskels im Ruhezustand und im Tetanus; sie ist im allgemeinen abhängig von der Belastung; es werden daher im Folgenden die Werthe der Elasticitätscoefficienten für die allmählich zunehmende Belastung und ausserdem ihr Mittelwerth angegeben werden.

1. Elasticität des ruhenden Muskels.

Der auf den Muskel ausgeübte Zug betrage K Gramme; sein Querschnitt sei ω, die ursprüngliche Länge L, die Verlängerung λ; dann ist:

$Z_z = -\frac{K}{\omega}$, $z_z = \frac{\lambda}{L}$ und wenn K, K' zwei verschiedene Belastungen, λ und λ' die entsprechenden Verlängerungen:

$$E\omega = \frac{(K' - K)L}{\lambda' - \lambda}.$$

Aus Beobachtungen von Ed. Weber[1]) ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Werthe von $K' - K$ und $E\omega$

$K' - K$	10 – 5	15 – 10	20 – 15	25 – 20	30 – 25
$E\omega$	211	234	264	301	703

Im Mittel: $E\omega = 300$.

Aus einer Beobachtungsreihe von Fick[2]):

$K' - K$	100 – 50	150 – 100	200 – 150	250 – 200
$E\omega$	840	1450	530	1600
$K' - K$	300 – 250	350 – 300		
$E\omega$	4000	1230		

Im Mittel: $E\omega = 1100$.

Aus einer zweiten Beobachtungsreihe[3]) von Fick ergibt sich:

$K' - K$	10 – 5	20 – 10	30 – 20	40 – 30
$E\omega$	390	630	1120	1450
$K' - K$	50 – 40	60 – 50	70 – 60	
	2470	2470	3530	

Im Mittel: $E = 1170$.

2. Elasticität des gereizten Muskels.

In Gleichung (24) setzen wir:

$$\delta\Gamma + a\vartheta + m\Pi - l\Gamma^2 = -\frac{\tau}{L},$$

für $Z_z = 0$ ist dann:

$$z_z = -\frac{\tau}{L}$$

1) Diese Beobachtungsdaten, ebenso wie die im Folgenden benutzten sind entnommen dem Buche von Fick „Mechanische Arbeit und Wärmeentwickelung bei der Muskelthätigkeit". Internationale wissenschaftliche Bibliothek. Leipzig 1882. 51.

2) Fick, l. c. p. 21.

3) l. c. p. 113.

und daher τ die tetanische Verkürzung. Es ist ferner

$$Z_s = -E\left(z_s + \frac{\tau}{L}\right).$$

Bezeichnen wir die Verlängerung, welche der Muskel von dem Zustande der grössten tetanischen Zusammenziehung aus erleidet, durch λ, so ist

$$z_s = -\frac{\tau - \lambda}{L}$$

und somit

$$Z_s = -E\frac{\lambda}{L}.$$

Aus den Beobachtungen Webers'[1]) ergibt sich:

$K' - K$	10 – 5	15 – 10	20 – 15	25 – 20	30 – 25
$E\omega$	176	117	111	81	84.

Im Mittel: $E\omega = 105$.

Aus Messungen von Fick, welche sich auf denselben Muskel beziehen, wie die erste von den im Vorhergehenden benutzten Beobachtungsreihen[2])

$K' - K$	100 – 50	150 – 100	200 – 150	250 – 200
$E\omega$	760	760	690	730
$K' - K$	300 – 250	350 – 300		
$E\omega$	690	690		

Im Mittel:

$$E\omega = 720.$$

3. Theorie der elementaren Zuckung.

Wenn man einen Muskel, den wir uns der Einfachheit halber ganz frei hängend denken, einem einmaligen electrischen Schlage aussetzt, so sieht man ihn sich verkürzen und wieder verlängern; der ganze Vorgang vollzieht sich in der Zeit von etwa $^1/_{10}$ Sec. Trägt man auf einer horizontalen Linie die Zeiten, senkrecht dazu die zugehörigen Verkürzungen ab, so entsteht eine Curve, die in ihrem aufsteigenden Theile sanfter geneigt ist, als in dem absteigenden. *Eine Zuckung des Muskels, bei der er sich mit constanter Belastung frei verkürzen kann, nennen wir eine isotonische. Man kann auf der anderen Seite*

1) Fick, l. c. p. 20.

2) l. c. p. 41.)

durch eine passende Steigerung und Wiederverminderung des auf den Muskel ausgeübten Zuges erreichen, dass seine Länge eine constante bleibt. Eine in dieser Weise vor sich gehende Zuckung nennt man eine isometrische. Stellt man die den verschiedenen Zeiten entsprechenden isometrischen Spannungen graphisch dar, so erhält man eine Curve, welche sehr steil ansteigt und ganz allmählich wieder herabsinkt, eine Curve von ganz anderem Ansehen, als die durch die isotonische Verkürzung erzeugte.

Bezeichnen wird durch T die gesammte Zugkraft, welche wir aufwenden müssen, um in irgend einem Augenblicke der Zuckung die Verkürzung des Muskels zu verhindern, durch ω wie früher den Querschnitt des Muskels, so ist:

$$Z^0_z = -\frac{T}{\omega}.$$

Setzen wir diesen Werth an Stelle von Z_z in Gleichung (24) und zugleich $z_z = 0$, so folgt:

$$E(\delta\Gamma + a\vartheta + m\Pi - l\Gamma^2) = -\frac{T}{\omega} \tag{25}$$

und

$$\omega Z_z = -E\omega z_z - H\omega\frac{dx_z}{dt} - T.$$

Die Gleichung für die isotonische Zuckung ergibt sich nun in folgender Weise. Wir nehmen an, dass während derselben die Contraction über die ganze Länge des Muskels sich gleichmässig vertheile; dann ist die Bewegung vollständig bestimmt durch die Strecke λ, welche das freie Ende des Muskels jeweilig nach oben hin zurückgelegt hat. Die zu bewegende Masse setzt sich zusammen aus der Masse des angehängten Gewichtes und der Masse des Muskels selbst. Eine hier nicht weiter auszuführende Rechnung zeigt, dass die letztere nur mit ihrem dritten Theile zu berücksichtigen ist; bezeichnen wir die so berechnete ganze Masse durch m, so wird

$$m\frac{d^2\lambda}{dt^2} = -\omega Z_z$$

$$= E\omega z_z + H\omega\frac{dx_z}{dt} + T.$$

Ist L die ursprüngliche Länge des Muskels, so ist $z_s = -\lambda / L$ und daher

$$(26) \qquad \frac{E\omega}{L}\lambda + \frac{H\omega}{L}\frac{d\lambda}{dt} = T - m\frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Zur Prüfung dieser Gleichung kann man verschiedene Wege einschlagen. Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Beobachtungen habe ich den folgenden gewählt. Durch die Curven der isotonischen Zuckung sind die Werthe von λ für die aufeinanderfolgenden Zeiten gegeben; die Curven lassen sich in ihren mittleren Theilen mit ziemlicher Genauigkeit durch die beiden ersten Glieder einer Fourier'schen Reihe darstellen. Die gefundenen Formeln dienen zur Berechnung von $d\lambda / dt$ und $d^2\lambda / dt^2$, wobei freilich eine Vergrösserung der bei der ersten Rechnung begangenen Fehler nicht zu vermeiden ist. Die Masse m ist gegeben, die Werthe von T sind aus den Curven der isometrischen Zuckung zu entnehmen; es sind also aus den correspondirenden Punkten der isotonischen und isometrischen Curve die Constanten $E\omega / L$ und $H\omega / L$ zu berechnen. Die Prüfung für die Richtigkeit der Formel liegt dann einmal in dem gefundenen Werthe des Elasticitätscoefficienten, andererseits in der Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe von T.

Ich benutze zur Rechnung drei Beobachtungen von Fick[1]), bei welchen das von dem Muskel getragene Gewicht beziehungsweise 5, 10 und 60 g betrug; die zu der ersten Reihe gehörende isometrische Curve war nicht unmittelbar gegeben, sondern musste durch Extrapolation aus den für die Belastungen von 10 und 60 gegebenen construirt werden.

Belastung 5 g.

$$\lambda = 2{,}34 \sin\frac{\pi t}{0{,}138} - 0{,}307 \sin\frac{2\pi t}{0{,}138}.$$

$$E\omega = 2150, \quad H\omega = 57.$$

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
λ ber.	0,79	1,18	1,55	1,89	2,17	2,36	2,42	2,33	2,09
λ beob.	0,87	1,31	1,57	1,84	2,12	2,28	2,37	2,29	2,12
T ber.	320	390	450	480	490	470	420	330	210
T beob.	295	460	470	450	450	450	410	330	250.

1) Fick, l. c. p. 113 und 132.

Belastung 10 g.

$$\lambda = 2{,}27 \sin\frac{\pi t}{0{,}133} - 0{,}396 \sin\frac{2\pi t}{0{,}133}.$$

$$E\omega = 2300, \quad H\omega = 47.$$

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
λ ber.	0,71	1,09	1,47	1,82	2,13	2,33	2,39	2,28	1,98
λ beob.	0,85	1,18	1,49	1,77	2,03	2,25	2,34	2,25	2,07
T ber.	310	380	430	460	480	470	420	330	230
T beob.	290	450	460	450	450	440	400	330	260.

Belastung 60 g.

$$\lambda = 1{,}61 \sin\frac{\pi t}{0{,}128} - 0{,}444 \sin\frac{2\pi t}{0{,}128}.$$

$$E\omega = 3400, \quad H\omega = 21.$$

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
λ ber.	0,39	0,64	0,93	1,23	1,52	1,72	1,81	1,73	1,46
λ beob.	0,50	0,75	0,99	1,07	1,40	1,58	1,71	1,75	1,63
T ber.	170	250	320	380	410	420	390	330	240
T beob.	240	370	380	370	360	370	340	300	260.

Die Beobachtungen beziehen sich auf denselben Muskel, wie die zweite von den p. 447 angeführten Reihen; der bei einer Belastung von 60 g gefundene Elasticitätscoefficient stimmt mit dem früheren überein, die beiden anderen Werthe sind wesentlich grösser, als die entsprechenden der früheren Reihe.

Die Curve der berechneten Werthe von T steigt weniger steil an, als die Curve der beobachteten und fällt rascher ab. Der Grund hierfür kann einmal darin liegen, dass die Annahme einer gleichförmigen Contraction des Muskels unzureichend ist; von grösserem Einflusse ist aber wahrscheinlich der Umstand, dass die Curve der beobachteten λ durch die beiden Sinusfunctionen nicht genügend dargestellt wird; dies muss sich insbesondere in den absteigenden Curvenzweigen bemerklich machen; die Curve der beobachteten λ verläuft gegen die Axe der Zeit asymptotisch, nach dem Wendepunkt sind daher die ihr entsprechenden Werthe von $d^2\lambda / dt^2$ positiv, während die Fourier'sche Reihe negative Werthe von $d^2\lambda / dt^2$ liefert.

4. Beobachtungen mit dem Myographion von Blix.[1])

Ein Muskel wird im gereizten Zustande zunächst so belastet, dass er seine natürliche Länge $L = 9$ cm behält, dann verkürzt, bis seine Spannung verschwindet und darauf durch erneute Spannung wieder gedehnt. Berechnen wir die Beobachtungen nach der früher benutzten Formel

$$E\omega = \frac{K' - K}{\lambda' - \lambda} \cdot L,$$

so ergeben sich die in der folgenden Tabelle enthaltenen Zahlen.

A. Während der Periode der Verkürzung.

$K' - K$	1050—800	800—650	650—520	520—350
$E\omega$	4500	2700	2340	3060
$K' - K$	350—150	150—0		
$E\omega$	3600	2700		

B. Während der Periode der Dehnung.

$K' - K$	190—0	660—190	1070—660	1290—1070
$E\omega$	3400	8460	7380	5850

Im ganzen nimmt $E\omega$, abgesehen von den wellenförmigen Schwankungen der Werthe, während der Beobachtung zu; man wird daher $E\omega$ als eine Function der Variabelen Γ, Π, ϑ zu betrachten und anzunehmen haben, dass diese entsprechenden zeitlichen Aenderungen unterworfen sind. Auch

$$\tau = L(l\,\Gamma^2 - \delta\,\Gamma - a\,\vartheta - m\,\Pi)$$

kann dann nicht constant sein. Aus den Beobachtungen scheint zu folgen, dass τ bis zu einem Maximum anwächst und dann wieder kleiner wird, sodass in dem absteigenden Zweige der Curve demselben λ ein kleineres τ entspricht, als in dem aufsteigenden. Die bei der Verkürzung des Muskels geleistete Arbeit beträgt 1600 g cm, die der Wiederverlängerung entsprechende 3100 g cm.

5. Kinetische Energie und Reibungswärme bei der Contraction.

Aehnliche Differenzen in der Arbeitsleistung wie bei den Beobachtungen von Blix stellen sich heraus, wenn man einen

1) Blix, l. c. p. 25.

Muskel langsam sich zusammenziehen lässt, während Spannung und Belastung im Gleichgewicht stehen und wenn er sich andererseits plötzlich contrahirt, wobei dann die geleistete Arbeit ein Aequivalent in der lebendigen Kraft geschleuderter Massen findet.

Wenn im ersteren Falle die geleistete Arbeit grösser ist als im zweiten, so kann der Grund hierfür zum Theil wieder in verschiedenen Werthen des Elasticitätscoefficienten liegen; ausserdem aber wird in dem zweiten Falle nicht blos lebendige Kraft, sondern auch Wärme erzeugt und die Arbeit der elastischen Kräfte findet ihr Aequivalent in der Summe der beiden Wirkungen.

Die Bewegung eines sich contrahirenden Muskels wird bestimmt durch Gleichung (26); im Falle einer tetanischen Contraction setzen wir $T = (E\omega / L)\tau$ und erhalten:

$$(27) \qquad m\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{H\omega}{L}\cdot\frac{d\lambda}{dt} + \frac{E\omega}{L}\lambda = \frac{E\omega}{L}\tau.$$

Die Gleichung der Energie für den Zeitpunkt der maximalen Contraction wird:

$$(28) \quad \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{H\omega}{L}\int_0^{T/2}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 dt = \int_0^{\tau}\frac{E\omega}{L}(\tau - \lambda)\,d\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{E\omega}{L}\tau^2.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Arbeit, welche von der elastischen und tonischen Kraft bis zu dem Eintritt der maximalen Contraction τ geleistet wird; das erste Glied links ist die in diesem Momente vorhandene lebendige Kraft, das zweite repräsentirt die während der Contraction infolge der inneren Reibung erzeugte Wärme. Setzt man

$$(29) \qquad \tfrac{1}{2}\frac{H\omega}{Lm} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{E\omega}{Lm} - \tfrac{1}{4}\frac{H^2\omega^2}{L^2m^2}} = \beta,$$

so sind die Integrale der Bewegungsgleichung:

$$\tau - \lambda = \frac{\tau}{\beta}e^{-\alpha t}\{\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t\}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}\tau e^{-\alpha t}\sin\beta t.$$

Die Zeit, welche bis zum Eintritt der maximalen Contraction verstreicht, ist $T/2 = \pi / 2\beta$.

Die Reibungswärme wird:

$$(30)\quad \begin{cases} W = \dfrac{H\omega}{L}\displaystyle\int_0^{T/2}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 dt = 2 m \alpha \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}\tau^2 \int_0^{T/2} e^{-2\alpha t}\sin^2\beta t\,dt \\ \quad = \dfrac{m}{2}\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}\tau^2 \dfrac{1-1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}e^{-\frac{\pi\alpha}{\beta}}}{1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}}. \end{cases}$$

Die lebendige Kraft

$$(30') \qquad T = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}.\tau^2 e^{-\frac{\pi\alpha}{\beta}}.$$

Für ihr Verhältniss ergibt sich:

$$(31) \qquad \frac{W}{T} = \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{\beta}}}{1+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}} - 1,$$

wo

$$\frac{\alpha}{\beta} = \tfrac{1}{2}\frac{H\omega}{\sqrt{E\omega L m - \frac{1}{4}H^2\omega^2}}.$$

Setzen wir in Uebereinstimmung mit den früheren Rechnungen $H\omega = 50$, $E\omega = 2000$ und $L = 12$, $m = 0{,}06$, so wird: $\alpha/\beta = 0{,}876$ und $W/T = 7{,}8$; hiernach werden bei einem Muskel von 12 cm Länge, welcher bei seiner Contraction eine Masse von etwa 60 g schleudert, $^8/_9$ der ganzen Arbeit in Wärme verwandelt. Es steht dieses Ergebniss der Rechnung in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Fick, bei welchen die lebendige Kraft der geschleuderten Massen bis auf den 7. Theil der gesammten Arbeit mit der Verkleinerung der geschleuderten Masse sank.[1])

Setzen wir die tetanische Verkürzung gleich $^1/_3$ der Länge L, so ergibt sich in unserem Beispiel für die ganze bei der Verkürzung geleistete Arbeit der Werth $\frac{1}{2}(E\omega/L)\tau^2 = 1330$ g cm.

Der in Wärme verwandelte Theil beträgt somit 1180 g cm oder 0,028 Grammcalorien; bei einer Masse des Muskels von 5 g würde sich hieraus eine Erwärmung um 0,007° ergeben.

6. Myothermische Erscheinungen.

Unter der Voraussetzung, dass alle Veränderungen des Muskels adiabatisch vor sich gehen, erhalten wir die Gleichungen:

1) Fick, l. c. p. 66.

$$
(32)\quad \begin{cases}
z_z = -\frac{1}{E} Z_z + \delta \Gamma + a \vartheta + m \Pi - l \Gamma^2 \\
\gamma = \varrho \Gamma - \delta Z_z + f \vartheta + 2 l \Gamma Z_z \\
\omega = \varkappa \Pi + \lambda \vartheta + m Z_z \\
\frac{A s c}{\Theta} . \vartheta = \lambda \Pi - f \Gamma + a Z_z .
\end{cases}
$$

Betrachten wir zuerst den Fall der elementaren Zuckung bei freier Contraction; die Werthe der Zustandsgrössen vor der Reizung setzen wir gleich Null; nach Ablauf der Zuckung sind Γ und Z_z jedenfalls wieder Null und es bleibt daher die Gleichung:

$$
(33)\qquad \frac{A s c}{\Theta} \vartheta = \lambda \Pi .
$$

Es ergibt sich hieraus, dass $\lambda \Pi$ mit dem chemischen Umsatz wächst, und es liegt daher nahe, *Π mit dem osmotischen Druck der im Muskelsafte gelösten Molecüle in Beziehung* zu setzen. Aus den experimentellen Daten ergibt sich ferner, dass die im Muskel bei der Contraction erzeugte Wärmemenge mit der Spannung des Muskels zunimmt und es muss daher λ eine Function der Spannung sein; bei der Betrachtung der myothermischen Erscheinungen reichen wir also nicht mit dem ersten Gliede der für die freie Energie F gegebenen Reihe. Unabhängig von jeder speciellen Entwickelung würde λ durch

$$
\frac{1}{A} \frac{\partial^2 F}{\partial \Pi \partial \Theta}
$$

gegeben sein. Um ein Urtheil über seine Veränderlichkeit zu gewinnen, benutzen wir eine Beobachtungsreihe von Fick[1]), deren Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die in der zweiten Reihe gegebenen Wärmemengen W sind um den Betrag der durch Reibung entwickelten Wärme zu verkleinern; dieser lässt sich aus der bis zum Momente der maximalen Contraction geleisteten Arbeit nach Gleichung (31) näherungsweise berechnen; die so corrigirten Wärmemengen in Grammcalorien sind in der dritten Reihe angegeben, sie entsprechen der durch den chemischen Umsatz erzeugten Wärm $\lambda \Pi$.

$K = -\omega Z_z$	3	23	43	83	123	163	203
$W \times 10^3$	14,0	18,1	19,6	22,9	23,7	26,0	25,6
$\lambda \Pi$	14,0	15,9	18,0	20,6	21,4	23,2	22,3

1) Fick, l. c p. 221.

Aus diesen Beobachtungen folgt:

$$(34) \qquad \lambda = \frac{13,2}{\Pi} + \frac{0,116}{\Pi} K - \frac{0,00035}{\Pi} K^2.$$

Bei der isometrischen Zuckung ist die Spannung K und demzufolge auch λ variabel. Wir müssen also in der Formel

$$\frac{A s c}{\Theta} . \vartheta = \lambda \Pi$$

einen Mittelwerth für λ einsetzen, und dieser ist, da er einer höheren Spannung entspricht, grösser, als der Werth von λ bei isotonischer Zuckung. *Die Temperaturerhöhung des Muskels ist bei isometrischer Zuckung grösser, als bei isotonischer.*

Beim *Tetanus* ergibt sich für die von dem Beginn der Reizung bis zu dem Momente der maximalen Contraction entwickelte Temperatursteigerung:

$$\frac{A s c}{\Theta} . \vartheta = \lambda \Pi - f \Gamma.$$

Bezeichnen wir durch ϑ' und Π' die Werthe dieser Variabeln für den Moment, in welchem die Wiederausdehnung beginnt, so ist:

$$\frac{A s c}{\Theta} (\vartheta' - \vartheta) = \lambda (\Pi' - \Pi).$$

Sind endlich ϑ'' und Π'' die Werthe der Variabeln nach dem Ende des Tetanus, so ist:

$$\frac{A s c}{\Theta} (\vartheta'' - \vartheta') = \lambda (\Pi'' - \Pi') + f \Gamma.$$

Um die Beobachtung von Fick über die Wärmeentwickelung beim Tetanus zu erklären, müssen wir die Abhängigkeit des Coefficienten λ von Γ berücksichtigen. Wenn die tonische Kraft von Null bis Γ steigt, oder von Γ wieder auf Null sinkt, so durchläuft λ eine Reihe verschiedener Werthe; das Mittel aus denselben sei λ_0. Setzen wir ausserdem $\Pi'' - \Pi' = \Pi$, so ergibt sich aus den obigen Formeln:

$$(34) \qquad \frac{A s c}{\Theta} \vartheta'' = 2 \lambda_0 \Pi + \lambda_1 (\Pi' - \Pi).$$

Die Temperaturerhöhung ϑ'' setzt sich zusammen aus zwei Theilen, von welchen der erste constant, der zweite der Dauer des Tetanus proportional ist.

So lange der Tetanus maximal bleibt, behalten Π und Π' dieselben Werthe unabhängig von der Zahl der Reize; die auf einen Reiz entfallende Temperaturerhöhung ist jener Zahl umgekehrt proportional. Hört der Tetanus bei grösseren Intervallen der Reize auf, maximal zu sein, so sinkt der Werth von Π und Π'; schliesslich convergirt die auf einen Reiz entfallende Temperaturerhöhung gegen den constanten Wert $2\lambda_0 \Pi$.

Da λ_0 und λ_1 abhängig sind von der Spannung des Muskels, so wächst die Temperaturerhöhung beim Tetanus mit der Belastung und ist grösser bei gehemmter Verkürzung als bei freier.

7. Ergänzung und Vereinfachung der Gleichungen.

Die Gleichungen (32), welche wir für die adiabatische Zustandsänderung aufgestellt haben, bedürfen einer gewissen Ergänzung. Sie enthalten noch sieben Zustandsgrössen Z_z, Π, Γ, z_z, ω, γ und ϑ und es können mit ihrer Hülfe vier von jenen Grössen durch die drei übrigen ausgedrückt werden; der Zustand des Muskels erscheint demnach als eine Function dreier unabhängiger Veränderlicher.

Das tonische Moment γ enthält ein der Temperatur proportionales Glied, würde also mit dieser gleichmässig wachsen; die Erfahrung zeigt, dass der tonische Zustand wieder verschwindet, obwohl eine dauernde Erhöhung der Temperatur sowohl bei der Zuckung, wie beim Tetanus eintritt. Das tonische Moment zeigt ein ähnliches Verhalten, wie die pyroelectrische Ladung unter der Wirkung der Zerstreuung oder ein Inductionsstrom unter der Wirkung der Selbstinduction. Wenn in einem bestimmten Augenblick das tonische Moment γ erreicht ist, so findet in einem folgenden Zeitelement dt ein Verlust statt, welcher mit $\gamma\,dt$ proportional ist.

Es liegt endlich noch eine Vereinfachung unseres Gleichungssystems nahe, durch welche *die Zahl der unabhängigen Veränderlichen auf zwei reducirt* wird. Wir nehmen an, dass eine von aussen wirkende tonische Kraft Γ nicht existire, dass also Γ nur Rückwirkung gegen ein vorhandenes Moment γ sei; wir setzen dementsprechend $\gamma = -n\Gamma$, wo n ein von den Dimensionen des Muskels abhängender Factor ist. Die Gleichung für das tonische Moment verwandelt sich in eine Differentialgleichung für die tonische Kraft:

$$(35)\qquad \frac{d\Gamma}{dt} + q\Gamma = -\frac{f}{\varrho'}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\delta}{\varrho'}\frac{dZ_s}{dt},$$

wo

$$\varrho' = \varrho + n + 2lZ_s.$$

Die Integration gibt:

$$(36)\qquad \Gamma = -e^{-qt}\int\left\{\frac{f}{\varrho'}\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\delta}{\varrho'}\frac{dZ_s}{dt}\right\}e^{qt}dt,$$

eine Formel, durch welche die tonische Kraft als Function der Temperatur und der Spannung gegeben wird. Fügen wir hierzu die Gleichungen

$$\Pi = \frac{Ase}{\lambda\Theta}\vartheta + \frac{f}{\lambda}\Gamma - \frac{a}{\lambda}Z_s$$

und

$$z_s = -\frac{1}{E}Z_s + a\vartheta + \delta\Gamma - l\Gamma^2 + m\Pi$$

$$\omega = \lambda\vartheta + mZ_s + \varkappa\Pi,$$

so sehen wir, dass in der That alle in Betracht kommenden Grössen durch die zwei Variabeln ϑ und Z_s ausgedrückt werden können. Der Muskel erscheint also jetzt als ein Gebilde, dessen Zustand nur noch von zwei Veränderlichen abhängig ist, der Temperatur und der Spannung. Die vorliegende Betrachtung zeigt aber auch, dass die früher für die elementare Zuckung entwickelte Theorie möglicherweise einer Correction bedarf; wir haben damals vorausgesetzt, dass die tonische Kraft bei der isotonischen und isometrischen Zuckung dieselbe sei. Diese Annahme wird im allgemeinen nicht mehr zutreffen, wenn die vorhergehende Reduction der Variabeln möglich ist; wenn sie dennoch zu annähernd richtigen Resultaten führt, so würde dieses auf den numerischen Verhältnissen der Constanten beruhen. In der Bestimmung dieser Verhältnisse, in der Vervollständigung der Theorie, sodass sie die Resultate der Beobachtung genauer wiedergibt als bisher, würde die wesentliche Aufgabe der weiteren Forschung bestehen.

---

4. *Moleculartheorie der piëzoelectrischen und pyroelectrischen Erscheinungen; von Eduard Riecke.*

(Im Auszuge mitgetheilt aus dem 38. Bande der Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. in Göttingen. 1892).

Als im Anfange des 18. Jahrhunderts die pyroelectrischen Eigenschaften des Turmalins bekannt wurden, verglich man die beobachtete Wirkung mit der Anziehung des Eisens durch den Magnet; da aber die angezogenen Theilchen gleichzeitig auch wieder abgestossen wurden, so erkannte man bald, dass es sich nicht um eine magnetische, sondern nur um eine electrische Wirkung handeln könne. Für die Erklärung der Erscheinung blieb aber jene Analogie von Bedeutung und sie wurde noch wesentlich erweitert durch die Beobachtung, dass die Bruchstücke eines Turmalins ihre Polarität ebenso behalten, wie die Bruchstücke eines Magnets. Es lag daher die Vorstellung nahe, dass die Wirkungen des Turmalins auf einer übereinstimmenden electrischen Polarisation seiner Molecüle beruhen, ebenso wie die Wirkungen eines Magnets auf der gleichen Richtung der permanenten Molecularmagnete. Ausgesprochen wurde dies zuerst von William Thomson in Nichols „Cyclopaedia of the physical sciences" im Jahre 1860. Die wahrscheinlichste Erklärung der Pyroelectricität von dipolaren Krystallen findet er in der Annahme, dass die Masse dieser Körper wesentlich dieselbe Art von Electropolarisation besitze, welche nach Faraday temporär in Isolatoren erzeugt werden kann, und dass jene natürliche dielectrische Polarisation eine Function der Temperatur sei. Infolge des electropolaren Zustandes seiner Masse übt der Körper auf das ihn rings umgebende Mittel eine inducirende Wirkung aus und es entsteht daher auf seiner Oberfläche eine electrische Schichte, welche in dem ganzen äusseren Raume die Wirkungen der inneren Polarisation aufhebt. Wenn die Temperatur sich ändert, so ändert sich gleichzeitig die moleculare Polarisation; die oberflächliche Electrisirung aber gebraucht eine gewisse Zeit, um

dem Wechsel zu folgen, umso mehr, je grösser der Widerstand ist, welcher sich der Bewegung der Electricität an der Oberfläche oder in dem Inneren der Substanz in den Weg stellt.

Eine ausführliche Theorie der pyroelectrischen Erscheinungen des Turmalins auf Grund der geschilderten Annahmen habe ich im Jahre 1886 entwickelt[1]), wobei auch der Einfluss der die Temperaturänderungen begleitenden Dilatationen berücksichtigt wurde. Wenn ein Turmalin auf eine constante Temperatur erhitzt wird und dann frei sich abkühlt, so ist das electrische Moment der Volumeinheit gegeben durch die Gleichung:

$$\eta = a\, e^{q t_0} \frac{e^{-q t} - e^{-a t}}{a - q} \,.\, H.$$

Hier bezeichnet H das maximale bei der Abkühlung erreichte Moment. t_0 die Zeit, welche von dem Beginne der Abkühlung bis zu seiner Erreichung vergeht; q ist die Leitungsfähigkeit des Turmalines an der Oberfläche, a die Constante des Newton'schen Abkühlungsgesetzes. Wenn die Isolation des Turmalines eine vollkommene, also $q = 0$ ist, so wird:

$$\eta = (1 - e^{-a t})\; H.$$

Beide Formeln wurden durch eine grosse Zahl von Beobachtungen bestätigt und die Grundlagen der Theorie dadurch als richtig erwiesen.

Im Jahre 1880 haben J. und P. Curie gefunden, dass beim Turmalin eine Entwickelung von Electricität auch durch elastische Deformationen hervorgerufen wird. Es war zu erwarten, dass diese Erscheinungen ebenfalls durch die Annahme einer permanenten molecularen Polarisation ihre Erklärung finden würden.

Die Erscheinungen der Pyroelectricität und Piëzoelectricität sind nun nicht beschränkt auf Krystalle mit einer einzigen polaren Symmetrieaxe; sie treten auch auf bei Krystallen mit drei oder vier solchen Axen, bei welchen die Existenz permanenter electrischer Momente durch die Symmetrieverhältnisse ausgeschlossen ist. Wenn in einem solchen Krystalle, etwa dem Quarze, durch eine Deformation electrische Momente

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. u. Chem. 1886. **28.** p. 43.

erzeugt werden, so liegt die Annahme nahe, dass die inducirenden Kräfte von electrischen Massen herrühren, welche nicht erst in Folge der Deformation neu entstehen, sondern vorher vorhanden waren.

Man kommt also auch hier zu der Vorstellung von einer permanenten electrischen Polarität der Molecüle. Im Gegensatze zu dem Falle des Turmalins aber kann diese ein electrisches Moment von Hause aus nicht besitzen, electrische Fernwirkungen an und für sich nicht ausüben. Nur die mit der Deformation des Krystalles verbundene Verschiebung und Drehung der Molecüle erzeugen Kräfte, welche in den Molecülen oder Volumelementen des Krystalles electrische Momente induciren und von diesen erst hängen die beobachteten piëzoelectrischen und pyroelectrischen Wirkungen unmittelbar ab.

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie die Gesetze der Piëzoelectricität und Pyroelectricität aus dieser Vorstellung entwickelt werden können. Die Aufgabe ist sehr vereinfacht durch die von Voigt entwickelte allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen.[1] Auch bei dieser Theorie ist zu beachten, dass Krystalle mit einer einzigen polaren Symmetrieaxe schon im natürlichen Zustand ein electrisches Moment besitzen. Es wird angenommen, dass seine Wirkungen ebenso wie beim Turmalin durch eine oberflächlich aufgelagerte electrische Schichte compensirt werden. Es handelt sich daher in allen Fällen nur um die Bestimmung der Momente, welche durch elastische oder thermische Dilatationen neu erzeugt werden. Nun wird die Annahme gemacht, dass die rechtwinkligen Componenten a, b, c des in der Volumeinheit inducirten Momentes gleich linearen Functionen der Deformationsgrössen seien. Der allgemeinste dementsprechende Ansatz wird vereinfacht durch die Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der Gruppe, welcher der Krystall angehört. Die hieraus fliessenden Formeln sind durch Beobachtungen, welche von Voigt und von mir an Quarz und Turmalin angestellt wurden, bestätigt worden. Unsere Auf-

---

1) Vgl. Voigt, Goettinger Abhandl. 1890. Riecke u. Voigt: Die piëzoelectrischen Constanten des Quarzes und Turmalines. Ann. d. Phys. u. Chem. **45.** p. 523. 1892.

gabe ist daher gelöst, wenn wir gezeigt haben, dass in der molecularen Theorie der Zusammenhang zwischen den piëzoelectrischen Momenten und den Verschiebungen in der Form linearer Gleichungen sich ergibt, welche für die verschiedenen Symmetriegruppen der Krystalle denselben Vereinfachungen unterliegen, wie bei Voigt.

Die Vorstellungen, welche wir unserer Theorie zu Grunde legen, sind nun folgende: Die Mittelpunkte der Krystallmolecüle bilden Raumgitter, welche den Symmetriecharakter der verschiedenen Krystallsysteme besitzen. In dem allgemeinsten Fall des monoklinen Systems liegen die Gitterpunkte in den Ecken congruenter Parallelepipede, welche als primitive Parallelepipede bezeichnet werden. Beim monoklinen System ist das primitive Parallelepipedon eine gerade rhomboidische Säule, beim rhombischen ein rechtwinkliges Parallelepipedon, beim quadratischen eine gerade quadratische Säule, beim regulären ein Würfel. Beim hexagonalen System liegen die Gitterpunkte in den Ecken congruenter, gerader Prismen, deren Grundflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Jedes Molecül ist umgeben von einem System electrischer Pole; seine Anordnung besitzt die Symmetrieverhältnisse der speciellen Gruppe, welcher der betreffende Krystall angehört. Das System ist mit dem Molecül so verbunden, dass seine Symmetrieebenen und Axen mit den entsprechenden Symmetrieelementen des Raumgitters zusammenfallen. Wie man sieht, ist die hierdurch gegebene Constitution eines Krystalles im wesentlichen identisch mit dem, was Schönflies als ein Molecülgitter bezeichnet.

Die Molecüle selbst betrachten wir als dielectrisch erregbar. Im allgemeinen werden schon im natürlichen Zustand des Krystalles electromotorische Kräfte von den die Molecüle umgebenden Polsystemen ausgeübt werden. Die ihnen entsprechenden Momente kommen aber nach dem oben gesagten nicht in Betracht, da sie durch electrische Oberflächenschichten compensirt werden. Wenn aber in Folge elastischer oder thermischer Wirkungen die Molecüle eines Krystalles verschoben und gedreht werden, so entstehen neue electromotorische Kräfte. Ihre Entwickelung für die verschiedenen Symmetriegruppen der Krystalle bildet die wesentliche Aufgabe der fol-

genden Untersuchung. Die ihnen entsprechenden dielectrischen Momente müssen sich als lineare Functionen der Verschiebungsgrössen ergeben.

§. 1. Die durch Translation der Molecüle erzeugten electrischen Kräfte.

Die Coordinaten des Mittelpunktes des Molecüles A, für welches die inducirte electromotorische Kraft bestimmt werden soll, seien im natürlichen Zustand des Krystalles x, y, z. Unter derselben Voraussetzung besitze der Mittelpunkt eines anderen Molecüls B die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Die Componenten der von B auf A ausgeübten electrischen Kraft sind gegeben durch

$$X_1 = \frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \quad Y_1 = \frac{\partial P_1}{\partial y_1}, \quad Z_1 = \frac{\partial P_1}{\partial z_1}$$

Das von dem electrischen Polsystem des Molecüls B ausgeübte Potential wird durch Kugelfunktionen dargestellt, welche später angegeben werden. Während der Mittelpunkt des Molecüls A an seiner Stelle bleibt, erleide der Mittelpunkt des Molecüls B eine kleine Verschiebung mit den Componenten

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, y_1 + a_{13}\, z_1 \\ v_1 = a_{12}\, x_1 + a_{22}\, y_1 + a_{23}\, z_1 \\ w_1 = a_{13}\, x_1 + a_{23}\, y_1 + a_{33}\, z_1 \end{cases}$$

Dadurch erhalten die Componenten X_1, Y_1, Z_1 Zuwüchse, welche gegeben sind durch:

$$(2) \qquad \delta X_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial X_1}{\partial y_1} \cdot v_1 + \frac{\partial X_1}{\partial w_1} \cdot w_1,$$

Nach unseren Vorstellungen ist um das Molecül A eine unbegrenzte Zahl von Molecülen B so vertheilt, dass ein Raumgitter mit den Symmetrieverhältnissen des betreffenden Krystallsystemes entsteht; die Verschiebungen der Mittelpunkte werden bei allen Molecülen B durch die Gleichungen (1) bestimmt. Jedes Molecül B giebt durch seine Verschiebung Veranlassung zu einer auf den Mittelpunkt von A wirkenden Kraft, deren Componenten durch die Gleichungen (2) bestimmt werden. Wenn wir alle gleichgerichteten Componenten addiren, so erhalten wir die Componenten Ξ, H, Z der ganzen electrischen Kraft, welche infolge der Deformation auf das Molecül A ausgeübt wird. Für diese ergeben sich daher die Werthe

$$(3)\quad \begin{cases} \Xi = a_{11} \sum \frac{\partial X_1}{\partial x_1} x_1 + a_{22} \sum \frac{\partial X_1}{\partial y_1} y_1 + a_{33} \sum \frac{\partial X_1}{\partial z_1} z_1 \\ \quad + a_{23} \left\{ \sum \frac{\partial X_1}{\partial y_1} z_1 + \sum \frac{\partial X_1}{\partial z_1} y_1 \right\} + a_{31} \left\{ \sum \frac{\partial X_1}{\partial z_1} x_1 + \sum \frac{\partial X_1}{\partial x_1} z_1 \right\} \\ \quad + a_{12} \left\{ \sum \frac{\partial X_1}{\partial x_1} y_1 + \sum \frac{\partial X_1}{\partial y_1} x_1 \right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

§ 2. Die durch Rotation der Molecüle erzeugten electromotorischen Kräfte.

Den Mittelpunkt des Molecüls B machen wir zum Anfangspunkt eines Hülfscoordinatensystemes, dessen Axen parallel sind mit den Axen des ursprünglichen. Die relativen Coordinaten von A gegen B setzen wir:

$$x - x_1 = \xi, \quad y - y_1 = \eta, \quad z - z_1 = \zeta.$$

Nun werde das Molecül B sammt dem mit ihm verbundenen Systeme electrischer Pole um die drei Coordinatenaxen um kleine Winkel gedreht, und zwar sei der Betrag der Drehung um die Axe ξ gleich l, um η gleich m und um ζ gleich n. Die Veränderung, welche hierdurch in der von B auf A ausgeübten electrischen Wirkung erzeugt wird, ergibt sich in folgender Weise. Mit dem Molecüle A verbinden wir ein Coordinatensystem ξ', η', ζ', welches zunächst mit dem System ξ, η, ζ sich deckt. Statt nun das Molecül B zu drehen, drehen wir das Molecül A sammt dem Coordinatensystem ξ', η', ζ' um die Axen ξ, η, ζ um die Winkel $-l$, $-m$ und $-n$; es komme dadurch in die neue Lage A'. Wir bestimmen die Kraft, welche von dem ungedrehten Molecüle B auf A' ausgeübt wird; ihre Componenten nach den Axen ξ', η', ζ' sind gleich den Componenten der Kraft, welche von dem gedrehten Molecüle B auf A ausgeübt wird, genommen nach den Axen ξ, η, ζ. Ziehen wir von diesen die Componenten der ursprünglich vorhandenen Wirkung ab, so erhalten wir die gesuchte Veränderung.

Werden alle Molecüle B bei der Deformation in übereinstimmender Weise gedreht, so wird hiernach auf A eine electromotorische Kraft ausgeübt, deren Componenten durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$
(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \Xi = l \sum \left(\frac{\partial X_1}{\partial y_1} z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1} y_1 \right) + m \sum \left(\frac{\partial X_1}{\partial z_1} x_1 - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} z_1 + Z_1 \right) \\ + n \sum \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} y_1 - \frac{\partial X_1}{\partial y_1} x_1 - Y_1 \right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.
$$

§ 3. Potentiale und Kräfte einzelner Polsysteme.

1. Das einaxige Polsystem.

Die Molecüle des Crystalls sind verbunden mit zwei entgegengesetzten electrischen Polen; ihre Verbindungslinie geht durch den Mittelpunkt der Molecüle hindurch und wird durch ihn halbirt. Die Menge des in einem Pol vereinigten positiven oder negativen electrischen Fluidums sei ε, die Projectionen des electrischen Momentes auf die Coordinatenaxen A, B, Γ; der Mittelpunkt eines Molecüls habe die Coordinaten x_1, y_1, z_1, der Punkt A, für welchen seine Wirkung zu bestimmen ist, die Coordinaten x, y, z. Das auf ihn ausgeübte Potential ist

$$
V = \frac{A(x - x_1) + B(y - y_1) + \Gamma(z - z_1)}{r_1^3}.
$$

Hieraus folgt für $x = y = z = 0$:

$$
(4) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= -\frac{A}{r_1^3} + \frac{3(A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1) x_1}{r_1^5} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} &= \frac{3(3 A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1)}{r_1^5} - \frac{15(A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1) x_1^2}{r_1^7} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = \frac{3(\Gamma y_1 + B z_1)}{r_1^5} - \frac{15(A x_1 + B y_1 + \Gamma z_1) y_1 z_1}{r_1^7}. \end{aligned} \right.
$$

Gleichungen, aus welchen durch Vertauschung der Buchstaben die sechs noch fehlenden abzuleiten sind.

2. Das trigonale Polsystem; erste und zweite Hauptlage.

Die Molecüle des Krystalls besitzen wieder eine ausgezeichnete Axe; in einer zu dieser Axe senkrechten Ebene liegen drei gleich positive Pole in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, das mit dem Molecül concentrisch ist. Drei gleiche negative Pole liegen in den Ecken eines zweiten Dreiecks, durch welches das Dreieck der positiven Pole zu einem regelmässigen Sechseck ergänzt wird. Um das Potential dieses Polsystems auf den Punkt A zu berechnen, machen wir den Mittelpunkt des regulären Sechseckes zum Anfangspunkt eines

Hülfscoordinatensystems ξ, η, ζ, dessen Axen den Richtungen x, y, z parallel sind. Wir legen die Axe ζ senkrecht zu der Ebene des regulären Sechseckes; die Axe ξ möge durch eine seiner Ecken hindurchgehen, so dass η zu einer seiner Seiten senkrecht steht. An Stelle der rechtwinkeligen Coordinaten ξ, η, ζ führen wir Polarcoordinaten ein, indem wir setzen:

$$\xi = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \eta = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \zeta = r \cos\vartheta.$$

Das von dem Polsystem auf den Punkt A ausgeübte Potential ist dann gegeben durch

$$V = 6\, a_3^3\, \varepsilon\, \alpha^3 \frac{\sin^3\vartheta \cos 3\varphi}{r^4}.$$

Hier ist a_3^3 ein in der Entwickelung der Kugelfunctionen auftretender Zahlenfactor, ε die electrische Ladung der Pole. α die Seite des regulären Sechseckes. Gehen wir über zu rechtwinkeligen Coordinaten und führen wir eine neue Constante E ein, so wird

$$V = E \frac{(x - x_1)^3 - 3(x - x_1)(y - y_1)^2}{r_1^7}.$$

Hieraus ergibt sich für $x = y = z = 0$:

$$\text{(5a)} \quad \begin{cases} X_1 = -3E \dfrac{x_1^2 - y_1^2}{r_1^7} + 7E \dfrac{x_1^4 - 3x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \\[2ex] Y_1 = 6E \dfrac{x_1 y_1}{r_1^7} + 7E \dfrac{x_1^3 y_1 - 3x_1 y_1^3}{r_1^9} \\[2ex] Z_1 = 7E \dfrac{(x_1^3 - 3x_1 y_1^2)\, z_1}{r_1^9} \end{cases}$$

$$\text{(5b)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = -6E \dfrac{x_1}{r_1^7} + 7E \dfrac{7x_1^3 - 9x_1 y_1^2}{r_1^9} - 63E \dfrac{x_1^5 - 3x_1^3 y_1^2}{r_1^{11}} \\[2ex] \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} = 6E \dfrac{x_1}{r_1^7} + 7E \dfrac{x_1^3 - 15x_1 y_1^2}{r_1^9} - 63E \dfrac{x_1^3 y_1^2 - 3x_1 y_1^4}{r_1^{11}} \\[2ex] \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_1} = 7E \dfrac{x_1^3 - 3x_1 y_1^2}{r_1^9} - 63E \dfrac{(x_1^3 - 3x_1 y_1^2)\, z_1^2}{r_1^{11}} \\[2ex] \dfrac{\partial Y_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1} = -42E \dfrac{x_1 y_1 z_1}{r_1^9} - 63E \dfrac{(x_1^3 y_1 - 3x_1 y_1^3)\, z_1}{r_1^{11}} \\[2ex] \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_1}{\partial z_1} = 21E \dfrac{(x_1^2 - y_1^2)\, z_1}{r_1^9} - 63E \dfrac{(x_1^4 - 3x_1^2 y_1^2)\, z_1}{r_1^{11}} \\[2ex] \dfrac{\partial X_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} = 6E \dfrac{y_1}{r_1^7} - 21E \dfrac{x_1^2 y_1 + y_1^3}{r_1^9} - 63E \dfrac{x_1^4 y_1 - 3x_1^2 y_1^3}{r_1^{11}} \end{cases}$$

Diese Formeln gelten für eine solche Lage des Polsystems, bei welcher der Radius Vector vom Mittelpunkte des Moleculs

nach dem ersten positiven Pole der x-Axe des Coordinatensystems parallel ist. Wir werden diese Lage als die *erste Hauptlage des trigonalen Polsystems* bezeichnen.

Die *zweite Hauptlage des trigonalen Polsystems* erhalten wir, wenn wir das von demselben gebildete Sechseck so legen, dass die y-Axe parallel dem Radius Vector des ersten positiven Poles ist. Wir erhalten die entsprechenden Formeln, wenn wir in den für die erste gefundenen die Buchstaben x und y vertauschen.

3. Das dihexagonale Polsystem.

Die Molecüle besitzen wieder eine ausgezeichnete Symmetrieaxe, welche wir zur Axe ζ eines von dem Mittelpunkt eines Molecüls ausstrahlenden Coordinatensystems machen. In gleichen Abständen zu beiden Seiten des Mittelpunktes legen wir zwei Ebenen senkrecht zu ζ. In der oberen ziehen wir einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe ζ liegt und construiren in demselben ein regelmässiges Sechseck, dessen mit 1, 3, 5, 7, 9 und 11 bezeichnete Ecken mit positiven electrischen Massen ε besetzt werden mögen; wir zeichnen sodann ein zweites reguläres Sechseck, dessen mit 2, 4, 6, 8, 10 und 12 bezeichnete Ecken das vorige Sechseck zu einem regulären Zwölfeck ergänzen und besetzen die Ecken mit negativen electrischen Massen $-\varepsilon$; wir projiciren die beiden Sechsecke auf die untere parallele Ebene und besetzten die Ecken der Projection mit electrischen Massen entgegengesetzt denen der ursprünglichen Sechsecke. Die Projectionspunkte der Ecken 1, 2, 3 ... 12 seien bez. 13, 14, 15 ... 24; dann erhalten die Ecken 13, 15 ... die Masse $-\varepsilon$, die Ecken 14, 16 ... die Masse $+\varepsilon$. Wir legen die Axe ξ so, dass die Ebene ζ (1, 13) mit der Ebene $\zeta\xi$ den Winkel $\pi/12$ einschliesst; die Linie 1, 12 steht dann auf der Axe ξ, 3, 4 auf der Axe η senkrecht.

Mit Bezug auf ein Polarcoordinatensystem

$$\xi = r \sin\vartheta \cos\varphi\,, \quad \eta = r\sin\vartheta\sin\varphi\,, \quad \zeta = \cos\vartheta$$

wird das Potential des Polsystems:

$$V = 24\, a_6^7 \cos\vartheta_1 \sin^6\vartheta_1\, \varepsilon\, \delta^7 \frac{\cos\vartheta \sin^6\vartheta \sin 6\varphi}{r_1^8}\,.$$

Hier ist δ der gemeinsame Radius Vector der Pole, ϑ_1 der Winkel, welchen die nach den Ecken des oberen Zwölfeckes

gehenden Radien Vectoren mit der Axe z bilden. In rechtwinkeligen Coordinaten ist mit Einführung einer neuen Constante H

$$\Gamma = H\frac{\{3(x-x_1)^5(y-y_1)-10(x-x_1)^3(y-y_1)^3+3(x-x_1)(y-y_1)^5\}(z-z_1)}{r_1^{15}}.$$

Hieraus ergibt sich mit $x = y = z = 0$.

$$(6a)\begin{cases} X_1 = -3H\frac{(5x_1^4y_1-10x_1^2y_1^3+y_1^5)z_1}{r_1^{15}} + 15H\frac{(3x_1^6y_1-10x_1^4y_1^3+3x_1^2y_1^5)z_1}{r_1^{17}} \\ Y_1 = -3H\frac{(x_1^5-10x_1^3y_1^2-5x_1y_1^4)z_1}{r_1^{15}} + 15H\frac{(3x_1^5y_1^2-10x_1^3y_1^4-3x_1y_1^6)z_1}{r_1^{17}} \\ Z_1 = -H\frac{3x_1^5y_1-10x_1^3y_1^3-3x_1y_1^5}{r_1^{15}} + 15H\frac{(3x_1^5y_1-10x_1^3y_1^3+3x_1y_1^5)z_1^2}{r_1^{17}} \end{cases}$$

$$(6b)\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = -60H\frac{(x_1^3y_1-x_1y_1^3)z_1}{r_1^{15}} - 15H\frac{(33x_1^5y_1-70x_1^3y_1^3-9x_1y_1^5)z_1}{r_1^{17}} \\ \qquad - 15.17\,H\frac{(3x_1^7y_1-10x_1^5y_1^3+3x_1^3y_1^5)z_1}{r_1^{19}} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} = 60H\frac{(x_1^3y_1-x_1y_1^3)z_1}{r_1^{15}} - 15H\frac{(9x_1^5y_1-70x_1^3y_1^3+33x_1y_1^5)z_1}{r_1^{17}} \\ \qquad - 15.17\,H\frac{(3x_1^5y_1^3-10x_1^3y_1^5-3x_1y_1^7)z_1}{r_1^{19}} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} = 45H\frac{(3x_1^5y_1-10x_1^3y_1^3-3x_1y_1^5)z_1}{r_1^{17}} \\ \qquad - 15.17\,H\frac{(3x_1^5y_1-10x_1^3y_1^3-3x_1y_1^5)z_1^3}{r_1^{19}} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} = \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = -3H\frac{x_1^5-10x_1^3y_1^2-5x_1y_1^4}{r_1^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \qquad + 15H\frac{3x_1^5y_1^2-10x_1^3y_1^4-3x_1y_1^6}{r_1^{17}}\left(1-17\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial z_1} = -3H\frac{5x_1^4y_1-10x_1^2y_1^3-y_1^5}{r_1^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \qquad - 15H\frac{3x_1^6y_1-10x_1^4y_1^3-3x_1^2y_1^5}{r_1^{17}}\left(1-17\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \frac{\partial X_1}{\partial y_1} = \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} = -15H\frac{(x_1^4-6x_1^2y_1^2-y_1^4)z_1}{r_1^{15}} \\ \qquad - 45H\frac{(x_1^6-5x_1^4y_1^2-5x_1^2y_1^4-y_1^6)z_1}{r_1^{17}} \\ \qquad - 15.17\,H\frac{(3x_1^6y_1^2-10x_1^4y_1^4-3x_1^2y_1^6)z_1}{r_1^{19}} \end{cases}$$

4. Das tetraëdrische Polsystem; erste und zweite Hauptlage.

Die Ecken eines Würfels verbinden wir so, dass zwei um 90^0 gegen einander gewendete Tetraëder entstehen. Die Ecken des einen besetzen wir mit positiven electrischen Polen von der Stärke ε, die Ecken des anderen mit negativen Polen von derselben Stärke. Den Mittelpunkt des Würfels machen wir zum Mittelpunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems ε, η, ζ. Die Axe ζ sei parallel der einen Würfelkante, mit Bezug auf die Axen ξ, η möge vorerst keine bestimmte Voraussetzung getroffen werden; die halbe Diagonale des Würfels setzen wir gleich δ, den Winkel, welchen die nach den oberen Würfelecken gehenden Radien Vectoren mit der z-Axe einschliessen, bezeichnen wir durch ϑ_1, das Azimuth, der den ersten positiven Pol der oberen Würfelfläche mit dem ersten negativen der unteren verbindenden Kante durch φ_1. Das von dem Polsystem auf einen Punkt mit den Polarcoordinaten r, ϑ, φ ausgeübte Potential ist:

$$V = \frac{1}{2} \varDelta \frac{\mathfrak{P}_2^3 (\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos 2 (\varphi - \varphi_1)}{r^4}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\varDelta / 2 = 2 . 4 . a_2^3 \mathfrak{P}_2^3 (\cos \vartheta_1) \sin^2 \vartheta_1 \delta^3 .$$

Wir bezeichnen nun als *erste Hauptlage* des Würfels diejenige, bei welcher die Axen ξ, η, ζ parallel zu den Würfelseiten sind; es ist dann $\varphi_1 = \pi / 4$ und:

$$V = \varDelta \frac{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi}{r^4} = \varDelta \frac{\xi \eta \zeta}{r^7} .$$

Als *zweite Hauptlage* bezeichnen wir diejenige, bei welcher die Axen ξ, η durch die Würfelkanten gehen; dann ist $\varphi_1 = 0$ und

$$V = \frac{1}{2} \varDelta \frac{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{r^4} = \frac{1}{2} \varDelta \frac{(\xi^2 - \eta^2) \zeta}{r^7}$$

Im *ersten* Falle ergeben sich für $x = y = z = 0$ die Formeln:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= - \varDelta \frac{y_1 z_1}{r_1^7} + 7 \varDelta \frac{x_1^2 y_1 z_1}{r_1^9} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} &= 21 \varDelta \frac{x_1 y_1 z_1}{r_1^9} - 7 . 9 \varDelta \frac{x_1^3 y_1 z_1}{r_1^{11}} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = 6 \varDelta \frac{x_1}{r_1^7} - 7 \varDelta \frac{x_1^3}{r_1^9} - 7 . 9 \varDelta \frac{x_1 y_1^2 z_1^2}{r_1^{11}} \end{aligned} \right.$$

aus welchen die sechs noch fehlenden durch Vertauschung der Buchstaben hervorgehen.

Für die *zweite Hauptlage des tetraëdrischen Polsystems* wird ebenso

$$(8a)\quad \begin{cases} X_1 = -\Delta \dfrac{x_1 z_1}{r_1^7} + \dfrac{7}{2}\Delta \dfrac{(x_1^3 - x_1 y_1^2) z_1}{r_1^9} \\ Y_1 = \Delta \dfrac{y_1 z_1}{r_1^7} + \dfrac{7}{2}\Delta \dfrac{(x_1^2 y_1 - y_1^3) z_1}{r_1^9} \\ Z_1 = -\Delta \dfrac{x_1^2 - y_1^2}{r_1^7} \left\{1 - 7 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right\} \end{cases}$$

$$(8b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} = -\Delta \dfrac{z_1}{r_1^7} + \dfrac{7}{2}\Delta \dfrac{(5 x_1^2 - y_1^2) z_1}{r_1^9} - \dfrac{7.9}{2}\Delta \dfrac{(x_1^4 - x_1^2 y_1^2) z_1}{r_1^{1}} \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1} = \Delta \dfrac{z_1}{r_1^7} + \dfrac{7}{2}\Delta \dfrac{(x_1^2 - 5 y_1^2) z_1}{r_1^9} - \dfrac{7.9}{2}\Delta \dfrac{(x_1^2 y_1^2 - y_1^4) z_1}{r_1^{11}} \\ \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_1} = 21\Delta \dfrac{x_1^2 - y_1^2}{r_1^9} \left(1 - 3 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) z_1 \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial z_1} = \dfrac{\partial Z_1}{\partial y_1} = \Delta \dfrac{y_1}{r_1^7}\left(1 - 7 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) + \dfrac{7}{2}\Delta \dfrac{x_1^2 y_1 - y_1^3}{r_1^9}\left(1 - 9 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X_1}{\partial z_1} = -\Delta \dfrac{x_1}{r_1^7}\left(1 - 7 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) + \dfrac{7}{2}\Delta \dfrac{x_1^3 - x_1 y_1^2}{r_1^9}\left(1 - 9 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_1} = -\dfrac{7.9}{2}\Delta \dfrac{(x_1^3 y_1 - x_1 y_1^3) z_1}{r_1^{11}}. \end{cases}$$

5. Das ditetragonale Polsystem.

Durch den Mittelpunkt des Moleciils ziehen wir eine Axe ζ parallel zu der z-Axe des Coordinatensystems. Auf derselben markiren wir zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei Punkte in gleichem Abstande von diesem und legen durch sie zwei Ebenen parallel zu der xy-Ebene. Wir zeichnen in den letzteren zwei regelmässige Achtecke, concentrisch zu der Axe ζ, sodass ihre Projectionen auf die xy-Ebene zusammenfallen. Die Ecken des oberen Achteckes besetzen wir abwechselnd mit positiven und negativen electrischen Polen von der Stärke ε, die entsprechenden Ecken des unteren Achteckes beladen wir in entgegengesetztem Sinne mit electrischen Polen. Der gemeinsame Radius Vector der Pole sei δ; der Winkel, welchen die nach den oberen Polen gehenden Radien mit der z-Axe einschliessen ϑ_1, das Azimuth der Ebene, welche durch die ζ-Axe, den ersten positiven Pol oben und den ersten negativen

Pol unten hindurchgeht, sei $\pi / 8$. Das Potential des Polsystemes wird:

$$V = \frac{1}{4}\,\Theta\,\frac{\cos\vartheta \sin^4\vartheta \sin 4\varphi}{r^6} = \Theta\,\frac{(\xi^3\eta - \xi\eta^3)\,\zeta}{r^{11}}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Theta = 2\,.\,4\,.\,8\,.\,a_4^5\,\varepsilon \cos\vartheta_1 \sin^4\vartheta_1$$

Für $x = y = z = 0$ ergibt sich hieraus:

$$(9\,\mathrm{a})\left\{\begin{aligned} X_1 &= -\Theta\,\frac{(3x_1^2y_1 - y_1^3)\,z_1}{r_1^{11}} + 11\,\Theta\,\frac{(x_1^4y_1 - x_1^2y_1^3)\,z_1}{r_1^{13}} \\ Y_1 &= -\Theta\,\frac{(x_1^3 - 3x_1y_1^2)\,z_1}{r_1^{11}} + 11\,\Theta\,\frac{(x_1^3y_1^2 - x_1y_1^4)\,z_1}{r_1^{13}} \\ Z_1 &= -\Theta\,\frac{x_1^3y_1 - x_1y_1^3}{r_1^{11}}\left(1 - 11\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{b})\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} &= -6\,\Theta\,\frac{x_1y_1z_1}{r_1^{11}} + 11\,\Theta\,\frac{(7x_1^3y_1 - 3x_1y_1^3)\,z_1}{r_1^{13}} - 11\,.\,13\,\Theta\,\frac{(x_1^5y_1 - x_1^3y_1^3)\,z_1}{r_1^{15}} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} &= 11\,\Theta\,\frac{x_1y_1z_1}{r_1^{11}} + 11\,\Theta\,\frac{(3x_1^3y_1 - 7x_1y_1^3)\,z_1}{r_1^{13}} - 11\,.\,13\,\Theta\,\frac{(x_1^3y_1^3 - x_1y_1^5)\,z_1}{r_1^{15}} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial z_1} &= 11\,\Theta\,\frac{x_1^3y_1 - x_1y_1^3}{r_1^{13}}\left(3 - 13\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)z_1 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} = \frac{\partial Z_1}{\partial y_1} &= -\Theta\,\frac{x_1^3 - 3x_1y_1^2}{r_1^{11}}\left(1 - 11\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) + 11\,\Theta\,\frac{x_1^3y_1^2 - x_1y_1^4}{r_1^{13}}\left(1 - 13\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \frac{\partial Z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_1}{\partial z_1} &= -\Theta\,\frac{3x_1^2y_1 - y_1^3}{r_1^{11}}\left(1 - 11\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) + 11\,\Theta\,\frac{x_1^4y_1 - x_1^2y_1^3}{r_1^{13}}\left(1 - 13\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) \\ \frac{\partial X_1}{\partial y_1} = \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} &= -3\,\Theta\,\frac{(x_1^2 - y_1^2)\,z_1}{r_1^{11}} + 11\,\Theta\,\frac{(x_1^4 - y_1^4)\,z_1}{r_1^{13}} - 11\,.\,13\,\Theta\,\frac{(x_1^4y_1^2 - x_1^2y_1^4)\,z_1}{r_1^{15}} \end{aligned}\right.$$

§ 4. Einfluss der Symmetrieverhältnisse auf die Werthe der Molecularsummen.

Die Kräfte, welche bei einer Verschiebung des Molecularsystemes auf den Mittelpunkt A eines beliebigen Molecüls ausgeübt werden, sind dargestellt durch Summen von folgender Form

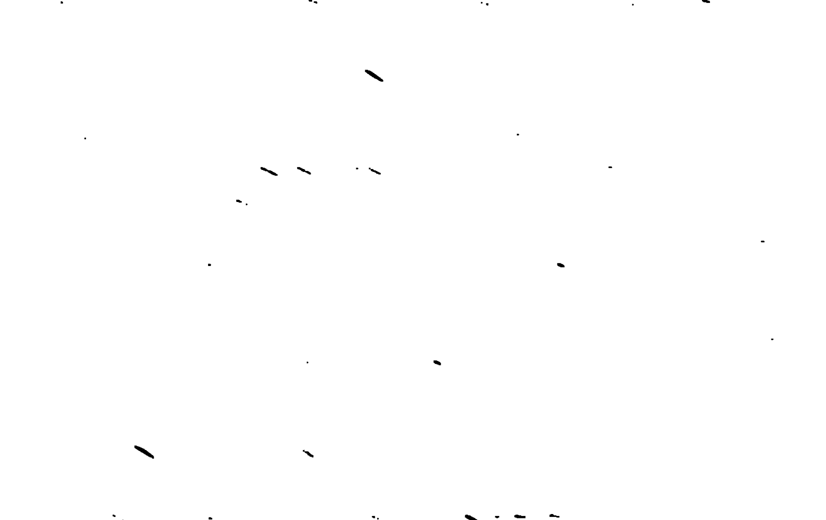
$$\sum \frac{x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma}{r^\varkappa}$$

welche sich über alle Molecüle des Systems mit Ausnahme der betrachteten erstrecken. Ist ein *Symmetriecentrum* vorhanden, so muss $\alpha + \beta + \gamma$ gerade sein. Ist die z-Axe eine *zweizählige Symmetrieaxe* des Molecularsystems, so entspricht jedem Punkte mit den Coordinaten x, y, z ein anderer mit den Co-

[illegible] Wenn also [illegible] ungerade ist, so [illegible] Form der Summe und diese ver- [illegible] Wenn [illegible] Ebene eine Symmetrieebene [illegible] Punkt [illegible] Reihensumme stets verschwinden. [illegible]

[illegible]

[illegible]



Punktsystem in sich selbst übergeführt, wenn wir eine Drehung von $\pi / 3$ um die z-Axe ausführen; drehen wir das Coordinatensystem um diesen Winkel und bezeichnen wir die neuen Positionen der x- und y-Axe durch x' und y', so muss die mit Bezug auf diese Axen gebildete Summe

$$\sum \frac{x'^{\alpha} y'^{\beta} z'^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}{r^{\varkappa}}$$

sein; ebenso

$$\sum \frac{x_1'^{\alpha} y_1'^{\beta} z_1'^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x_1^{\alpha} y_1^{\beta} z_1^{\gamma}}{r^{\varkappa}}$$

. . . .

Aus den zwischen den Coordinaten $x'y'$ und xy bestehenden Beziehungen ergibt sich dann die Gleichung:

$$\frac{z^{\gamma} \Sigma x_1^{\alpha} y_1^{\beta}}{r_1^{\varkappa}} = \frac{z^{\gamma} \Sigma \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_1\right)^{\alpha} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2} y_1\right)^{\beta}}{r_1^{\varkappa}}$$

. . . .

Für das ganze Molecularsystem ergeben sich aus diesen Beziehungen die folgenden Formeln:

(10) $$\sum \frac{x^2 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{y^2 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}}.$$

(11) $$\sum \frac{x^4 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{y^4 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = 3 \sum \frac{x^2 y^2 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}}.$$

(12) $$\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{(x^6 + x^4 y^2) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{(y^6 + x^2 y^4) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} \\ &\sum \frac{(x^6 - 5 x^4 y^2 - 5 x^2 y^4 + y^6) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = 0 \\ &\sum \frac{x^6 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{(2 x^4 y^2 + 3 x^2 y^4) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} \\ &\sum \frac{y^6 z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{(3 x^4 y^2 + 2 x^2 y^4) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}}. \end{aligned}\right.$$

(13) $$\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{(x^8 + 2 x^6 y^2) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{(y^8 + 2 x^2 y^6) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} \\ &\sum \frac{(3 x^6 y^2 - 10 x^4 y^4 + 3 x^2 y^6) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = 0 \\ &\sum \frac{(3 x^8 - 70 x^4 y^4 + 3 y^8) z^{\gamma}}{r^{\varkappa}} = 0. \end{aligned}\right.$$

2. Symmetrieeigenschaften des rhombischen, quadratischen und regulären Systems.

Bei dem rhombischen System liegen die Mittelpunkte der Molecüle in den Punkten eines von rechtwinkeligen Parallelepipeden gebildeten Raumgitters; die drei Coordinatenaxen sind zweizählige Symmetrieaxen, die drei Coordinatenebenen Symmetrieebenen. Es können nur Molecularsummen mit geraden Potenzen von x, y, z auftreten.

Im quadratischen System nehmen wir die z-Axe zur vierzähligen Symmetrieaxe und erhalten:

$$(14) \qquad \sum \frac{x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x^{2\beta} y^{2\alpha} z^{2\gamma}}{r^{\varkappa}} .$$

Im regulären System ist endlich:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum \frac{x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x^{2\beta} y^{2\gamma} z^{2\alpha}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x^{2\gamma} y^{2\alpha} z^{2\beta}}{r^{\varkappa}} \\ & = \sum \frac{x^{2\alpha} y^{2\gamma} z^{2\beta}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x^{2\beta} y^{2\alpha} z^{2\gamma}}{r^{\varkappa}} = \sum \frac{x^{2\gamma} y^{2\beta} z^{2\alpha}}{r^{\varkappa}} . \end{aligned} \right.$$

§ 5. Electrische Kräfte, welche bei der Deformation specieller Molecularsysteme entstehen.

In den allgemeinen Ausdrücken der Gleichungen (3) und (4) substituiren wir im Folgenden die Werthe, welche sich in § 3 für die von den verschiedenen Polsystemen ausgeübten Kraftcomponenten und ihre Differentialquotienten ergeben haben. Wir lassen dabei gleichzeitig die Vereinfachungen eintreten, welche durch die Symmetriebedingungen der Systeme bedingt sind.

1. Molecüle mit einaxigem Polsystem.

Wir lassen die z-Axe des Coordinatensystems mit der Richtung der electrischen Axe zusammenfallen; in den Gleichungen (4) ist dann $A = B = 0$. Substituiren wir die hierdurch vereinfachten Werthe der Kräfte und ihrer Differentialquotienten in den Gleichungen (3) und (3'), so ergibt sich:

$$(16)\left\{\begin{aligned}
\Xi &= 3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1 z_1}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{11} - 15\,\Gamma\Sigma\frac{x_1\,y_1^2\,z_1}{r_1^7}\,a_{22}\\
&+ 3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1 z_1}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{33} + 3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1\,y_1}{r_1^5}\left(1-10\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{23}\\
&+ 3\,\Gamma\Sigma\left(\frac{x_1^2+z_1^2}{r_1^5} - 10\,\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right)a_{31} + 3\,\Gamma\Sigma\frac{y_1 z_1}{r_1^5}\left(1-10\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{12}\\
Z &= 3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{11} + 3\,\Gamma\Sigma\frac{y_1^2}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{22}\\
&+ 3\,\Gamma\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(3-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{33} + 6\,\Gamma\Sigma\frac{y_1 z_1}{r_1^5}\left(2-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{23}\\
&+ 6\,\Gamma\Sigma\frac{z_1 x_1}{r_1^5}\left(2-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{31} + 6\,\Gamma\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{12}\\
\Xi' &= -\,3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}\,l - \Gamma\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1-\frac{3\,x_1^2}{r_1^2}\right)m\\
Z' &= \,3\,\Gamma\Sigma\frac{y_1 z_1}{r_1^5}\,l - 3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1 z_1}{r_1^5}\,m.
\end{aligned}\right.$$

Der Werth von H folgt aus dem für Ξ, wenn man vertauscht x mit y, a_{11} mit a_{22}, a_{13} mit a_{23}; der Werth von H' aus dem für Ξ', wenn man vertauscht x mit y und $-l$ mit m.

Bei dem *triklinen System* finden die vorhergehenden Formeln unverändert Anwendung, da die blose Existenz eines Symmetriecentrums keine Vereinfachung in den Werthen der nur gerade Functionen von x, y, z enthaltenden Molecularsummen bedingt.

Ist in dem *monoklinen System* die z-Axe eine zweizählige polare Symmetrieaxe, so verschwinden alle mit ungeraden Producten $x^\alpha y^\beta$ behafteten Summen, gleichzeitig sind durch die zur z-Axe senkrechte Symmetrieebene ungerade Potenzen von z ausgeschlossen. Wir erhalten

$$(17)\left\{\begin{aligned}
\Xi &= 3\Gamma\Sigma\frac{x_1\,y_1}{r_1^5}\left(1-10\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{23} + 3\Gamma\Sigma\left(\frac{x_1^2+z_1^2}{r_1^5} - 10\,\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right)a_{31}\\
Z &= 3\Gamma\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{11} + 3\,\Gamma\Sigma\frac{y_1^2}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{22}\\
&+ 3\Gamma\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(3-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{33} + 6\,\Gamma\Sigma\frac{x_1\,y_1}{r_1^5}\left(1-5\,\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{12}\\
\Xi' &= -\,3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1\,y_1}{r_1^5}\,l - \Gamma\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1-3\,\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)m\\
Z' &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Die Werthe von H und H' ergeben sich ebenso wie oben. Es entsprechen diese Formeln der *hemimorphen Gruppe* des

monoklinen Systems. Die *hemiëdrische Gruppe* ist dadurch charakterisirt, dass eine zu der z-Axe senkrechte Symmetrieebene (E_z) existirt. Wir legen dementsprechend die elektrischen Axen der Molecüle parallel der x-Axe des Coordinatensystems und setzen in den Gleichungen (4) $B = \Gamma = 0$. Substituiren wir die vereinfachten Werthe der Kräfte und ihrer Differentialquotienten in den Gleichungen 3 und 3', so ergiebt sich:

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
\Xi &= 3A\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(3 - 5\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{11} + 3A\Sigma\frac{y_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{22} \\
&\quad + 3A\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{33} + 6A\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}\left(2 - 5\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{12} \\
H &= 3A\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{11} + 3A\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{y_1^2}{r_1^2}\right)a_{22} \\
&\quad - 15A\Sigma\frac{x_1 y_1 z_1^2}{r_1^7}a_{33} + 3A\Sigma\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{r_1^5} - 10\frac{x_1^2 y_1^2}{r_1^7}\right)a_{12} \\
Z &= 3A\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}\left(1 - 10\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{23} + 3A\Sigma\left(\frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right)a_{31}. \\
\Xi' &= 3A\Sigma\frac{x_1 y_1}{r_1^5}n, \qquad H' = -A\cdot\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{y_1^2}{r_1^2}\right)n \\
&\qquad Z' = A\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)m.
\end{aligned}
\right.
$$

Im Falle des *rhombischen* Systems, in welchem die Coordinatenebenen Symmetrieebenen des Raumgitters sind, reduciren sich die Gleichungen (16) und (17) auf:

$$
(19)\left\{
\begin{aligned}
\Xi &= 3\Gamma\Sigma\left(\frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right)a_{31} \\
Z &= 3\Gamma\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)a_{11} + 3\Gamma\Sigma\frac{y_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{22} \\
&\quad + 3\Gamma\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)a_{33} \\
\Xi' &= -\Gamma\Sigma\frac{1}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)m \qquad Z' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Werthe von H und H' ergeben sich durch Vertauschung von x_1 mit y_1, a_{31} mit a_{23} und $-m$ mit l.

Für das *quadratische System* gelten dieselben Formeln, nur sind hier die Axen x und y einander gleichwerthig und daher die Coefficienten von a_{11} und a_{22}, a_{31} und a_{23}, $-m$ und l einander gleich.

Die Formeln (19) gelten auch für das *hexagonale System*, unter der Voraussetzung, dass die z-Axe eine sechszählige Symmetrieaxe ist. Aus den Symmetrieeigenschaften des Systems folgt wieder die Gleichheit der Coefficienten von a_{11} und a_{22}, a_{31} und a_{23}, $-m$ und l.

2. Molecüle mit tetraëdrischem Polsystem.

Wir betrachten zuerst ein dem *rhombischen System* angehörendes Molecülgitter; die Mittelpunkte der Molecüle bilden ein aus rechtwinkeligen Parallelepipeden bestehendes Raumgitter; die Kanten sind parallel den Axen des Coordinatensystems.

Benutzen wir das tetraëdrische Polsystem in seiner *ersten Hauptlage*, so erhalten wir aus der Verbindung der Gleichungen (7) und (3)

$$(20)\quad \begin{cases} \Xi = \Delta \sum \left(6 \dfrac{y_1^2 + z_1^2}{r_1^7} - 7 \dfrac{y_1^4 + z_1^4}{r_1^9} - 126 \dfrac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r_1^{11}}\right) a_{23} \\ \Xi = -\Delta \sum \left(6 \dfrac{y_1^2 - z_1^2}{r_1^7} - 7 \dfrac{y_1^4 - z_1^4}{r_1^9}\right) l \end{cases}$$

Die vier übrigen Gleichungen ergeben sich durch cyklische Vertauschung von x_1, y_1, z_1, a_{12}, a_{23}, a_{31}, l, m, n.

Im quadratischen System sind die Axen x und y einander gleichwerthig; die Coefficienten von a_{23} und a_{31}, von l und $-m$ werden einander gleich; Z verschwindet. Im regulären System sind die Coefficienten von a_{23}, a_{31} und a_{11} gleich; Ξ', H', Z' verschwinden.

Nehmen wir das tetraëdrische Polsystem in seiner *zweiten Hauptlage*, so geben die Gleichungen (8) in Verbindung mit 3.

$$1)\quad \begin{cases} \Xi = \Delta \sum \left\{ -\dfrac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^7} + \dfrac{7}{2} \dfrac{(7 x_1^2 - y_1^2) z_1^2}{r_1^9} + \dfrac{7}{2} \dfrac{x_1^4 - x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \left(1 - 18 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) \right\} a_{31} \\ Z = \Delta \sum \left\{ -\dfrac{x_1^2}{r_1^7} \left(1 - 7 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) + \dfrac{7}{2} \dfrac{x_1^4 - x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \left(1 - 9 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) \right\} a_{11} \\ \quad + \Delta \sum \left\{ \dfrac{y_1^2}{r_1^7} \left(1 - 7 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) - \dfrac{7}{2} \dfrac{y_1^4 - x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \left(1 - 9 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) \right\} a_{22} \\ \quad + 21 \Delta \sum \dfrac{x_1^2 - y_1^2}{r_1^2} \left(1 - 3 \dfrac{z_1^2}{r_1^2}\right) z_1^2 a_{33} \\ \Xi' = \Delta \sum \left\{ -\dfrac{2 x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}{r_1^2} - \dfrac{7}{2} \dfrac{(x_1^2 + y_1^2) z_1^2}{r_1^9} + \dfrac{7}{2} \dfrac{x_1^4 - x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \right\} m \\ Z = 0. \end{cases}$$

Die Werthe von H und H' ergeben sich durch Vertauschung von x_1 mit y_1, a_{21} und $-a_{23}$, l und m.

Im *quadratischen System* werden die Coefficienten von a_{31} und a_{23}, ebenso die von a_{11} und a_{22} einander entgegengesetzt gleich, die Coefficienten von m und l identisch.

4. Molecüle mit ditetragonalem Polsystem.

Da die z Axe für das ditetragonale Polsytem eine vierzählige Symmetrieaxe ist, so tritt dasselbe zuerst in dem quadratischen System auf. Die Gleichungen 3 geben in Verbindung mit 9

$$(22)\quad \begin{cases} \Xi = \Theta \Sigma \dfrac{x_1^4 - 3x_1^2 y_1^2}{r_1^{11}}\left(1 - 11\dfrac{x_1^2}{r_1^2}\right) a_{23} \\ Z = 0 \\ \Xi' = -\Theta \Sigma \dfrac{x_1^4 - 3x_1^2 y_1^2}{r_1^{11}}\left(1 - 11\dfrac{x_1^2}{r_1^2}\right) l. \end{cases}$$

H ergibt sich aus Ξ durch Vertauschung von a_{23} mit $-a_{31}$, H' und Z' aus Ξ' durch Vertauschung von l mit m und mit $-2n$.

4. Molecüle mit trigonalem Polsystem.

Aus der Anordnung des trigonalen Polsystems folgt, dass es in seinen beiden Hauptlagen nur in Krystallen des *hexagonalen Systems* auftreten kann und zwar in solchen Gruppen, welche eine mit der z Axe zusammenfallende dreizählige Symmetrieaxe besitzen.

I. Hauptlage des trigonalen Polsystems.

Die Gleichungen 5 geben in Verbindung mit 3 und mit Rücksicht auf die in den Gleichungen 10, 11, 12 ausgesprochenen Symmetrieeigenschaften des hexagonalen Systems:

$$(23)\quad \begin{cases} \Xi = E.\Sigma\left\{-6\dfrac{x_1^2}{r_1^7} + 28\dfrac{x_1^4}{r_1^9} - 63\dfrac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}\right\}(a_{11} - a_{22}) \\ H = 2E.\Sigma\left\{6\dfrac{x_1^2}{r_1^7} - 28\dfrac{x_1^4}{r_1^9} + 63\dfrac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}\right\} a_{12} \\ Z = Z' = \Xi' = H' = 0. \end{cases}$$

II. **Hauptlage des trigonalen Polsystems.**

Es ergibt sich ebenso:

$$(24)\quad \begin{cases} \Xi = 2 E \Sigma \left\{ 6 \frac{x_1^2}{r_1^7} - 28 \frac{x_1^4}{r_1^9} + 63 \frac{x_1^6 - 3 x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}} \right\} a_{12} \\ H = E \Sigma \left\{ 6 \frac{x_1^2}{r_1^7} - 28 \frac{x_1^4}{r_1^9} + 63 \frac{x_1^6 - 3 x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}} \right\} (a_{11} - a_{22}). \end{cases}$$

§. 5. **Molecüle mit dihexagonalem Polsystem.**

Die z Axe ist eine sechszählige Symmetrieaxe. Die Gleichungen 6 geben in Verbindung mit 3 und mit Rücksicht auf die in 11, 12 und 13 ausgesprochenen Symmetrieeigenschaften:

$$(25)\quad \begin{cases} \Xi = -24 H . \Sigma \frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r_1^{15}} \left(1 - 15 \frac{x_1^2}{r_1^2}\right) a_{23} \\ \Xi' = 24 H \Sigma \frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r_1^{15}} \left(1 - 15 \frac{x_1^2}{r_1^2}\right) l. \end{cases}$$

H ergibt sich durch Vertauschung von $-a_{23}$ mit a_{31}, H' und Z' durch Vertauschung von l mit m und $-2n$. Z ist gleich Null.

Beziehungen zwischen den Drehungen l, m, n und den Constanten a_{ik} der Deformation.[1])

Im triklinen System sind l, m, n lineare Functionen sämmtlicher Deformationsconstanten.

Im monoklinen System finden, vorausgesetzt, dass die Symmetrieebene zur z Axe senkrecht steht, die Beziehungen statt:

$$(26)\quad \begin{cases} l = \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} \\ m = \mu_1 a_{31} + \mu_2 a_{32} \\ n = \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{22} + \nu_3 a_{33} + \nu_4 a_{12}. \end{cases}$$

Im rhombischen System wird:

$$(27)\quad l = \lambda a_{23}, \quad m = \mu a_{31}, \quad n = \nu a_{12}.$$

Im quadratischen und hexagonalen:

$$(28)\quad l = \varkappa a_{23}, \quad m = -\varkappa a_{31}, \quad n = 0.$$

Im regulären System ist:

$$l = m = n = 0.$$

1) Voigt, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abh. d. K. G. d. Wiss. z. Goettingen. 1887. p. 35—39.

§. 6. Die piëzoelectrischen Momente.

Die Componenten der ganzen Kraft, welche durch Deformation eines Krystalls in der Mitte eines Molecüls erzeugt wird, sind gegeben durch $\Xi + \Xi'$, $H + H'$, $Z + Z'$; die Componenten des inducirten electrischen Momentes erhalten wir durch Multiplication mit einer von der Natur des Krystalles abhängenden Constanten. Da aber in den für die Componenten der Kraft gegebenen Ausdrücken Factoren von analogem Charakter schon enthalten sind, so können wir jene Constanten gleich Eins, die inducirten electrischen Momente unmittelbar gleich $\Xi + \Xi'$, $H + H'$, $Z + Z'$ setzen. In den einzelnen Krystallsystemen und ihren Symmetriegruppen ergeben sich dann für die Componenten a, b, c des piëzoelectrischen Momentes die folgenden Formeln.

I. Triclines System.

1. Hemiëdrische Gruppe.

Die Gleichungen 16 geben.

$$a = \varepsilon_{11} a_{11} + \varepsilon_{12} a_{22} + \varepsilon_{13} a_{33} + 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon_{15} a_{31} + 2\varepsilon_{16} a_{12}$$

$$b = \varepsilon_{21} a_{11} + \varepsilon_{22} a_{22} + \varepsilon_{23} a_{33} + 2\varepsilon_{24} a_{23} + 2\varepsilon_{25} a_{31} + 2\varepsilon_{26} a_{12}$$

$$c = \varepsilon_{31} a_{11} + \varepsilon_{32} a_{22} + \varepsilon_{33} a_{33} + 2\varepsilon_{34} a_{23} + 2\varepsilon_{35} a_{31} + 2\varepsilon_{36} a_{12}.$$

Die Coëfficienten ε drücken sich durch die Molecularsummen der Gleichungen 16 und die Coëfficienten der für l, m, n bestehenden linearen Relationen aus.

II. Monoclines System.

2. Hemimorphe Gruppe.

Die zu benützenden Gleichungen sind 17 und 26. Setzen wir:

$$2\varepsilon_{14} = \Gamma \Sigma 3 \frac{x_1 y_1}{r_1^5}\left(1 - 10\frac{z_1^2}{r_1^2}\right) - 3\lambda_2 \frac{x_1 y_1}{r_1^5} - \frac{\mu_2}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)$$

$$2\varepsilon_{15} = \Gamma \Sigma 3 \left(\frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right) - 3\lambda_1 \frac{x_1 y_1}{r_1^5} - \frac{\mu_1}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)$$

$$2\varepsilon_{24} = \Gamma \Sigma 3 \left(\frac{y_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{y_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right) + 3\mu_2 \frac{x_1 y_1}{r_1^5} + \frac{\lambda_2}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{y_1^2}{r_1^2}\right)$$

$$2\,\varepsilon_{25} = \Gamma \Sigma\, 3\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} \left(1 - 10\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) + 3\, \mu_1\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} + \frac{\lambda_1}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$\varepsilon_{31} = 3\, \Gamma \Sigma \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right), \; \varepsilon_{32} = 3\, \Gamma \Sigma \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$\varepsilon_{33} = 3\, \Gamma \Sigma \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} \left(3 - 5\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right), \; 2\, \varepsilon_{36} = 6\, \Gamma \Sigma \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

so wird:

$$a = 2\, \varepsilon_{14}\, a_{23} + 2\, \varepsilon_{15}\, a_{31}\,, \qquad b = 2\, \varepsilon_{24}\, a_{23} + 2\, \varepsilon_{25}\, a_{31}$$

$$c = \varepsilon_{31}\, a_{11} + \varepsilon_{32}\, a_{22} + \varepsilon_{33}\, a_{33} + 2\, \varepsilon_{36}\, a_{12}$$

3. Hemiëdrische Gruppe.

Wir setzen:

$$\varepsilon_{11} = 3\, A \Sigma \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} \left(3 - 5\, \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) + \nu_1\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}}$$

$$\varepsilon_{12} = 3\, A \Sigma \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) + \nu_2\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}}$$

$$\varepsilon_{13} = 3\, A \Sigma \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) + \nu_3\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}}$$

$$2\, \varepsilon_{16} = 3\, A \Sigma\, 2\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} \left(2 - 5\, \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) + \nu_4\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}}$$

$$\varepsilon_{21} = A \Sigma\, 3\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{x_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) - \frac{\nu_1}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = A \Sigma\, 3\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} \left(1 - 5\, \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) - \frac{\nu_2}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$\varepsilon_{23} = -\, A \Sigma\, 15\, \frac{x_1\, y_1\, z_1^{\,2}}{r_1^{\,7}} + \frac{\nu_3}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$2\, \varepsilon_{26} = A \Sigma\, 3 \left(\frac{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} - 10\, \frac{x_1^{\,2}\, y_1^{\,2}}{r_1^{\,7}}\right) - \frac{\nu_4}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{y_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$2\, \varepsilon_{34} = A \Sigma\, 3\, \frac{x_1\, y_1}{r_1^{\,5}} \left(1 - 10\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right) + \frac{\mu_2}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

$$2\, \varepsilon_{35} = A \Sigma\, 3 \left(\frac{x_1^{\,2} + z_1^{\,2}}{r_1^{\,5}} - 10\, \frac{x_1^{\,2}\, z_1^{\,2}}{r_1^{\,7}}\right) + \frac{\mu_1}{r_1^{\,3}} \left(1 - 3\, \frac{z_1^{\,2}}{r_1^{\,2}}\right)$$

und erhalten:

$$a = \varepsilon_{11}\, a_{11} + \varepsilon_{12}\, a_{22} + \varepsilon_{13}\, a_{33} + 2\, \varepsilon_{16}\, a_{12}$$

$$b = \varepsilon_{21}\, a_{11} + \varepsilon_{22}\, a_{22} + \varepsilon_{23}\, a_{33} + 2\, \varepsilon_{26}\, a_{22}$$

$$c = 2\, \varepsilon_{34}\, a_{23} + 2\, \varepsilon_{35}\, a_{31}$$

III. Rhombisches System.

4. Hemimorphe Gruppe.

Einaxiges Polsystem mit dem Momente Γ; Gleichungen (19) und (27). Wir setzen:

$$2\,\varepsilon_{15} = \Gamma\Sigma 3\left(\frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right) - \frac{\mu}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)$$

$$2\,\varepsilon_{24} = \Gamma\Sigma 3\left(\frac{y_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10\frac{y_1^2 z_1^2}{r_1^7}\right) + \frac{\lambda}{r_1^3}\left(1 - 3\frac{x_1^2}{r_1^2}\right)$$

$$2\,\varepsilon_{31} = 3\,\Gamma\Sigma\frac{x_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right),\quad 2\,\varepsilon_{32} = 3\,\Gamma\Sigma\frac{y_1^2}{r_1^5}\left(1 - 5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)$$

$$\varepsilon_{33} = 3\,\Gamma\Sigma\frac{z_1^2}{r_1^5}\left(3 - 5\frac{z_1^2}{r_1^2}\right)$$

und erhalten:

$$a = 2\,\varepsilon_{15}\,a_{51}\,,\ b = 2\,\varepsilon_{24}\,a_{23}\,,\ c = \varepsilon_{31}\,a_{11} + \varepsilon_{32}\,a_{22} + \varepsilon_{33}\,a_{33}$$

5. Hemiëdrische Gruppe.

Tetraëdrisches Polsystem in der ersten Hauptlage. Wir setzen:

$$2\,\varepsilon_{14} = \Delta\Sigma\left\{\begin{array}{l} 6\,\dfrac{y_1^2 + z_1^2}{r_1^7} - 7\,\dfrac{y_1^4 + z_1^4}{r_1^9} - 126\,\dfrac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r_1^{11}} \\ - 6\,\lambda\,\dfrac{y_1^2 - z_1^2}{r_1^7} + 7\,\lambda\,\dfrac{y_1^4 - z_1^4}{r_1^9} \end{array}\right\}$$

Die Werthe von $2\,\varepsilon_{25}$ und $2\,\varepsilon_{36}$ ergeben sich durch cyklische Vertauschung von x_1, y_1, z_1 und λ, μ, ν. Es ergiebt sich:

$$a = 2\,\varepsilon_{14}\,a_{23}\,,\ b = 2\,\varepsilon_{25}\,a_{31}\,,\ c = 2\,\varepsilon_{36}\,a_{12}.$$

Bei dem quadratischen und ebenso nachher bei dem hexagonalen System reichen wir nicht aus mit den einfachen Polsystemen, deren Wirkungen in § 5 untersucht worden sind; bei gewissen Gruppen vermögen wir den Symmetriebedingungen nur durch Combination der einfachen Systeme zu entsprechen. Es ist daher zweckmässig, für die letzteren Symbole einzuführen; wir wählen dazu die in den Potentialen auftretenden Constanten und verstehen daher unter

Γ das einaxige Polsystem mit der Axe parallel der z-Axe
Δ_{I} das tetraëdrische Polsystem in der ersten Hauptlage
Δ_{II} das tetraëdrische Polsystem in der zweiten Hauptlage
Θ das ditetragonale Polsystem.
E_{I} das trigonale Polsystem in der ersten Hauptlage
E_{II} das trigonale Polsystem in der zweiten Hauptlage
H dihexagonale Polsystem.

IV. Quadratisches System.

6. Hemimorph-hemiëdrische Gruppe. Polsystem Γ.

Gleichungen (19) und (28). Wir setzen:

$$2\,\varepsilon_{15} = \Gamma \Sigma 3 \left(\frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^5} - 10 \frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^7} \right) + \varkappa \left(1 - 3 \frac{x_1^2}{r_1^2} \right)$$

$$\varepsilon_{31} = 3\,\Gamma \Sigma \frac{x_1^2}{r_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{r_1^2} \right), \quad \varepsilon_{33} = 3\,\Gamma \Sigma \frac{z_1^2}{r_1^5} \left(1 - 5 \frac{z_1^2}{r_1^2} \right)$$

und erhalten:

$$a = 2\,\varepsilon_{15}\, a_{31}, \quad b = 2\,\varepsilon_{15}\, a_{23}, \quad c = \varepsilon_{31} (a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33}\, a_{33}.$$

7. Sphenoidisch-Hemiëdrische Gruppe Polsystem Δ_{I}.

Gleichungen (20) und (28). Wir haben:

$$2\varepsilon_{14} = \Delta \Sigma 6 \frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^7} - 7 \frac{x_1^4 + z_1^4}{r_1^9} - 126 \frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r_1^{11}} - \varkappa \left(6 \frac{x_1^2 - z_1^2}{r_1^7} - 7 \frac{x_1^4 - z_1^4}{r_1^9} \right)$$

$$2\varepsilon_{36} = 2\,\Delta \Sigma 6 \frac{x_1^2}{r_1^7} - 7 \frac{x_1^4}{r_1^9} - 63 \frac{z_1^2 y_1^2 z_1^2}{r_1^{11}}$$

und

$$a = 2\varepsilon_{14}\, a_{23}, \quad b = 2\,\varepsilon_{14}\, a_{31}, \quad c = 2\,\varepsilon_{36}\, a_{12}.$$

8. Trapezoëdrisch-hemiëdrische Gruppe. Polsystem Θ.

Gleichungen (22) und (28). Wir setzen:

$$2\varepsilon'_{14} = \Theta \,.\, \Sigma \frac{x_1^4 - 3 x_1^2 y_1^2}{r_1^{11}} \left(1 - 11 \frac{z_1^2}{r_1^2} \right) (1 - \varkappa)$$

und erhalten:

$$a = 2\,\varepsilon'_{14}\, a_{23}, \quad b = -\,2\,\varepsilon'_{14}\, a_{31}, \quad c = 0.$$

9. Hemimorph-tetartoëdrische Gruppe. Polsysteme Γ und Θ.

$$a = 2\,\varepsilon_{15}\, a_{31} + 2\,\varepsilon'_{14}\, a_{23}, \qquad b = 2\,\varepsilon_{15}\, a_{23} - 2\,\varepsilon'_{14}\, a_{31},$$
$$c = \varepsilon_{31} (a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33}\, a_{33}.$$

10. Sphenoidisch-tetartoëdrische Gruppe. Polsysteme Δ_{I} und Δ_{II}.

Gleichungen (20), (21) und (28). Wir setzen:

$$2\,\varepsilon'_{15} = \Delta \Sigma - \frac{x_1^2 + z_1^2}{r_1^7} + 21 \frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^9} + \varkappa \left(\frac{x_1^2 - z_1^2}{r_1^7} + 7 \frac{x_1^2 z_1^2}{r_1^9} \right)$$
$$+ \frac{7}{2} \frac{x_1^4 - x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \left(1 - \varkappa - 18 \frac{z_1^2}{r_1^2} \right)$$

$$\varepsilon'_{31} = \Delta \Sigma - \frac{x_1^2}{r_1^7} \left(1 - 7 \frac{z_1^2}{r_1^2} \right) + \frac{7}{2} \cdot \frac{x_1^4 - x_1^2 y_1^2}{r_1^9} \left(1 - 9 \frac{z_1^2}{r_1^2} \right)$$

und erhalten:

$$a = 2\varepsilon_{14} a_{23} + 2\varepsilon'_{15} a_{31}; \quad b = 2\varepsilon_{14} a_{31} - 2\varepsilon'_{15} a_{23},$$
$$c = \varepsilon'_{31}(a_{11} - a_{22}) + 2\varepsilon_{36} a_{12}.$$

Die Werthe von ε_{14} und ε_{36} sind dieselben wie in der Gruppe 7.

V. Hexagonales System.

11. Hemimorph-hemiëdrische Gruppe. Polsystem Γ.

Die Gleichungen sind dieselben wie in Gruppe 6.

$$a = 2\varepsilon_{15} a_{31}, \quad b = 2\varepsilon_{15} a_{23}, \quad c = \varepsilon_{31}(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33} a_{33}.$$

12. Sphenoidisch-hemiëdrische Gruppe. Polsystem E_{I}.

Gleichungen (23). Wir setzen:

$$\varepsilon_{11} = E\Sigma - 6\frac{x_1^2}{r_1^7} + 28\frac{x_1^4}{r_1^9} - 63\frac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}$$

und erhalten:

$$a = \varepsilon_{11}(a_{11} - a_{22}), \quad b = -2\varepsilon_{11} a_{12}, \quad c = 0.$$

13. Trapezoëdrisch-hemiëdrische Gruppe. Polsystem H.

Gleichungen (25) und (28).

$$\varepsilon_{14} = -12H\Sigma\frac{x_1^4 y_1^2 - x_1^2 y_1^4}{r_1^{15}}\left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2}\right)(1 - x)$$
$$a = 2\varepsilon_{14} a_{23}, \quad b = -2\varepsilon_{14} a_{31}, \quad c = 0.$$

14. Zweite hemimorph-tetartoëdrische Gruppe. Polsysteme Γ und E_{II}.

Gleichungen (24).

$$-\varepsilon_{22} = E\Sigma 6\frac{x_1^2}{r_1^7} - 28\frac{x_1^4}{r_1^9} + 63\frac{x_1^6 - 3x_1^4 y_1^2}{r_1^{11}}$$
$$a = 2\varepsilon_{15} a_{31} - 2\varepsilon_{22} a_{12}, \quad b = 2\varepsilon_{15} a_{23} - \varepsilon_{22}(a_{11} - a_{22}),$$
$$c = \varepsilon_{31}(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33} a_{33}.$$

Die Werthe von ε_{15}, ε_{31} und ε_{33} sind dieselben wie in Gruppe 6.

15. Sphenoidisch-tetartoëdrische Gruppe. Polsysteme E_{I} und E_{II}.

$$a = \varepsilon_{11}(a_{11} - a_{22}) - 2\varepsilon_{22} a_{12}, \quad b = 2\varepsilon_{11} a_{12} - \varepsilon_{22}(a_{11} - a_{22}).$$

Die Werthe von ε_{11} und ε_{22} sind dieselben wie bei den Gruppen 12 und 14.

16. Erste hemimorph-tetartoëdrische Gruppe. Polsysteme Γ und H.

Vereinigung der Formeln der 11. und 13. Gruppe:

$$a = 2\varepsilon_{15} a_{31} + 2\varepsilon_{14} a_{23}, \quad b = 2\varepsilon_{15} a_{23} - 2\varepsilon_{14} a_{31},$$
$$c = \varepsilon_{31}(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33} a_{33}.$$

17. Trapezoëdrisch-tetartoëdrische Gruppe. Polsysteme E_{I} und H.

Verbindung der Formeln der Gruppe 12 und 13:

$$a = \varepsilon_{11}(a_{11} - a_{22}) + 2\varepsilon_{14} a_{23}, \quad b = -2\varepsilon_{11} a_{12} - 2\varepsilon_{14} a_{31}.$$

18. Ogdoëdrische Gruppe. Polsysteme Γ, E_{I}, E_{II}, H.

Addition der Formeln der Gruppen 15 und 16:

$$a = 2\varepsilon_{15} a_{31} + \varepsilon_{11}(a_{11} - a_{22}) - 2\varepsilon_{22} a_{12} + 2\varepsilon_{14} a_{23},$$
$$b = 2\varepsilon_{15} a_{23} - 2\varepsilon_{11} a_{12} - \varepsilon_{22}(a_{11} - a_{22}) - 2\varepsilon_{14} a_{31},$$
$$c = \varepsilon_{31}(a_{11} + a_{22}) + \varepsilon_{33} a_{33}.$$

VI. Reguläres System.

19 und 20. Tetraëdrisch-hemiëdrische Gruppe und tetartoëdrische Gruppe. Polsystem Δ_{I}.

$$2\varepsilon_{14} = 2\Delta \sum 6 \frac{x_1^2}{r_1^7} - 7\frac{x_1^4}{r_1^9} - 63\frac{x_1^2 y_1^2 z_1^2}{r_1^{11}} = 2\varepsilon_{36},$$
$$a = 2\varepsilon_{14} a_{23}, \quad b = 2\varepsilon_{14} a_{31}, \quad c = 2\varepsilon_{14} a_{12}.$$

21. Plagiëdrisch-hemiëdrische Gruppe.

Wir entsprechen den Symmetrieverhältnissen, wenn wir das ditetragonale Polsystem in dreifacher Orientirung mit den Molecülen des Krystalls verbinden, so dass die vierzählige Symmetrieaxe der Reihe nach mit den Axen x, y, z zusammenfällt. Es ergiebt sich, dass die electrischen Wirkungen bei dieser Combination sich wechselseitig zerstören, so dass keine piëzoelectrischen Wirkungen auftreten können.

Setzt man in den im Vorhergehenden gegebenen Formeln

$$a_{11} = x_x, \quad a_{22} = y_y, \quad a_{33} = z_z, \quad 2a_{23} = y_z, \quad 2a_{31} = z_x, \quad 2a_{12} = x_y,$$

so werden sie mit den von Voigt entwickelten identisch.

Wir haben die ganze Mannigfaltigkeit der den verschiedenen Gruppen entsprechenden Formeln aus der Annahme von nur fünf verschiedenen Systemen electrischer Pole entwickelt. Diese Polsysteme sind aber nur die einfachsten,

welche man zu diesem Zwecke construiren kann. Es liegt zum Beispiel nahe, zu fragen, was sich ergiebt, wenn man das ditetragonale und dihexagonale Polsystem so benützt, dass die Ebenen $\xi\zeta$ und $\eta\zeta$ je zwei gegenüberliegende Polpaare enthalten. Die Formeln, zu denen man geführt wird, sind dieselben, welche sich schon bei der Benutzung eines einaxigen Polsystems ergeben. Auch von der Annahme, dass die zwischen zwei Polen wirkende Kraft dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional sei, sind die Resultate im Wesentlichen unabhängig.

Göttingen, Januar 1893.

5. *Zur Theorie der electrischen Schwingungen in Drähten; von A. Elsas.*

Die Ergebnisse der Hertz'schen Untersuchungen über sehr schnelle electrische Schwingungen haben sich im Rahmen der Maxwell'schen Theorie der Electricität in so vollkommener Weise darstellen lassen, dass es fast scheint, als ob kein anderes theoretisches System noch Aussicht auf Erfolg habe, nachdem die fundamentalen Anschauungen Maxwell's in demselben Maasse eine experimentelle Bestätigung gefunden haben, wie sie uns befähigen, die neuen Entdeckungen theoretisch zu begreifen.

Nichtsdestoweniger dürfte es sich empfehlen, die älteren Theorien nicht ganz beiseite zu schieben, ehe der Versuch gemacht ist, mit ihrer Hülfe das erweiterte Gebiet der experimentell erforschten electrischen Erscheinungen zu durchmessen, sei es auch nur, um bei consequenter Anwendung der älteren Vorstellungen einen Punkt zu finden, über den man nicht hinauskommt, ohne neue Hypothesen zu ersinnen oder durch die Annahme der Maxwell'schen Fundamentalhypothesen das System zum Abschluss zu bringen.

Ich habe deshalb versucht, die electrischen Wellen in geradlinig ausgespannten Drähten theoretisch darzustellen im Anschluss an die klassische Abhandlung von Kirchhoff „Ueber die Bewegung der Electricität in Drähten" [1]), von deren Voraussetzungen ich nur soweit abgewichen bin, als es die grundlegende Arbeit der Helmholtz'schen Theorie der Electrodynamik „Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper" [2]) nothwendig gemacht hat. Die umfangreichen und sorgfältigen Untersuchungen von E. Cohn und F. Heerwagen [3]) boten eine sehr willkommene Unterlage

1) G. Kirchhoff, Ges. Abhandlungen, p. 131.

2) H. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. **1.** p. 537.

3) E. Cohn u. F. Heerwagen, Ueber die Periode sehr schneller electrischer Schwingungen. Wied. Ann. **43.** p. 343. 1891.

für die Prüfung einiger Ergebnisse dieser Betrachtung, welche der Maxwell'schen Theorie in keinem Punkte widerspricht.

I. Theorie der Hertz'schen „primären" Schwingung.

Wir setzen voraus, dass die „primäre" Schwingung in einem geraden cylindrischen Drahte erregt werde, dessen Durchmesser gegen seine Länge als unendlich klein betrachtet werden darf, dass die Enden dieses Drahtes mit gleich grossen und gleichgestalteten ebenen Platten oder gleichen Kugeln von erheblicher Capacität verbunden sind, deren Mittelebenen mit der Drahtaxe in derselben Ebene des Raumes liegen, und dass der Draht in der Mitte seiner Länge durchschnitten wurde, um zwei kleine Kugeln aufzunehmen, die mit einem Inductorium verbunden sind, dessen Entladungen zwischen ihnen übergehen. Auch soll vorausgesetzt werden, dass in der Nähe dieses Drahtes keine anderen electrisch leitenden Körper vorhanden sind.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir eine vollkommen symmetrische Anordnung. Die Endplatten haben in jedem Augenblick Ladungen von derselben Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen, und die Stromstärke ist an beiden Enden des Drahtes die gleiche.

Die auf die Einheit der Electricitätsmenge bezogene electromotorische Kraft, die in einem Element ds des unendlich dünnen Drahtes nach derjenigen Richtung wirkt, in welcher die Entfernung s dieses Elementes von einem willkürlich gewählten Punkt des Drahtes wächst, ist

$$(1) \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}$$

wenn wir mit φ das Potential der auf dem Draht befindlichen freien Electricität, mit W das Potential der Strömung im Draht in Bezug auf das betrachtete Element bezeichnen und c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet.[1])

Das Potential φ der freien Electricität bestimmt sich nach dem Coulomb'schen electrostatischen Gesetz. Wir bezeichnen mit e die Menge der freien Electricität im Element ds, dividirt durch die Länge ds, und lassen e' die entsprechende Grösse

1) Wir bedienen uns des Gaussischen Maassystems.

für ein anderes Element ds' bedeuten. Dann liefern diejenigen Theile des Drahtes, deren Entfernung r von dem Element ds unendlich gross ist im Vergleich zu ds und zum Durchmesser des Drahtes, den Beitrag

$$(2) \qquad \varphi = \int \frac{e'\,ds'}{r}.$$

Um den Beitrag derjenigen Elemente, für welche die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, zu finden, müssen wir die Vertheilung der Electricität innerhalb eines Querschnittes des Drahtes kennen. Wir denken uns einen Punkt eines Querschnittes auf ein Polarcoordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Querschnittes ist. Die Coordinaten s, ϱ, ψ sollen denjenigen Punkt des Drahtes bezeichnen, in Beziehung auf den wir das Potential der freien Electricität suchen.

Wir machen die Annahme, dass sich, wie beim constanten Strom und beim electrischen Gleichgewicht, freie Electricität nur an der Oberfläche der Leiter befindet. Wenn wir noch α den Radius des Querschnittes nennen, so ist $e' / 2\pi\alpha$ die Dichte der freien Electricität an der Oberfläche des Elementes ds', und wenn wir unter x' die Entfernung $s' - s$, unter ψ' den Winkel zwischen dem nach einem Punkt der Drahtoberfläche gezogenen Radius und dem Radius, von welchem aus wir den Winkel ψ rechnen, verstehen und ε eine im Vergleich zum Radius α unendlich grosse Strecke bedeuten lassen, so liefert demnach der von der Integration in (2) ausgeschlossene Theil des Drahtes zum Potential φ den Beitrag:

$$(3) \qquad \varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e'\,dx'}{\sqrt{x'^2 + \alpha^2 + \varrho^2 - 2\alpha\varrho\cos(\psi' - \psi)}}.$$

Um die Integration nach x' ausführen zu können, nehmen wir an, dass die Function, welche e in seiner Abhängigkeit von der Zeit t und der Coordinate s darstellt, nach Art der Fourier'schen Reihen in eine unendliche Summe von Ausdrücken der Form $A\cos ns + B\sin ns$ entwickelt werden könne, wobei A und B als von s unabhängig gedacht werden. Es kann der Einfachheit halber die Betrachtung auf ein Glied der Reihe beschränkt werden.

Wir setzen also:

$$e_m = A \cos n s + B \sin n s$$

und entsprechend

(4) $$e'_m = A \cos n s' + B \sin n s' = A' \cos n x' + B' \sin n x'.$$

Ferner machen wir:

$$\xi^2 = \alpha^2 + \varrho^2 - 2 \alpha \varrho \cos (\psi' - \psi)$$

und bemerken, dass wir in dem Integral nach x' die Grenzen $-s$ und $+s$ mit den Enden des Drahtes zusammenfallen lassen können. Bei der Substitution $z = x' / \xi$ werden dann die Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ und man erhält:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A' \cos \xi n z + B' \sin \xi n z) d z}{\sqrt{z^2 + 1}} = 2 A' \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi n z \, d z}{\sqrt{z^2 + 1}}.$$

Aus der Gleichung (4) folgt aber

$$A' = A \cos n s + B \sin n s = e_m,$$

und was das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi n z \, d z}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\xi n z} d z}{\sqrt{z^2 - 1}} \text{ [1]}$$

anbetrifft, so dürfen wir auf Grund der Beobachtungen, die wir theoretich erklären wollen, die Annahme machen, dass $n \xi$ immer sehr klein ist, d. h. dass die Wellenlängen π / n der

---

1) Diese Gleichung lässt sich einfacher Weise aus der bekannten Laplace'schen Formel

$$\int_0^{\infty} d\eta \frac{z \cos a \eta}{z^2 + \eta^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a z} (a > 0)$$

ableiten, indem man auf beiden Seiten mit $d z / \sqrt{z^2 - 1}$ multiplicirt und und zwischen den Grenzen 1 und ∞ integrirt. In der Gleichung

$$\int_0^{\infty} d \eta \cos a \eta \int_1^{\infty} \frac{z \, d z}{(z^2 + \eta^2) \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} d z \frac{e^{-a z}}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

lässt sich das Integral nach z auf der linken Seite ausführen und ergibt

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1}}.$$

Schwingungen, in welche wir uns die electrische Bewegung im Draht zerlegt denken, immer sehr gross sind im Vergleich zur Dicke des Drahtes. Alsdann ist der Werth des Integrals

$$-\log\frac{n\xi}{2}+\Psi_0$$[1],

wo das Functionszeichen log den natürlichen Logarithmus bedeutet und Ψ_0 die gewöhnlich so bezeichnete Gaussische Constante (= − 0,5772157) ist.

Also wird

$$\varphi_m = -2e_m\left(\log\frac{n}{2}-\Psi_0\right)-\frac{e_m}{\pi}\int_0^{2\pi} d\psi'\log\sqrt{\alpha^2+\varrho^2-2\alpha\varrho\cos(\psi'-\psi)}.$$

Von dem noch auszuführenden Integral nach ψ' hat Kirchhoff[2]) bewiesen, dass es von ψ unabhängig und gleich $2\pi\log\alpha$ wird, so dass wir schliesslich erhalten:

$$\varphi_m = -2e_m\left(\log\frac{n\alpha}{2}-\Psi_0\right)$$

oder, wenn wir setzen:

(5) $$\gamma = -2\left(\log\frac{n\alpha}{2}-\Psi_0\right)$$

(6) $$\varphi_m = \gamma e_m.$$

Um die Function W und die electromotorische Kraft der Induction zu berechnen, wollen wir das Gesetz der Induction in der Form annehmen, die ihm von F. E. Neumann gegeben wurde. Wir machen also die Annahme, dass die von einem Element ds', in dem die Stromintensität i' sich ändert, in einem zweiten Element ds' des Leiters inducirte electromotorische Kraft, bezogen auf die Einheit der Electricitätsmenge

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial i'}{\partial t}\frac{\cos(ds, ds')ds}{r}$$

ist, wo r die Länge der Verbindungslinie zwischen beiden Elementen bedeutet. Ueberdies sehen wir als experimentell bewiesen an, dass bei den Erscheinungen, die wir erklären wollen, die Strömung wesentlich an der Oberfläche des Drahtes stattfindet und in allen Punkten der Peripherie eines Querschnittes dieselbe ist. Unter diesen Voraussetzungen ist $i'/2\pi\alpha$

1) G. Kirchhoff, Borchhardt's Journ. f. Math. 48. Heft 4.

2) G. Kirchhoff, Ges. Abhandlungen, p. 131.

die Stromdichtigkeit in ds', und wir erhalten für den Beitrag des endlichen Drahtstückes $2s$ in dessen Mitte ds liegt, zu der Function W einen Ausdruck, der ganz dem in (3) gegebenen für den Beitrag desselben Stückes zum electrostatischen Potential φ entspricht, also unter Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnungen:

$$(7)\qquad W = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-s}^{+s} \frac{i'\,dx'}{\sqrt{x'^2 + a^2 + \varrho^2 - 2\,a\,\varrho\cos(\psi' - \psi)}}.$$

Wir machen weiter die Voraussetzung, dass die Stromintensität i als Function von s in eine Reihe von Ausdrücken der Form

$$i_m = C_m \cos ns + D_m \sin ns$$

entwickelt werden kann, wo C und D von s unabhängig sind. Entsprechend ist

$$i'_m = C_m \cos ns' + D_m \sin ns'$$

und

$$i'_m = C'_m \cos nx' + D'_m \sin nx'.$$

Setzen wir letzteren Ausdruck für i' in (7) ein, so finden wir durch dieselben Schlussfolgerungen, welche uns von der Gleichung (3) zu (6) geführt haben, für W_n den Ausdruck:

$$(8)\qquad W_n = \gamma\, i_m$$

in welchem γ dieselbe Grösse ist, wie in (5). Nur hat γ hier eine andere physikalische Bedeutung, als in (5). Es erscheint hier als der Selbstinductionscoefficient der Längeneinheit des Drahtes, während in (5) der reciproke Werth von γ als die Capacität der Längeneinheit betrachtet werden kann.

Zufolge der Gleichungen (6) und (8) wird der Ausdruck (1) für die electromotorische Kraft:

$$-\gamma\left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right),$$

wobei e und i die Summen aller e_m, respective i_m bedeuten können, vorausgesetzt, dass wir die Veränderlichkeit von γ mit n ausser Betracht lassen und es als eine constante Grösse behandeln dürfen, was sich indessen nicht stets als zulässig erweisen wird.

Wir wollen ferner annehmen, dass, wie bei stationären

Strömen, die Stromstärke der electromotorischen Kraft proportional ist. Dann erhalten wir die Differentialgleichung:

$$(9) \qquad i w = -\gamma\left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right),$$

in welcher die Grösse w als der Widerstand der Längeneinheit des Drahtes aufgefasst werden kann, obwohl es nicht nothwendig ist, dass dieser Widerstand mit demjenigen für constante Ströme identisch ist.

Zu dieser Differentialgleichung (9) lässt sich eine zweite hinzufügen. Es bedeutet $i\,dt$ die Electricitätsmenge, welche in der Zeit dt durch den Querschnitt des Drahtes fliesst, dessen Entfernung vom Anfangspunkt der Messung s ist. Durch den Querschnitt bei $s + ds$ fliesst in derselben Zeit die Menge $(i + (\partial i / \partial s) ds)\, dt$. Wenn die Strömung in derjenigen Richtung erfolgt, in welcher s wächst, verliert das Element ds demnach die Electricitätsmenge $\partial i / \partial s . ds . dt$. Da aber die freie Electricität des Elementes $e\,ds$ ist, so haben wir:

$$(10) \qquad \frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Durch Differentiation von (9) nach s, von (10) nach t und Elimination der Differentialquotienten von i ergiebt sich für e die partielle Differentialgleichung:

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{w c^2}{\gamma}\frac{\partial e}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 e}{\partial s^2}.$$

Ebenso ergiebt sich durch Differentiation von (9) nach t und von (10) nach s und Elimination der Differentialquotienten von e die partielle Differentialgleichung für i:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{w c^2}{\gamma}\frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}.$$

Setzen wir noch:

$$(13) \qquad \frac{w c^2}{\gamma} = 2h,$$

so stellen die Gleichungen:

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} e_m &= E_m e^{-ht} \frac{\sin n \frac{s}{l}}{\sin \frac{n}{2}} \cos t\sqrt{n^2 c^2 - h^2} \\ i_m &= J_m e^{-ht} \frac{\cos n \frac{s}{l}}{\cos \frac{n}{2}} \sin\left(t\sqrt{n^2 c^2 - h^2} + \delta\right) \end{aligned}\right.$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichungen (11) und (12) dar, welche den Symmetriebedingungen genügt, dass für die Enden des Drahtes $s = \pm l/2$ jederzeit die Potentialfunction $\varphi_m = \gamma e_m$ entgegengesetzt gleiche Werthe besitzt und die Stromstärke i_m die gleiche ist. Die Längen s werden von der Mitte der Funkenstrecke aus gemessen, und es ist im Punkte $s = 0$ jederzeit $e_m = 0$ und i_m ein Maximum.

E_m und J_m sind die Amplituden von e_m und i_m an den Enden des Drahtes. Zur Bestimmung des Verhältnisses dieser beiden Grössen und des Bogens δ dient die Gleichung (10), derzufolge sein muss:

$$E_m \frac{\sqrt{n^2 c^2 - h^2}}{\sin n \frac{l}{2}} = -J_m \frac{n}{\cos n \frac{l}{2}} \cos \delta$$

$$E_m \frac{h}{\sin n \frac{l}{2}} = -J_m \frac{n}{\cos n \frac{l}{2}} \sin \delta,$$

woraus folgt:

$$(15) \qquad \begin{cases} E_m c = -J_m \operatorname{tg} n \frac{l}{2} \\ \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\sqrt{n^2 c^2 - h^2}}. \end{cases}$$

Um die zulässigen Werthe von n und damit die Wellenlängen der möglichen Schwingungen zu bestimmen, bedürfen wir noch einer Bedingungsgleichung für die Enden des Drahtes.

Die Stromstärke im Endpunkte $s = l/2$ ist diejenige Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit aus dem Draht auf die Endplatte überfliesst. Ebenso ist die Stromstärke im Endpunkte $s = -l/2$ diejenige Electricitätsmenge, welche der dort befindlichen Endplatte in der Zeiteinheit entzogen wird. Daher haben wir, wenn mit β die Capacität einer Endplatte bezeichnet wird und demnach $\beta \varphi_m$ die Ladung derselben ist:

$$\text{für } s = \frac{l}{2} \quad \ldots \quad i = \beta \frac{\partial \varphi_m}{\partial t},$$

$$\text{für } s = -\frac{l}{2} \quad \ldots \quad i = -\beta \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}.$$

Nun ist φ_m hier zufolge (6) durch den Werth bestimmt, welchen die Grösse γe_m nach Gl. (14) an den Enden des Drahtes annimmt. Berücksichtigen wir dies und machen von

der für jeden Punkt des Drahtes geltenden Gleichung (10) Anwendung, so erhalten wir die beiden Bedingungsgleichungen:

$$(16)\qquad \begin{cases} \text{für } s = \frac{l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad i_m = -\beta\gamma \frac{\partial i_m}{\partial s}, \\ \text{für } s = -\frac{l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad i_m = \beta\gamma \frac{\partial i_m}{\partial s}. \end{cases}$$

Der Ausdruck für i_m in (14) genügt beiden Bedingungen gleichzeitig, wenn:

$$1 = \beta\gamma n \operatorname{tg} n \frac{l}{2}$$

oder

$$(17)\qquad \frac{l}{2\beta\gamma} = \frac{n l}{2} \operatorname{tg} \frac{n l}{2}$$

ist. Setzen wir $n l / 2 = x_m$, so wird die Bestimmung der zulässigen Werthe von n auf die Auflösung der Gleichung:

$$(18)\qquad x_m \operatorname{tg} x_m = \frac{l}{2\beta\gamma} = a$$

zurückgeführt. Ist x_m die m te Wurzel dieser Gleichung, so ist der zugehörige Werth von n:

$$(19)\qquad n = \frac{2 x_m}{l}.$$

Wir setzen $n = \pi / \lambda_m$; dann ist λ_m die (halbe) Wellenlänge der Schwingung. Es ist also:

$$(20)\qquad \lambda_m = \frac{\pi}{2 x_m} l.$$

Für genügend kleine Werthe von a, also bei Drähten von geringer Länge, deren Enden mit erheblich grossen Capacitäten belastet sind, ist die kleinste Wurzel x_0 der Gleichung (18) näherungsweise $= \sqrt{a}$, da $\operatorname{tg} x_0 = x_0$ gesetzt werden darf. Dann aber ist nach (20):

$$(21)\qquad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{\beta\gamma l}{2}}.$$

Indessen ist der wahre Werth von $x_0 < \sqrt{a}$, also λ_0 grösser, als es sich nach der Näherungsformel berechnet. Ist beispielsweise $a = \frac{1}{4}$, so wird nach der Näherungsformel $x_0 = \frac{1}{2}$, während der wahre Werth nur sehr wenig von 0,48 abweicht. Die nach der Formel (21) berechnete Wellenlänge $\lambda_0 = \pi l$ ist demnach um 4 Proc. zu klein. Mit der Grösse von a wächst der

Fehler der angenäherten Berechnung schnell. Für $a = \pi / 4$ ist der wahre Werth von $x_0 = \pi / 4 = 0,7854$ (woraus $\lambda_0 = 2l$ folgt), während die Näherungsformel $x_0 = \sqrt{\pi / 4} = 0,886$ ergiebt, also gar nicht mehr zulässig ist.

Wir wollen von unseren Formeln eine Anwendung machen und die Wellenlänge für einen Schwingungserreger berechnen, den Hr. Hertz in seiner ersten Arbeit über „Sehr schnelle electrische Schwingungen"[1]) benutzt hat. Dessen Länge war $l = 150$ cm, seine halbe Dicke 0,25 cm, und er endigte in Kugeln von 15 cm Radius. Wir haben also $\beta = 15$ cm.[2]) Die Grösse γ ist von der unbekannten Wellenlänge $\lambda_0 = \pi / n$ abhängig nach Gleichung (5), die wir in der Form:

$$\gamma = 2\left(\log \frac{2\lambda}{\pi a} - 0,5772\right) = 2\left(\log \frac{2\lambda}{a} - 1,722\right)$$

schreiben können. Da aber $\lambda_0 > l$ sein muss, weil x_0 nach (20) immer $< \pi / 2$ ist, so zeigt diese Gleichung, dass $\gamma > 10,6$ sein wird. Die Annahme $\gamma = 10$ liefert aber schon für λ_0 den Werth $(\pi / 2) . l\sqrt{2} = 313$ cm nach der Näherungsformel. Demnach ist die wirkliche Wellenlänge noch grösser und es wird $\gamma > 12$. Wir können mit Hülfe dieses zweiten Werthes für γ eine neue Berechnung der Wellenlänge vornehmen, und so ein Annäherungsverfahren anwenden, welches schliesslich $\gamma = 12,7$ liefert.

Hiernach wird $\sqrt{l / 2\beta\gamma} = 0,6274$ und der Bogen, dessen Tangente diese Grösse hat $= 0,5603$. Nehmen wir das arithmetische Mittel dieser beiden Zahlen für die Grösse x_0 der Gleichung (20), so erhalten wir:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2 . 0,5938} . 150 = 397 \text{ cm.}$$

Es ist für die Berechnung der Wellenlängen gleichgültig, ob wir die electromotorische Kraft der Induction nach dem Neumann'schen, Maxwell'schen oder dem allgemeineren Helmholtz'schen Gesetz[3]) bestimmen. Denn der Coefficient

1) H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft, p. 32.

2) Die Anmerkung, die Hr. Hertz am Schlusse des Buches (l. c. p. 287) hierüber macht, ist mir nicht entgangen.

3) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 1. p. 537.

γ in den Bedingungsgleichungen (16), der in diese Berechnung eingeht, bedeutet nicht das Verhältniss der Function W zu i, sondern er ist hier gleich φ / e. Der Einfachheit der Darstellung wegen wurde das Neumann'sche Gesetz zu Grunde gelegt, für welches $W / i = \varphi / e$ wird. Das Inductionsgesetz von Helmholtz ergibt statt der Gleichung (8) eine andere:

$$W_m = \left(\gamma' + \frac{1-k}{2}\right) i_m = \gamma' i_m \tag{22}$$

und dementsprechend erhalten wir statt der Differentialgleichung (12) eine andere:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{w c^2}{\gamma'} \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}. \tag{23}$$

Machen wir in dieser:

$$c^2 \frac{\gamma}{\gamma'} = c'^2,$$

so zeigt sich, dass sie von der Gleichung (12) nur darin verschieden ist, dass statt der Lichtgeschwindigkeit c die Geschwindigkeit c' gesetzt wird. Diese geht in die Berechnung der Wellenlängen nicht ein und ist im Allgemeinen nur um ein Geringes kleiner als c, wenn der Werth der unbekannten Constanten k des Helmholtz'schen Gesetzes zwischen 0 und 1 liegt und γ nicht sehr klein ist.

Die höheren Wurzeln x_m der Gleichung (18) nähern sich mit wachsendem Index m dem Werth $m\pi$, und die Wellenlängen sind nach Gleichung (20) also nahezu:

$$\lambda_m = \frac{l}{2m},$$

so lange $a = l / 2\beta\gamma$ eine kleine Grösse bleibt. Indessen wird γ um so kleiner, je kleiner die Wellenlänge ist; a wächst demnach mit m gleichzeitig, und deshalb ist die Näherungsformel in den meisten Fällen unbrauchbar.

II. Erzwungene Schwingungen in einer offenen Strombahn.

Vor der einen ebenen Endplatte des Schwingungserregers sei eine andere Platte parallel aufgestellt und mit einem sehr langen Draht verbunden, der geradlinig und rechtwinkelig zum primären Draht ausgespannt ist und frei in der Luft endigt.

In dieser offenen Strombahn werden durch den Schwingungserreger electrische Oscillationen erzeugt, deren Periode

mit derjenigen des Erregers übereinstimmt.[1]) Die Schwingungen sind demnach „erzwungene“ in demselben Sinne, wie die Vibrationen eines elastischen Fadens, der an einer schweren Stimmgabel befestigt und geradlinig ausgespannt wird. Die Analogie ist überdies auch für die theoretische Betrachtung vollkommen, wenn man sich vorstellt, dass die Stimmgabel einer starken Dämpfung unterworfen ist, während der weiche Faden nur geringen Reibungswiderstand findet. Da aber in der Akustik das Problem der Melde'schen Fadenschwingungen unter der gegentheiligen Annahme einer ungedämpften primären Schwingung betrachtet wird, können wir nicht ohne Weiteres die Endgleichung abschreiben.[2])

Den Ausdruck für die Stromstärke i am Anfangspunkt $s = 0$ der offenen Strombahn können wir auf die Form bringen:

(1) $$i = C e^{-ht} \cos pt \; . \; . \; . \text{ für } s = 0.$$

Die Periode der primären Schwingung bestimmt hier die Grösse p, und ebenso ist die Dämpfung h diejenige der primären Schwingung. Im Endpunkte des Drahtes ist:

(2) $$i = 0 \; . \; . \; . \text{ für } s = l,$$

während in jedem Punkte des Drahtes die Differentialgleichung:

(3) $$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + 2h' \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}$$

erfüllt werden muss.

Der Ausdruck:

$$i = C e^{(ip - h)t} \frac{e^{\mu \frac{l - s}{c}} - e^{-\mu \frac{l - s}{c}}}{e^{\mu \frac{l}{c}} - e^{-\mu \frac{l}{c}}}$$

genügt im Punkte $s = 0$ der Bedingung $i = C e^{(ip - h)t}$, für $s = l$ der Bedingung (2) und der Differentialgleichung (3), wenn man:

$$\mu^2 = (ip - h)^2 + 2h'(ip - h)$$

macht, oder für sehr kleine Werthe von h':

$$\mu = ip - (h - h') = ip - \varkappa$$

1) H. Hertz, Wied. Ann. **34.** p. 551. 1888; Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft, p. 120.

2) Vgl. Lord Rayleigh, die Theorie des Schalles; deutsch von Neesen, p. 209; A. Elsas, Wied. Ann. **23.** p. 173. 1884.

setzt. Der reelle Theil des Ausdrucks:

$$i = C e^{(ip - h)t} \frac{e^{-(ip - \varkappa)\frac{l-s}{c}} - e^{(ip - \varkappa)\frac{l-s}{c}}}{e^{-(ip - \varkappa)\frac{l}{c}} - e^{(ip - \varkappa)\frac{l}{c}}}$$

ist demnach die gesuchte Lösung, welche den Bedingungen (1) und (2) Genüge leistet.

Um den reellen Theil auszuscheiden, beachten wir, dass Zähler und Nenner auf die Form $R e^{-i\delta}$ gebracht werden kann. Wir setzen allgemein:

$$e^{-(ip - \varkappa)x} - e^{(ip - \varkappa)x} = R_x e^{-i\delta_x}.$$

Alsdann wird:

$$R_x^2 = \sin^2 p x . (e^{\varkappa x} + e^{-\varkappa x}) + \cos^2 p x . (e^{\varkappa x} - e^{-\varkappa x})$$

oder $$R_x^2 = 4 \sin^2 p x + (e^{\varkappa x} - e^{-\varkappa x})^2,$$

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{e^{\varkappa x} + e^{-\varkappa x}}{e^{\varkappa x} - e^{-\varkappa x}} \operatorname{tg} p x.$$

Ist demnach:

$$\varkappa = h - h'$$

(4) $$\operatorname{tg} \delta_{l-s} = \frac{e^{\varkappa \frac{l-s}{c}} + e^{-\varkappa \frac{l-s}{c}}}{e^{\varkappa \frac{l-s}{c}} - e^{-\varkappa \frac{l-s}{c}}} \operatorname{tg} p \frac{l-s}{c}$$

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{e^{\varkappa \frac{l}{c}} + e^{-\varkappa \frac{l}{c}}}{e^{\varkappa \frac{l}{c}} - e^{-\varkappa \frac{l}{c}}} \operatorname{tg} p \frac{l}{c},$$

so erhalten wir die Lösung unseres Problems in der Gleichung:

5) $$i = C e^{-ht} \cos(pt + \delta_l - \delta_{l-s}) \sqrt{\frac{4 \sin^2 p \frac{l-s}{c} + \left(e^{\varkappa \frac{l-s}{c}} - e^{-\varkappa \frac{l-s}{c}}\right)^2}{4 \sin^2 p \frac{l}{c} + \left(e^{\varkappa \frac{l}{c}} - e^{-\varkappa \frac{l}{c}}\right)^2}}.$$

Diese zeigt, dass die Stromstärke in keinem Punkte des Drahtes Null wird, ausser im Endpunkte. Gleichwohl kann man diejenigen Punkte, in denen $\sin p(l - s)/c = 0$ und die Amplitude der Schwingung ein Minimum wird, als Knotenpunkte auffassen, und entsprechend ergibt sich die halbe Wellenlänge $\lambda = c\,T$, wenn man p durch die (halbe) Schwin-

gungsdauer T nach der Formel $p = \varkappa / T$ ausdrückt. Die Amplitude der Schwingung in den uneigentlichen Knotenpunkten wird um so grösser, je weiter diese vom freien Ende entfernt sind. Daher lassen sich die Knotenpunkte am leichtesten experimentell bestimmen, wenn man den Draht vom freien Ende aus absucht.

Indessen ist es für die experimentelle Untersuchung auch nothwendig, die Abhängigkeit der Amplitude von dem Verhältniss der Wellenlänge und der Gesammtlänge des Drahtes zu beachten.[1]) Denkt man sich die Länge l als unveränderlich, die Periode T der primären Schwingung als variabel, so wird der Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen der Gleichung (5) am kleinsten, demnach die Amplitude am grössten, wenn l einem Vielfachen von $c\,T$ gleich ist und $\sin p\,l / c$ verschwindet. Hingegen hat die Amplitude ihren kleinsten Werth, wenn l ein ungerades Vielfaches von $c\,T / 2$ ist und $\sin p\,l / c$ demnach gleich 1 wird. Im ersten Falle ist der Anfangspunkt des Drahtes ein uneigentlicher Knotenpunkt, und die Amplitude in den Schwingungsbäuchen kann die Seinige vielmal übertreffen, wenn die Dämpfung $\varkappa$ klein ist. Im letzteren Falle hat der Anfangspunkt eine grössere Amplitude, als jeder andere Punkt des Drahtes. Die Melde'schen Fadenschwingungen sind vortrefflich geeignet, alle diese Verhältnisse zur Anschauung zu bringen.

Stehende Wellen kommen merklich nicht zu Stande, wenn man den Draht, welcher in erzwungene Schwingungen versetzt werden soll, so lang macht, dass eine über denselben fortschreitende Welle durch die Dämpfung vernichtet wird, ehe sie das Ende erreicht.

Für die Theorie ist eine fortschreitende Schwingung charakterisirt durch die Differentialgleichung (3), die Bedingungsgleichung (1) und die Bedingung:

$$(6) \qquad i = 0 \; . \; . \; . \text{ für } s = \infty .$$

Als Lösung ergibt sich leicht (unter der Voraussetzung, dass h' bedeutend kleiner als h ist):

---

1) Vgl. H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft. Anmerkung 14. p. 289.

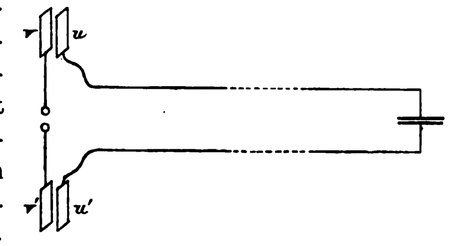
$$(7) \qquad i = C e^{-h\left(t - \frac{s}{c}\right) + h'\frac{s}{c}} \cos p\left(t - \frac{s}{c}\right)$$

oder, wenn man die Schwingungsdauer und die Wellenlänge einführt:

$$(8) \qquad i = C . e^{-h\left(t - \frac{s}{c}\right) + h'\frac{s}{c}} \cos \pi\left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda}\right).$$

III. Die Lecher'sche Versuchsanordnung und die Beobachtungen von Cohn und Heerwagen.[1]

Vor den beiden ebenen Endplatten des bisher als Schwingungserreger bezeichneten Leiters seien gleich grosse und gleich gestaltete ebene Platten parallel aufgestellt und mit zwei einander parallel ausgespannten Drähten in der Weise verbunden, die die Figur veranschaulicht. Die Enden dieser Drähte seien mit rechtwinkeliger Biegung zu einem Kohlrausch'schen Plattencondensator geführt. Die mit ihren Anfangspunkten verbundenen Platten sollen ferner in gleiche Entfernung von den gegenüberstehenden Platten gebracht werden, damit die ganze Anordnung eine symmetrische wird.



In diesem Falle werden, wie sich aus den Versuchsergebnissen von Cohn und Heerwagen mit Bestimmtheit schliessen lässt, nicht die Schwingungen des Erregers den parallelen Drähten aufgezwungen, sondern die durch das Inductorium veranlassten Schwingungen sind die Eigenschwingungen des ganzen, aus den drei Condensatoren und den verbindenden Drähten bestehenden geschlossenen Systems von Leitern.

Zur Vereinfachung der theoretischen Erörterungen können wir uns denken, dass die beiden Condensatoren $v\,u$ und $v'\,u'$ im Stromkreise gegeneinander verschoben werden, bis die Platten v und v' zusammenfallen. Alsdann dürfen die Platten v und v'

---

1) J. Lecher, Wien. Sitzungsber. **99.** p. 340. 1890; Wied. Ann. **41.** p. 850. 1890. — E. Cohn und F. Heerwagen, Wied. Ann. **43.** p. 343. 1891. — Vgl. auch Salvioni, Rendiconti della R. Acad. dei Lincei, vol. I. 1° Sem., fasc. 7. p. 206. 1892.

entfernt werden, und die Platten u und u' bilden dann einen Condensator, dessen Plattenentfernung doppelt so gross ist als vu resp. $v'u'$. Das vereinfachte System besteht dann aus zwei parallelen Drähten und zwei Plattencondensatoren an den Enden derselben.

Zufolge der symmetrischen Anordnung ist jederzeit in jedem Punkte des Drahtes die freie Electricität von derselben Dichte, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, die Strömung von derselben Intensität, aber entgegengesetzter Richtung, wie in dem gegenüberliegenden Punkte auf der anderen Drahthälfte.

Für die electromotorische Kraft, welche in einem beliebigen Punkte des Doppeldrahtes wirkt, erhalten wir einen Ausdruck von derselben Form, wie für den geraden einfachen Draht im Kapitel I (p. 492). Es erhält aber der Coefficient γ hier eine andere Bedeutung, da das Potential φ der freien Electricität [I, Gleichung (2)] und die Function W geändert wird durch die gegenseitige Beeinflussung der beiden parallelen Drahthälften.

Bezeichnen wir durch s und s' die Entfernung zweier Punkte, welche nicht auf derselben Drahthälfte liegen, von den Anfangspunkten $s = 0$ und $s' = 0$, durch l die Länge einer Drahthälfte und durch b den Abstand der parallelen Hälften von einander, so wird der Beitrag zu dem Potential φ, welcher von derjenigen Drahthälfte herrührt, auf der das Element ds nicht liegt:

$$\int_0^l \frac{e'\,d\,s'}{\sqrt{(s'-s)^2 + b^2}}\,.$$

Wir setzen wieder, wie im ersten Capitel:

$$s' - s = x',$$

nehmen an, dass e durch eine Fourier'sche Reihe nach s entwickelt werden kann und beschränken die Betrachtung auf ein Glied dieser Reihe, für welches wir haben:

$$e_m = A \cos n s + B \sin ns.$$

Demgemäss ist im Element ds' auf der anderen Drahthälfte:

$$e_m' = -(A \cos ns' + B \sin n s') = -(A' \cos n x' + B' \sin n x').$$

Das Integral wird durch diese Substitution:

$$-\int_{-s}^{l-s} \frac{(A' \cos n x' + B' \sin n x')}{\sqrt{x'^2 + b^2}} d x' ;$$

es ist nur dann in geschlossener Form darstellbar, wenn der Draht so lang ist, dass wir ihn durch zwei unendlich lange parallele Hälften ersetzt denken dürfen. Alsdann geht es über in:

$$-A' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n x' \, d x'}{\sqrt{x'^2 + b^2}} = -2 A' \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-b n x} d x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

oder, für hinreichend kleine Werthe von $b n$ in:

$$2 A' \left(\log \frac{n b}{2} - \Psi_0\right).$$

Es ist aber $A' = A \cos n s + B \sin n s = e_m$; also erhalten wir, wenn wir nach den Gleichungen (5) und (6) des ersten Capitels den Beitrag, der von der anderen Drahthälfte herrührt, hinzufügen, für das Potential die Gleichung:

(1) $$\varphi_m = 2 e_m \log \frac{b}{\alpha}.$$

In derselben Weise ergibt sich:

(2) $$W_m = 2 i_m \log \frac{b}{\alpha}$$

und, wenn wir hier

(3) $$\gamma = 2 \log \frac{b}{\alpha}$$

setzen, erhalten die Differentialgleichungen dieselbe Form, wie im ersten Capitel.

In jedem Punkte des Drahtes ist demnach eine Differentialgleichung:

(4) $$\frac{\partial^2 i_m}{\partial t^2} + 2 h \frac{\partial i_m}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i_m}{\partial s^2}$$

zu erfüllen, worin

$$2 h = \frac{w c^2}{\gamma}.$$

Dieser Differentialgleichung entspricht eine electrische Schwingung:

(5) $$\begin{cases} i_m = e^{-ht} \cdot \cos \sqrt{n^2 c^2 - h^2} \cdot t (A_1 \cos n s + B_1 \sin n s) \\ \quad + e^{-ht} \sin \sqrt{n^2 c^2 - h^2} \cdot t (A_2 \cos n s + B_2 \sin n s). \end{cases}$$

Das Verhältniss zwischen den Constanten A_1 und B_1, A_2 und B_2, und die Constante n, von welcher Schwingungszahl und Wellenlänge abhängen, werden durch die Bedingungen bestimmt, denen an den Enden einer Drahthälfte entsprochen werden muss.

Es sei Q die Electricitätsmenge auf derjenigen Condensatorplatte, mit welcher das Drahtende $s = 0$ verbunden ist, φ das Potential der Platte, β die Capacität des Condensators. Dann ist die Stromstärke am Ende $s = 0$ gleich der Electricitätsmenge, welche der Platte in der Zeiteinheit entzogen wird, also

$$\text{für } s = 0 \ldots i = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Ferner ist, da die gegenüberstehende Platte das Potential $-\varphi$ hat, Q durch die Potentialdifferenz 2φ und die Capacität β des Condensators bestimmt,

$$Q = 2\beta\varphi,$$

während

$$\varphi = \gamma e$$

ist, wenn e die Electricitätsmenge auf der Längeneinheit des Drahtes am Ende $s = 0$ bedeutet. Daher ist die Stromstärke in diesem Punkte:

$$i = -2\beta\gamma\frac{\partial e}{\partial t},$$

oder, da $-\partial e / \partial t = \partial i / \partial s$ ist,

$$(6) \qquad \text{für } s = 0 \ldots i = 2\beta\gamma\frac{\partial i}{\partial s}.$$

Im Punkte $s = l$ ist der Draht mit dem zweiten Condensator verbunden, dessen Capacität durch β_1 bezeichnet werden soll. Hier hat die Strömung die Richtung, in welcher s wächst, wenn die Ladung der Condensatorplatte vergrössert wird. Demnach ist hier $i = \partial Q_1 / \partial t$, und wir erhalten als Bedingungsgleichung:

$$(7) \qquad \text{für } s = l \ldots i = -2\beta_1\gamma\frac{\partial i}{\partial s}.$$

Der Gleichung (6) geschieht Genüge, wenn für beide Indices 1 und 2

$$A = 2\beta\gamma n B$$

gemacht wird. Wegen der Gleichung (7) muss ausserdem

$$A \cos n l + B \sin n l = 2 \beta' \gamma n (A \sin n l - B \cos n l)$$

sein. Eliminirt man hieraus A und B, so ergiebt sich eine Gleichung, welche die zulässigen Werthe von n bestimmt, nämlich

(8) $$2 \beta \gamma n \cos n l + \sin n l = 2 \beta' \gamma n (2 \beta \gamma n \sin n l - \cos n l).$$

oder

(9) $$\operatorname{cotg} n l = \frac{4 \beta \beta' \gamma^2 n^2 - 1}{(\beta + \beta') 2 \gamma n}.$$

Jeder Wurzel derselben entspricht eine gedämpfte einfach harmonische electrische Schwingung. Die Gleichung (5) für die Stromstärke lässt sich jetzt auf die Form bringen:

(10) $$\begin{cases} i_m = e^{-ht}(A_1 \cos \sqrt{n^2 c^2 - h^2}\, t + A_2 \sin \sqrt{n^2 c^2 - h^2}\, t) (\cos n s \\ \quad + \dfrac{1}{2 \beta \gamma n} \sin n s). \end{cases}$$

Wegen der Beziehungen $\partial i / \partial s = - \partial e / \partial t$ und $\varphi = \gamma e$ lässt sich dann das Potential φ_m im Punkte s darstellen durch eine Gleichung

(11) $$\begin{cases} \varphi_m = e^{-ht}(C_1 \cos \sqrt{n^2 c^2 - h^2}\, t + C_2 \sin \sqrt{n^2 c^2 - h^2}\, t)(\sin n s \\ \quad - \dfrac{1}{2 \beta \gamma n} \cos n s). \end{cases}$$

Demnach ist die Potentialdifferenz zwischen dem Punkte s und dem gegenüberliegenden Punkte auf der anderen Drahthälfte proportional mit $2 \beta \gamma n \sin n s - \cos n s$; sie wird Null nur zwischen gewissen Punkten, die als Knotenpunkte der Schwingung bezeichnet werden können, und deren Lage sich aus der Gleichung

(12) $$\begin{cases} 2 \beta \gamma n \sin n z - \cos n z = 0 \quad \text{oder} \\ \operatorname{cotg} n z = 2 \beta \gamma n \end{cases}$$

ergiebt, wenn wir in den Knotenpunkten $s = z$ setzen. Es ist zufolge der Anordnung des Leiterkreises nothwendig, dass auch die Gleichung

(13) $$\operatorname{cotg} n z' = 2 \beta' \gamma n$$

gilt, in welcher z' die Entfernung der Knotenpunkte vom anderen Condensator, dessen Capacität β' ist, bedeutet. Diese Gleichung ist theoretisch abzuleiten aus (8) und (12). Denn

wenn in die erste Gleichung (12) $z = l - z'$ gesetzt wird, erhält man zunächst

$$(2\beta\gamma n \sin nl - \cos nl)\cos nz' - (2\beta\gamma n \cos nl + \sin nl)\sin nz' = 0$$

und bei Berücksichtigung von (8):

$$\cos nz' - 2\beta'\gamma n \sin nz' = 0.$$

Wenn z und z' die Entfernungen *desselben* Knotenpunktes von den Drahtenden bedeuten, ist die Drahtlänge $l = z + z'$; versteht man dagegen unter z und z' die Entfernung des ersten Knotenpunktes vom Anfang des Drahtes und die Entfernung des letzten Knoten vom Ende, so ist $l = z + m\lambda_m + z'$. Setzt man diesen Werth für l in die Gleichung (9) ein, so werden die beiden Seiten derselben identisch gleich wegen der Gleichungen (12) und (13). Durch zwei der Gleichungen (9), (12) und (13) ist demnach die dritte bestimmt.

Wir wollen, wie es die Hrn. Cohn und Heerwagen gethan haben, die Lage der äussersten Knotenpunkte durch z und z' bezeichnen.

Alsdann ist zufolge der Gleichung (13), die wir auf den veränderlichen (Kohlrausch'schen) Condensator beziehen wollen, $z' = 0$, wenn die Capacität des Condensators durch Zusammenschieben der Platte unendlich gross gemacht wird. Am Drahtende entsteht dann also ein Knotenpunkt, und die Gleichung (9), welche die Abhängigkeit der Wellenlängen λ_m von der Drahtlänge l und den Constanten β und γ des Systems darstellt, ergiebt:

$$\operatorname{cotg} nl = 2\beta\gamma n$$

oder

$$\operatorname{cotg} \pi \frac{l}{\lambda_m} = \frac{2\beta\gamma\pi}{\lambda_m}. \tag{14}$$

Solange $2\beta\gamma\pi / \lambda_m$ eine kleine Zahl ist, folgt hieraus, dass $\pi l / \lambda_m$ wenig kleiner ist, als $\pi(2m + 1) / 2$, also λ_m wenig grösser, als $2l / (2m + 1)$, womit zusammenhängt, dass zwei Wellenlängen verschiedener Schwingungen λ_m und λ_p sich nährungsweise zu einander verhalten wie die ungeraden Zahlen $2p + 1$ und $2m + 1$.

Die Tabelle I der Hrn. Cohn und Heerwagen (l. c. p. 351) enthält die Wellenlänge λ_1 bis λ_6 für ein System, in welchem $\beta =$ ca. 7 cm, $2\gamma = 18{,}42$ und $l =$ ca. 1160 cm ist. Da hier

$2\beta\gamma\pi =$ etwa 405 cm ist und die Wellenlängen zwischen 845 und 189 cm variiren, erhält die rechte Seite der Gleichung (14) Werthe, die von etwa $^1/_2$ bis zu etwas mehr als 2 wachsen, und man kann demnach nicht mehr von der Näherungsformel $\lambda_m = 2\,l\,/\,(2\,m + 1)$ Gebrauch machen. Die exacte Prüfung der Formel (14) wird erschwert durch den Umstand, dass die Capactiät β nicht genau bestimmbar ist. Nach einer privaten Mittheilung hält Hr. Cohn ca. 7 cm für den wahrscheinlichsten Werth; es scheint jedoch, dass β etwas kleiner genommen werden muss, etwa gleich 6 cm, damit die Berechnung der Länge l aus der Gleichung (14) für alle Wellenlängen Werthe liefert, die sich möglichst wenig von einem Mittelwerthe entfernen. Da an den Enden die beiden Drahthälften weder parallel noch äquidistant verlaufen, darf man ferner nicht erwarten, dass der berechnete Mittelwerth für l' mit der gemessenen Drahtlänge genau übereinstimmt. Bei den Versuchen von Cohn und Heerwagen betrug die gemessene Drahtlänge von der Funkenstrecke bis zum Kohlrausch'schen Condensator ungefähr 1158 cm. Die nachfolgende Tabelle I zeigt, dass auch der berechnete Werth von l nahezu diese Grösse hat, wenn man $\beta = 6$ cm setzt, während für $\beta = 7$ cm l etwa 10 cm kleiner wird.

Tabelle 1.

$2\beta\gamma\pi = 347$ cm		$2\beta\gamma\pi = 405$ cm	
$\lambda_1 = 845$ cm	$l = 1161{,}9$ cm	$\lambda_1 = 845$ cm	$l = 1147{,}3$ cm
$\lambda_2 = 500$ „	$l = 1153{,}5$ „	$\lambda_2 = 500$ „	$l = 1141{,}6$ „
$\lambda_3 = 354$ „	$l = 1151{,}6$ „	$\lambda_3 = 354$ „	$l = 1142{,}9$ „
$\lambda_4 = 274{,}5$ „	$l = 1156{,}5$ „	$\lambda_4 = 274{,}5$ „	$l = 1150{,}0$ „
$\lambda_5 = 223{,}1$ „	$l = 1156{,}1$ „	$\lambda_5 = 223{,}1$ „	$l = 1151{,}2$ „
$\lambda_6 = 189{,}1$ „	$l = 1165{,}0$ „	$\lambda_6 = 189{,}1$ „	$l = 1160{,}6$ „
	Mittel $l = 1157{,}4$ cm		Mittel $l = 1148{,}7$ cm

Wenn die Capacität des veränderlichen Condensators einen endlichen Werth hat, wird die Gleichung (9) am bequemsten geprüft, indem man mit Hülfe der Gleichungen (12) und (13) die Entfernungen z und z' des ersten Knotens vom Anfang und des letzten Knotens vom Ende des Drahtes berechnet und $l = z + m\,\lambda_m + z'$ macht.

Die Tabelle 2 enthält die auf diese Weise aus dem Beobachtungsmaterial der Tabelle II von Cohn und Heerwagen berechneten Werthe von l.

Tabelle 2.

$2\beta'\gamma\pi = 2835$ cm			
$2\beta\gamma\pi = 347$ cm		$2\beta\gamma\pi = 405$ cm	
$\lambda_1 = 796$ cm	$l = 1159,1$ cm	$\lambda_1 = 796$ cm	$l = 1143,7$ cm
$\lambda_2 = 488,5$ „	$l = 1151,7$ „	$\lambda_2 = 488,5$ „	$l = 1139,9$ „
$\lambda_3 = 350$ „	$l = 1151,6$ „	$\lambda_3 = 350$ „	$l = 1143,0$ „
$\lambda_4 = 271$ „	$l = 1149,4$ „	$\lambda_4 = 271$ „	$l = 1143,1$ „
$\lambda_5 = 222,1$ „	$l = 1156,3$ „	$\lambda_5 = 222,1$ „	$l = 1151,5$ „
$\lambda_6 = 188,5$ „	$l = 1164,8$ „	$\lambda_6 = 188,5$ „	$l = 1160,3$ „
	Mittel $l = 1156,5$ cm		Mittel $l = 1146,9$ cm

Auch an den anderen Tabellen der Arbeit von Cohn und Heerwagen findet die Gleichung (9) hinreichende Bewährung, was sich schon daraus ergibt, dass an dem ganzen grossen Beobachtungsmaterial die Gleichungen (12) und (13) verificirt werden konnten.

Wir dürfen daher unsere Untersuchung mit der Bemerkung schliessen, dass die elektrischen Schwingungen in Drähten sich vollständig und auf einfache Weise theoretisch darstellen lassen, ohne dass wir irgendwo mit beobachteten Thatsachen in Widerspruch gerathen oder gezwungen werden, die ältere Theorie durch die Maxwell'sche Hypothese zu erweitern. Damit soll natürlich nicht die Nothwendigkeit der Maxwell'schen Theorie allgemein bestritten oder bezweifelt werden. Wohl aber erscheint im Interesse des theoretischen Unterrichts der Nachweis nicht unerheblich, dass ein grosser Theil des von Hertz zugänglich gemachten Gebiets der schnellen electrischen Schwingungen unmittelbar von der älteren Theorie angegliedert werden kann.

Marburg, im April 1893.

6. *Zur Theorie des Lichtes und insbesondere der doppelten Brechung; von E. Ketteler.*

Die letzten Jahre haben auf dem Gebiete sowohl der mechanischen als der electrischen Lichttheorie eine grosse Reihe von Arbeiten gebracht, und es hat nach ihnen den Anschein, als ob die letztere selbst bei denjenigen Vertretern der mechanischen Auffassung, die früher ihren Standpunkt bezüglich der Erscheinungen der Dispersion wie Polarisation mit einer gewissen engherzigen Schroffheit zu wahren strebten, mehr und mehr an Boden gewinne. Da die heutige electromagnetische Theorie insbesondere die ältere Fresnel'sche und Neumann'sche Auffassung nicht mehr als zwei sich ausschliessende, sondern sich zu höherer Einheit zusammenfassende Systeme betrachtet, so ist damit die leidige Rivalität derselben beseitigt und mit dem Wegfall jeder Voreingenommenheit ein mehr unparteiischer Einblick in beide ermöglicht.

Den hier charakterisirten freieren Standpunkt hält unter anderen eine Arbeit ein, welche Hr. Drude unter dem bezeichnenden Titel: „Inwieweit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik?“ [1]) kürzlich hat erscheinen lassen und auf welche ich weiterhin zurückkomme.

Was übrigens seit etwa 1885 auf mechanischer Seite bezüglich der Theorie der absorbirenden Medien und des Lichtüberganges zwischen ihnen geleistet ist, erscheint wesentlich als eine Vervollständigung, bez. Anlehnung an die Arbeiten von Kirchhoff und Stokes. Man mag dieselbe in mathematischer Hinsicht als ein wohlgelungenes, formvollendetes Kunstwerk betrachten, in physikalischer Hinsicht ist dadurch für irgendwelche fassbare Erklärung auch nicht das mindeste erreicht worden. Die bezüglichen Formelsysteme sind nämlich dadurch gewonnen, dass man gewisse Constanten, welche für durchsichtige Medien reelle Grössen sind, auf die allgemeinere

1) Drude, Gött. Nachr. 1892, p. 366—411.

complexe Form gebracht hat, ohne indess zugleich im Stande zu sein, die so gewonnenen symbolischen Gleichungen derart umzuformen, dass dieselben ausschliesslich physikalisch zugängliche Werthe enthalten. Ich selber halte zwar eine derartige Verwendung complexer Grössen im Nothfalle durchaus für statthaft, bekenne mich aber nach üblen persönlichen Erfahrungen entschieden zu dem Grundsatz, dass eine Theorie, welche dieselben nicht im einzelnen zu interpretiren vermag, eine noch nicht vollkommene ist.

2. *Die Metallreflexion.* In meinen eigenen Arbeiten über den Lichtübergang zwischen absorbirenden Medien (sogenannte Metallreflexion und Metallrefraction)[1] habe ich die Neumann'sche Theorie nur um deshalb beanstandet, weil ich dieselbe zu einer Erweiterung auf absorbirende Medien nicht für fähig hielt. Die bezüglichen Grenzgleichungen haben nämlich zunächst für isotrope Medien, wenn man zugleich die z-Axe mit dem Einfallsloth zusammenfallen lässt, zufolge meines Buches p. 142, 158 und 159 die folgende Gestalt.

Nach Fresnel:

$$(1)\quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \\ \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_2, \quad \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)_2, \end{cases}$$

wo ξ, η, ζ die Componenten der Schwingungsausschläge des Aethers sind und die Indices 1, 2 sich auf das erste, bez. zweite Medium beziehen.

Nach Neumann dagegen:

$$(2)\quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2 \\ \omega_1^2 \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_1 = \omega_2^2 \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_2, \\ \omega_1^2 \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)_1 = \omega_2^2 \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)_2, \end{cases}$$

und bedeuten hierin noch ω_1, resp. ω_2 die bezüglichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Beide Gleichungensysteme sind

1) E. Ketteler, Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig 1885. — Dieselbe scheint Hrn. Drude, der dieselbe niemals citirt, sondern bei Erwähnung meiner Ansichten auf ältere Publicationen von mir zurückgreift, bisher fremd geblieben zu sein.

gültig für die Punkte von der Lage $x = y = z = 0$ (in durchsichtigen Medien auch für $z = 0$).

Obwohl die ersteren Jahre lang von Hrn. Voigt als unmöglich bekämpft und die letzteren von demselben auf eine nur äusserlich verschiedene Form gebracht sind, so hat jetzt Hr. Drude beide Systeme auf p. 369 seiner Arbeit als Gleichungen (3') und (3) als thatsächlich gleich richtig anerkannt.

Die zu ihrer Integration dienenden Schwingungsausdrücke haben sämmtlich die Form (n bedeutet das Brechungsverhältniss):

$$\varrho = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - n \frac{u x + v y + w z}{\lambda} \right).$$

Handelt es sich nun weiter um die Ausdehnung vorstehender Uebergangsbedingungen auf absorbirende Medien, so begreift man sofort den wesentlichen Unterschied beider Systeme. Während nach Fresnel Schwingungsausdrücke mit den Componenten:

$$\xi = \mathfrak{A}_x e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \varkappa (u' x + v' y + w' z)} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\nu (u x + v y + w z)}{\lambda} - \psi_x \right) \dots$$

oder:

$$\xi = \mathfrak{A}_x (\cos \psi_x + \sqrt{-1} \sin \psi_x) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{(\nu u + \sqrt{-1}\, \varkappa u') x + (\nu v + \sqrt{-1}\, \varkappa v') y + (\nu w + \sqrt{-1}\, \varkappa w') z}{\lambda} \right) \dots$$

genügen und in meiner Optik selbst in dieser Allgemeinheit (p. 266—272) in gegenseitiger Ergänzung zur Anwendung gekommen sind, bilden im Neumann'schen System die beiden Factoren ω_1^2, ω_2^2 ein vorläufig unübersteigbares Hinderniss.

Nachdem Hr. Voigt sich anfangs bemüht, diese Schwierigkeit mittels gewisser Zusatzglieder, die er den Grenzgleichungen in ihrer hier aufgeführten Form hinzufügte, zu beseitigen, hat er sich schliesslich genöthigt gesehen, beide Factoren vorbehaltlich einer späteren Interpretation derselben complex zu setzen. Gewiss wird man daher Hrn. Drude zustimmen, wenn er p. 411 die Meinung äussert, dass man in der eigentlichen Optik *„eher die Fresnel'schen als die Neumann'schen Formeln wählen werde"*.

Ich habe in der That in meinem Buche die Theorie der Metallreflexion etc. auf p. 187—276 nicht bloss in völlig er-

schöpfender Weise durchführen, sondern auch die Totalreflexion an durchsichtigen Medien als einen gewissen eigenthümlichen Specialfall derselben dieser subsummiren können. Dabei mag noch ausdrücklich constatirt werden, dass an dem Gelingen dieser Aufgabe die neben den Grenzgleichungen völlig unentbehrliche Incompressibilitätsbedingung:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0 \tag{3}$$

in der wesentlichsten Weise betheiligt ist.

Wenn übrigens Hr. Drude in Anm. 4 auf p. 382 seiner Arbeit hervorhebt, dass die Voigt'sche Theorie zu einer Uebereinstimmung mit den Cauchy'schen Formeln führe und er selber diese Uebereinstimmung[1]) bewiesen habe, so hat mich der von ihm geführte Beweis, dessen Hülfsmittel gewissermaassen von aussen her entlehnt sind, nur wenig befriedigt. Dabei ergeht sich derselbe befremdlicher Weise bezüglich des Urhebers der beiden Grundformeln der Metallreflexion:

$$\nu^2 - \varkappa^2 = \nu_0^2 - \varkappa_0^2, \qquad \nu\varkappa\cos r = \nu_0\varkappa_0, \tag{4}$$

unter ν, $\varkappa$ Refractions- und Extinctionscoefficient bei beliebigem Brechungswinkel r und unter ν_0, $\varkappa_0$ dieselben Grössen für $r = 0$ verstanden, in unbestimmten Vermuthungen, während ich doch in meinem Buche p. 198 den Nachweis führe, dass ich selber diese Relationen zuerst 1875 aufgestellt, dass dieselben dann sofort von Hrn. Wernicke acceptirt und von letzterem unter Anlehnung an die v. Helmholtz'sche Arbeit über anomale Dispersion ihre erste Begründung gefunden haben. Cauchy hat dieselben nirgendwo gegeben, Eisenlohr hat sie nicht gekannt und Beer hat ganz abweichende Beziehungen für die richtigen gehalten.

3. *Die Krystallreflexion.* Wenden wir uns hiernach zu den Theorien der durchsichtigen doppelbrechenden Medien, so unterscheidet Hr. Drude (p. 397) dreierlei Erklärungssysteme, je nachdem man mit Neumann streng transversale Wellen in der Polarisationsebene oder mit Fresnel streng transversale Wellen senkrecht zur Polarisationsebene oder mit Briot, Boussinesq und Sarrau genähert transversale (quasitrans-

1) Drude, Wied. Ann. **35.** p. 508. 1888.

versale) Wellen ebenfalls senkrecht zur Polarisationsebene annimmt.

Wenn nun aber Hr. Drude alle diese Systeme vom Standpunkte der praktischen Physik für gleichmässig zulässig erachtet, so glaube ich ihm doch bezüglich des dritten widersprechen zu müssen. Nach obiger Darstellung ist nämlich eine praktisch richtige Construction der Formeln der Metallreflexion — unter strengem Ausschluss imaginärer Grössen — nur bei Zuziehung der Incompressibilitätsbedingung möglich. So wenig es aber einen Lichtäther und einen davon verschiedenen Electricitätsäther geben kann, ebensowenig gibt es einen unzusammendrückbaren Aether in isotropen und einen zusammendrückbaren in anisotropen Medien. Freilich wird diese durchschlagende Bedeutung jener Bedingung auf dem von Hrn. Drude eingenommenen Standpunkt weniger empfunden und daher kaum vollauf gewürdigt werden.[1])

Leider hat derselbe ein viertes Erklärungssystem, nämlich das in meiner Optik von mir aufgestellte, wohl übersehen. Da ich auf die Bewegungsgleichungen desselben weiter unten ausführlicher zurückkomme, so möge dieses Ketteler'sche System vorläufig dahin charakterisirt werden, dass es in scheinbar paradoxer Weise im incompressibeln Aether Schwingungen postulirt, die senkrecht zur Polarisationsebene und zugleich senkrecht zum Strahle erfolgen.[2])

Die allgemeinen Bedingungen für den Lichtübergang zwischen anisotropen Medien sind in meinem Buche für den Standpunkt Neumann's, Cornu's und Ketteler's — also unter selbstverständlichem Ausschluss der Quasitransversalsysteme — p. 334—372 abgehandelt. Insbesondere habe ich die sämmtlichen Grenzgleichungen des ersten und letzten Systems aus dem einen allgemeinen Energieprincip abgeleitet, während ich bezüglich der zunächst empirisch gewonnenen Gleichungen Cornu's eine solche Zusammenfassung nicht für möglich hielt. Wie nun aus der betreffenden interessanten Darstellung Drude's hervorgeht, habe ich mich in dieser Beziehung geirrt.

1) Auch in durchsichtigen Medien ist die Incompressibilitätsgleichung für die Vorzeichenbestimmung nützlich, damit man nicht z. B. Deformationscomponenten und Drehcomponenten verwechsele.

2) Vgl. insbesondere l. c. p. 288 u. ff.

Auf p. 342 und 343 der Optik finden sich die bezüglichen Grenzgleichungen wie folgt angegeben.

Für die Ketteler'schen Strahlschwingungen:

$$(5)\quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2, \qquad \eta_1 = \eta_2 \\ \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_2, \quad \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)_2 \end{cases}$$

und für die Neumann'schen Normalschwingungen, sofern man der Einfachheit wegen xz-Ebene und Einfallsebene zusammenfallen lässt:

$$(6)\quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2, \qquad \eta_1 = \eta_2 \\ \omega_1^2\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_1 = \omega_2^2\alpha\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)_2, \quad \omega_1^2\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)_1 = \omega_2^2\beta\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)_2, \end{cases}$$

sämmtlich bezogen auf Punkte von der Lage $x = y = z = 0$ (in Neumann'schen durchsichtigen Medien auch für $z = 0$).

Dies sind aber wieder die nämlichen Gleichungen, die früher von gegnerischer Seite heftig angefochten wurden, und die nunmehr Hr. Drude p. 394—397 seines Aufsatzes ausdrücklich für zulässig erklärt. Es sind die Gleichungen (32) und (41) desselben.

Beide Systeme zeigen den gleichen charakteristischen Unterschied wie die entsprechenden für isotrope Medien. Während daher wieder die Grenzgleichungen Ketteler's ohne weiteres auch auf absorbirende Krystalle anwendbar sind, versagen dagegen die Gleichungen Neumann's, sofern mit ihnen weitere Operationen als ein einfaches Complexsetzen der Coefficienten unmöglich sind. — Genau dasselbe gilt bezüglich der neuen Cornu-Drude'schen Grenzbedingungen, nämlich der Gleichungen (39) bei Hrn. Drude.

Noch auf folgenden Umstand möchte ich hier vorläufig aufmerksam machen. Die Normalschwingungen befolgen das Brechungsgesetz, die Strahlschwingungen dagegen nicht. Geht man in anisotropen absorbirenden Medien von einer bestimmten Normalrichtung aus, so fehlt dazu vorläufig die Strahlrichtung, geht man dagegen von einer bestimmten Strahlrichtung aus, so fehlt die zugehörige Normale. Nun kennt bekanntlich die bisherige Optik seit Fresnel's Zeiten zur Ermittelung der relativen Lage von Strahl und Normale kein anderes Mittel, als von der Geschwindigkeitsfläche der Normalen durch eine

rein mathematische Umhüllungsoperation zu der der Strahlen fortzuschreiten. Hat aber die erstere eine complexe Form, so natürlich auch die letztere, und daher ist wenigstens im dreidimensionalen Raume auch der Winkel zwischen Strahl und Normale eine complexe und damit im allgemeinen eine unbestimmbare Grösse.

Andererseits habe ich schon in meinem Buche darauf hingewiesen, dass es ausser dem auf reine Geschwindigkeitsflächen angewandten Umhüllungsprincip noch einen anderen und zwar universelleren Grundsatz geben müsse, welcher auch für absorbirende Krystalle den reellen Zusammenhang jener beiden Grössen finden lasse. Ich komme weiterhin auf denselben ausführlich zurück.

4. *Die Bewegungsgleichungen doppeltbrechender Medien.* Nach dieser Fixirung des gegenwärtigen Thatbestandes wende ich mich zu meiner Hauptaufgabe, der Ableitung der Bewegungsgleichungen der doppeltbrechenden Medien, oder vielmehr, da ich dieselben in meinem Buche p. 294—300 für durchsichtige und p. 300—328 für undurchsichtige Krystalle bereits gegeben, zur Erläuterung und Sicherstellung dieser Gleichungen und zur Pointirung der ihnen zu Grunde liegenden Voraussetzungen.

Für den hier vorgesetzten Zweck ist es zunächst ausreichend, dass ich mich auf durchsichtige Krystalle beschränke. Machen wir dabei der Einfachheit wegen die Symmetrieaxen zu Coordinatenaxen, so sind die in Rede stehenden Differentialgleichungen die Gleichungen (V) auf p. 297 meines Buches, nämlich:

$$(7)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - m'\dfrac{d^2\xi'}{dt^2}C = \mathfrak{e}\,\varDelta_2 X + B_x m'\mathfrak{k}'\xi', \\ m\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - m'\dfrac{d^2\eta'}{dt^2}C = \mathfrak{e}\,\varDelta_2 Y + B_y m'\mathfrak{k}'\eta', \\ m\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - m'\dfrac{d^2\zeta'}{dt^2}C = \mathfrak{e}\,\varDelta_2 Z + B_z m'\mathfrak{k}'\zeta'. \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2}C + \dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = -\mathfrak{k}'\xi'. \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2}C + \dfrac{d^2\eta'}{dt^2} = -\mathfrak{k}'\eta', \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}C + \dfrac{d^2\zeta'}{dt^2} = -\mathfrak{k}'\zeta', \end{cases}$$

zu welchen dann noch als Ergänzungsgleichung hinzutritt:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Darin beziehen sich die m; ξ, η, ζ auf Dichtigkeit und Schwingungscomponenten des intermolecularen, d. h. des mit diesem als gleich angenommenen Weltäthers, die m'; ξ', η', ζ' auf die entprechenden Grössen der mitschwingenden Körpermolecüle, e ist die Deformationsconstante des Aethers, X, Y, Z sind die Vectoren der aus der Verschiebung hervorgehenden Kraftcomponenten desselben, und B_x, B_y, B_z, C, $\mathfrak{k}'$ $(= 4\pi^2/T_m^2)$ sind Constanten.

Vorstehende Gleichungen lassen sich noch unter Heranziehung zweier vor kurzem von mir veröffentlichter Aufsätze[1]), in der Weise transformiren, dass man schreibt:

$$\text{(7b)} \quad \begin{cases} (m + \alpha_x)\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha_x'\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = e\,\Delta_2 X \\ (m + \alpha_y)\dfrac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha_y'\dfrac{d^2\eta'}{dt^2} = e\,\Delta_2 Y \\ (m + \alpha_z)\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + \alpha_z'\dfrac{d^2\zeta'}{dt^2} = e\,\Delta_2 Z \end{cases}$$

$$\text{(8b)} \quad \begin{cases} m'\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = -\mathfrak{k}\,\xi' - \gamma\left(\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \dfrac{d^2\xi'}{dt^2}\right) \\ m'\dfrac{d^2\eta'}{dt^2} = -\mathfrak{k}\,\eta' - \gamma\left(\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{d^2\eta'}{dt^2}\right) \\ m'\dfrac{d^2\zeta'}{dt^2} = -\mathfrak{k}\,\zeta' - \gamma\left(\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \dfrac{d^2\zeta'}{dt^2}\right). \end{cases}$$

Um nämlich die letztere Form auf die obere zurückzuführen, dazu hat man nur zu substituiren:

$$\mathfrak{k} = \frac{m'\,\mathfrak{k}'}{1 + C}, \qquad \gamma = \frac{m'\,C}{1 + C},$$

$$\alpha_x = m'\,B_x\,C, \qquad \alpha_y = m'\,B_y\,C, \qquad \alpha_z = m'\,B_z\,C,$$

$$\alpha_x' = m'(B_x - C), \qquad \alpha_y' = m'(B_y - C), \qquad \alpha_z' = m'(B_z - C),$$

und darf oft die kleine Grösse C neben B vernachlässigt werden.

Selbstverständlich geht das gesammte System derselben für $B_x = B_y = B_z$ in das der isotropen Medien über, und bildet

1) Ketteler, Wied. Ann. **46.** p. 572. 1892 und Wied. Ann. **49.** p. 382. 1893.

umgekehrt jenes den Ausgangspunkt für seine hier stehende Erweiterung. Begreiflicherweise kann es sich an diesem Orte nur um die Correctheit der vorgenommenen Erweiterung handeln, und da genüge vorläufig die Bemerkung, dass, sofern man aus theoretisch-mechanischen wie aus experimentell-praktischen Gründen die Unabhängigkeit der Constanten $\mathfrak{f}'$ von der Orientirung einmal zugibt, der Grundsatz der Incompressibilität des Aethers in Verbindung mit der an sich *plausiblen Annahme eines Parallelismus der Aether- und Molecülschwingungen* sofort zu der weiteren Feststellung führt, dass auch die kleine Grösse C eine absolute Constante ist.

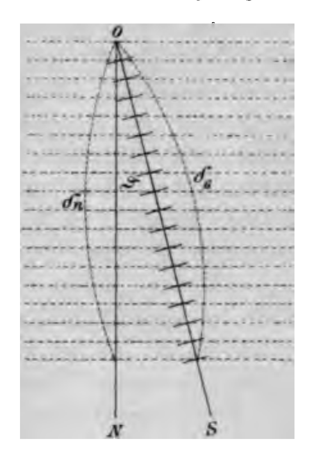
5. *Zweierlei Wellebenen.* Dies angenommen, soll der eigentliche Inhalt vorstehender Gleichungen durch eine Reihe von Bemerkungen klargestellt werden, die wir im wesentlichen an die Integration derselben anknüpfen. Ich werde hierbei zur leichteren Vergleichung mit dem darüber in meiner Optik p. 295—297 Gesagten, die obere, ältere Form der Gleichungen verwerthen.

Das vorausgesetzte Medium denke man sich als ein ausserordentlich feines, den Raum fast stetig erfüllendes elastisches Substrat, welchem in regelmässiger, aber discreter Anordnung eine Vielheit von verhältnissmässig massigen, mit inneren Kräften begabten sogenannten Molecülen eingefügt sei. Durch irgend einen Punkt 0 desselben mögen zur Zeit $t = 0$ zwei Wellebenen hindurchgehen, die resp. durch die Ausdrücke:

$$(9)\begin{cases} \varrho = A_s \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s}\right) = A_s \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s}\right) \\ \varrho' = A_s' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{u_n x + v_n y + w_n z}{l_n}\right) = A_s' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n}\right) \end{cases}$$

dargestellt werden, und die miteinander irgend einen Winkel ϑ bilden. Beide Wellebenen werden sich mit den bezüglichen Geschwindigkeiten, resp. Wellenlängen ω_s, l_s und ω_n, l_n in der Richtung der δ_s, δ_n verschieben und nach Verlauf der Zeiteinheit in die resp. Lage kommen $\delta_s = \omega_s$, $\delta_n = \omega_n$. Wir verfolgen bei dieser Verschiebung insbesondere das Voranschreiten des Durchschnittspunktes beider Wellebenen, dessen Coordidaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichungen beider Ebenen gemeinsam befriedigen.

Auf nebenstehender Figur sind die beiden Normalen als ON und OS bezeichnet; die parallelen punktirten Linien mögen sich auf zeitlich äquidistante Lagen des Wellensystemes ϱ', die kurzen ausgezogenen Linien auf die entsprechenden des Systems ϱ beziehen. Es ist dann zugleich OS der geometrische Ort der Durchschnittspunkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und wollen wir insbesondere die in der Richtung OS gelegene Molecülreihe ins Auge fassen.



Identificiren wir nun die beiden in den Differentialgleichungen 7 vorkommenden Schwingungsausschläge mit den vorstehend charakterisirten ϱ, ϱ', so ist klar, dass nur Vorgänge in Betracht kommen, die sich in nächster Nähe der Molecülreihe OS abspielen. Dieselbe heisse fortan die Strahlrichtung. Und wenn wir weiter den Ausschlag ϱ auf den incompressiblen Aether beziehen, so lässt sich sonach sagen, dass die Aethertheilchen transversal schwingen zur Strahlrichtung als ihrer Wellennormale, entsprechend den Gleichungen:

$$(10) \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \quad U_s u_s + V_s v_s + W_s w_s = 0.$$

Beziehen wir ebenso die Schwingungsausschläge ϱ' auf die Molecüle, so ist ON die Normale der Molecülwelle. Nun verlangt aber die schon oben erwähnte Annahme des Parallelismus der Ausschläge der Aether- und Körpertheilchen, dass die Schwingungen der letzteren schräg stehen auf ON, dagegen senkrecht auf OS. Bezüglich der Molecüle gelten also die Gleichungen:

$$(11) \qquad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = \Theta, \quad U_s' u_n + V_s' v_n + W_s' w_n = \varepsilon,$$

so dass folglich die Molecüle abwechselnd Compressionen und Dilatationen erfahren. Andererseits verlangt aber jener Parallelismus die Beziehungen:

$$(12) \qquad \begin{gathered} U_s' = U_s, \quad V_s' = V_s, \quad W_s' = W_s, \\ U_s' u_s + V_s' v_s + W_s' w_s = 0. \end{gathered}$$

Was jetzt schliesslich die Componenten X, Y, Z des bezüglichen resultirenden Vectors R betrifft, so soll gesetzt werden (für $x = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$, $z = \mathfrak{z}$):

$$(13)\quad R = K \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s}\right) = K \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s}\right),$$

dabei aber die Richtung und Grösse der Vectoramplitude K vorläufig unbestimmt bleiben.

6. *Die Ausführung der Integration.* Führen wir nunmehr die Componenten sämmtlicher Ausschläge entweder in der längeren oder kürzeren der Formen (9) beispielsweise in die erste der Differentialgleichungen (7) ein, so erhält dieselbe die Gestalt:

$$-m \frac{4\pi^2}{T^2} A_s U_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s}\right) + m' \frac{4\pi^2}{T^2} A_s' U_s' C \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n}\right)$$

$$= -\mathfrak{e} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} n_s^2 K_x \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_s}{l_s}\right) + B_x m' \mathfrak{f} A_s' U'_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{l_n}\right).$$

Darin ist $\lambda = v\,T = (\sqrt{\mathfrak{e}/m})\,T$ die dem $l = \omega\,T$ entsprechende Wellenlänge im Weltäther und $n_s = (v / \omega_s)$ gesetzt.

Sofern vorstehende Integrationsbedingung für alle Zeiten t bestehen soll, so zerfällt sie unter Berücksichtigung der Relationen (12) in die beiden folgenden Einzelgleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta_n}{l_n} = \dfrac{\delta_s}{l_s} \\[2ex] \dfrac{m}{T^2} A_s U_s - \dfrac{m'}{T^2} A_s' U_s C = \dfrac{\mathfrak{e}}{v^2 T^2} n_s^2 K_x - B_x \dfrac{m'}{T_m^2} A_s' U_s. \end{cases}$$

Der ersteren zufolge ist:

$$(15)\quad \omega_n = \omega_s \frac{\delta_n}{\delta_s} = \omega_s \cos\vartheta.$$

Und was die zweite betrifft, so soll jetzt zuförderst die Amplitude K senkrecht und parallel zur Strahlrichtung in Componenten zerlegt werden; die erste derselben wird keine andere sein, als diejenige, welche sich bezüglich der Beschleunigungen senkrecht zu OS als einzig wirksame erweist, nämlich A_s. Bezeichnen wir die zweite Componente als A_l, und den Winkel zwischen K und A_s durch ϑ', so hat man sonach:

$$(16)\quad K = \sqrt{A_s^2 + A_l^2}, \quad A_l / A_s = \operatorname{tg} \vartheta'.$$

Demnach lässt sich weiter setzen:

$$K_x = A_x^e + A_x^l = A_e U_e + A_l u_e$$
$$K_y = A_y^e + A_y^l = A_e V_e + A_l v_e$$
$$K_z = A_z^e + A_z^l = A_e W_e + A_l w_e.$$

Substituirt man diesen Werth von K_x in der zweiten der obigen Bedingungsgleichungen (14), so geht dieselbe über in:

$$(17) \qquad \left[m' A_e' \left(B_m \frac{T^2}{T_m^2} - C\right) - m A_e (n_e^2 - 1)\right] U_e = m A_l u_e n_e^2.$$

Behandelt man nunmehr in ähnlicher Weise die erste der Differentialgleichungen (8), so erhält dieselbe bei Substitution der Schwingungsausdrücke ϱ, ϱ' die Form:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} C A_e \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_e}{l_e}\right) + \frac{4\pi^2}{T^2} A_e' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_m}{l_m}\right)$$
$$= \frac{4\pi^2}{T_m^2} A_e' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_m}{l_m}\right).$$

Sie zerfällt gleichfalls in zwei Einzelgleichungen; und man erhält schliesslich:

$$(18) \qquad \frac{A_e'}{A_e} = \frac{C}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1}.$$

Durch Einführung des so gewonnenen Amplitudenverhältnisses lässt sich dann ersichtlich die vorhergehende Gleichung (17) auf die bekannte Gestalt bringen:

$$(19) \qquad \begin{cases} (n_x^2 - n_e^2)\, U_e = n_e^2 \operatorname{tg} \vartheta' u_e \\ (n_y^2 - n_e^2)\, V_e = n_e^2 \operatorname{tg} \vartheta' v_e \\ (n_z^2 - n_e^2)\, W_e = n_e^2 \operatorname{tg} \vartheta' w_e \end{cases}$$

und so ergibt sich, sofern gleich die beiden übrigen analogen Gleichungen hinzugefügt werden. das vorstehende System.

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit u_e, v_e, w_e und addirt, dann kommt:

$$(20) \qquad \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{n_x^2 U_e u_e + n_y^2 V_e v_e + n_z^2 W_e w_e}{n_e^2}$$

Nun werde um unseren Ausgangspunkt O die Strahlenfläche construirt. Irgend ein Radius Vector derselben sei unsere Molecülreihe OS als Normalrichtung der auf ihr transversalen Aetherwellen. Legt man dann an den Berührungs-

punkt eine Tangentialebene, fällt auf dieselbe von O aus ein Perpendikel und berechnet analytisch den Winkel zwischen ihm und der Richtung OS, so findet man denselben $= \vartheta'$. Andererseits ist jene Tangentialebene erfahrungsmässig diejenige Ebene gleicher Phasen, welche für das Sinusgesetz der Brechungswinkel in Betracht kommt. Identificiren wir dieselbe mit unserer Ebene der Molecülwelle, so wird $\vartheta' = \vartheta$, gleich dem Winkel zwischen der Strahlrichtung OS und der ihr zugeordneten Normale ON der Molecüle, so dass sich folglich schreibt:

$$\frac{A_l}{A_s} = \operatorname{tg} \vartheta, \quad K = \frac{A_s}{\cos \vartheta}. \tag{21}$$

Aus letzterem Ausdruck schliesst man, dass die *volle Amplitude* K der treibenden Aetherkraft den *Molecülwellen parallel* ist, während für die *wirkliche* Bewegung der *Aetherwellen* nur der *transversale Antheil* A_s verwerthet wird. Zu den Componenten jener vollen Aetherkraft treten eben gewisse Reactionskräfte hinzu, und diese zwingen zunächst die Molecüle, aus ihrer Wellebene herauszuschwingen.

Wie ich weiter unten zeigen werde, lässt sich andererseits der erstere Ausdruck sofort auch auf absorbirende Medien übertragen.

7. *Einige Folgerungen.* Fassen wir jetzt das Ergebniss unserer Erörterung nochmals zusammen, so haben wir die Strahlrichtung, d. h. diejenige, längs welcher die Lichtenergie sich fortpflanzt und erhält, als eine Richtung charakterisirt, längs welcher zunächst die massigen Molecüle und mit ihnen dann auch die nächste Aetherumgebung senkrecht hin- und herschwingt. Breiten wir nun fort und fort neue Molecülfäden neben einander aus, so bilden sich in denselben endlich ausgedehnte Wellebenen mit quasitransversalen Schwingungen, während jeder einzelne dieser Fäden innerhalb einer um ihn herumgelegten sehr engen Röhre transversale Aetherwellen aufweist. Es sind sonach bei der Lichtverbreitung im Inneren der ponderablen Medien die *Molecüle* das *wesentlich bestimmende Element*, wohingegen die Aethertheilchen in eine mehr secundäre Rolle zurücktreten. Ebenso functioniren in der Trennungsfläche selbst nur die *Molecüle* als *elementare Wellencentra*, wobei

dann die *Aetherelasticität* den Lichtübergang in je *zwei dort zusammenstossenden Röhren* vermittelt.

Vergleicht man schliesslich das betrachtete, wie mir scheint, in der Natur selbst vorkommende krystallinische Medium mit dem durch blosse Abstraction gewonnenen anisotropen Idealäther Fresnel's und Neumann's, so wird es begreiflich, dass von diesem aus der Dualismus zwischen Strahl und Normale und zwischen Schwingungen senkrecht und parallel zur Polarisationsebene unmöglich verstanden werden konnte. Welche Interpretation schliesslich speciell die Neumann'schen Gleichungen erfahren werden, mag der Zukunft vorbehalten bleiben; möglicher Weise finden sie auf Zustände Anwendung, bei welchen gar keine Absorption statt hat.

Wenn ich diesmal — allerdings erst nach einem mehrmaligen, bisher nie völlig geglückten Anlauf — die Hoffnung hege, die vorgetragene Theorie, welche es ersichtlich mit äusserst verwickelten Vorgängen zu thun hat, ohne wesentlichen Fehler zur Darstellung zu bringen, so mag zum besseren Verständniss des Ganzen noch Folgendes hervorgehoben werden. Zwar sind in meinem Buche genau die gleichen Endgleichungen entwickelt worden wie hier, indess habe ich p. 295 den Fehler begangen, statt *einer* zwei Incompressibilitätsgleichungen aufzustellen, nämlich unter der Annahme eines Parallelismus nicht nur der Schwingungen, sondern auch der Wellebenen simultan zu setzen:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \quad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = 0.$$

Haben so zwar beide zu richtigen Resultaten geführt, so ist doch die letztere, wie oben gezeigt, unzulässig, und hat dieselbe den eigentlichen Kernpunkt der Theorie der Doppelbrechung, nämlich *die Feststellung der sogenannten Wellennormale als der Normale selbständiger, endlich ausgedehnter quasitransversaler Molecülwellen,* nicht gefördert, sondern vielmehr verdeckt.

Die Gesetze der Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen.

8. *Einleitende Bemerkung.* Fällt eine linear polarisirte Welle auf die ebene Trennungsfläche eines absorbirenden Krystalles, so zerfällt dieselbe im allgemeinen in eine elliptisch polarisirte gespiegelte und in zwei elliptisch polarisirte ge-

brochene Wellen. Dabei hat man zunächst holoedrische und hemiedrische Krystalle zu unterscheiden. Während bei letzteren der Charakter der elliptischen Polarisation des durchgehenden Lichtes, also Amplitudenverhältniss und Phasenunterschied der Componenten, in gewisser Weise an die bestimmte Krystallrichtung gebunden erscheint, ist das bei den holoedrischen Krystallen ebensowenig der Fall wie bei den gewöhnlichen isotropen Medien. In beiden sind längs einer gegebenen Strahlrichtung und Schwingungsebene je nach der äusseren Anregung alle denkbaren Uebergänge zwischen linearer und circularer Polarisation möglich.

Gibt man diese Unterstellung zu, so folgt sofort, dass Phasendifferenzen zwischen den Strahlcomponenten weder in den Bewegungsgleichungen der absorbirenden holoedrischen Krystalle noch auch in den mittelst der Integralausdrücke aus ihnen ableitbaren Bedingungsgleichungen vorkommen, sondern dass dieselben ausschliesslich in den Grenz- oder Uebergangsbedingungen die ihnen eigenthümliche Rolle spielen. Die genannten Bedingungsgleichungen werden daher ausser Winkeln nur noch Brechungs- und Extinctionscoefficienten enthalten können. Complexe Beziehungen werden somit überflüssig und noch weniger erscheint zur Ableitung der Einzelgesetze die Heranziehung eines sechsdimensionalen Raumes[1]) als erforderlich.

Endlich ist zu beachten, dass eine Theorie der doppelten Brechung erst dann auf Vollständigkeit Anspruch hat, wenn sie nicht blos Rechenschaft gibt von der durch sie bewirkten Drehung der Wellennormalen, sondern auch den Weg zu bestimmen vermag, auf welchem sich die strahlende Energie durch den Krystall hindurch fortpflanzt.

In diesem Sinne gibt es meines Wissens für absorbirende Krystalle ausser der in meinem Buche p. 300—328 aufgestellten bis heute keine andere, und hat gerade das Bestreben, die Beziehungen zwischen Strahl und Normale in reeller Form zu gestalten, den Ausgangspunkt der Speculation gebildet.

1) Vgl. Drude, Wied. Ann. **32.** p. 599. 1887. — Hr. Liebisch, welcher über sämmtliche bisherige Bearbeitungen dieser Materie den Stab bricht, gibt gleichwohl in seiner Krystallographie eine Darstellung der Voigt'schen Formeln. Auffallender Weise ist die anomale Dispersion in dem ganzen Werke ignorirt.

Obwohl ich die dort gegebenen Entwickelungen ganz und voll auftrecht erhalte, so komme ich an dieser Stelle um so lieber darauf zurück, als von meinen vormaligen Gegnern die Durchführbarkeit derselben bezweifelt ist, und als die vorstehende schärfere Präcisirung der Theorie der durchsichtigen Krystalle gerade auch den absorbirenden zu gute kommen wird.

9. *Die Bewegungsgleichungen und ihre Integration.* Was zunächst die Bewegungsgleichungen derselben betrifft, so erhält man dieselben ohne weitereres aus den Gleichungen (7) und (8), wenn man in letzteren (8) überall die Glieder $-\mathfrak{k}\,\xi' \ldots\ldots$ durch:

$$-\mathfrak{k}\,\xi' - \mathfrak{g}\,\frac{d\,\xi'}{d\,t} \ldots\ldots$$

ersetzt.

Behufs Integration derselben zerlegen wir die bisher auf der Strahlrichtung senkrechten beschleunigenden Kräfte der Aether- und Körpertheilchen, resp. die ihnen entsprechenden Schwingungsausdrücke (9) in drei axiale Componenten, fügen aber letzterem ausser dem gemeinsamen Absorptionsfactor eine axial verschiedene Verzögerung hinzu, sodass wir erhalten:

$$(22)\begin{cases} \xi = A_x\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa(u'x+v'y+w'z)} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} - \psi_x\right)\ldots \\ \xi' = A_x'\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa(u'x+v'y+w'z)} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{u_n x + v_n y + w_n z}{l_n} - \psi_x - \Delta_x\right). \end{cases}$$

unter u', v', w' die Richtungscosinus des Einfallslothes als der Extinctionsrichtung verstanden.

Aus dem Prinzip des Parallelismus der Aether- und Molecülschwingungen lässt sich dann sofort die Folgerung ziehen, dass:

$$(23)\qquad \mathfrak{A}_x' / \mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y' / \mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z' / \mathfrak{A}_z, \quad \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$$

sein muss, und so lassen sich dann diese axialen Amplituden auffassen als die Componenten sogenannter restaurirter Schwingungen $\mathfrak{A}_s$ und $\mathfrak{A}_s'$, deren gemeinsame Richtung durch die Cosinus $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ dargestellt werden soll.

Was sodann die frühere Amplitude K der in die Ebene der Molecülwellen fallenden treibenden Kraft $\Delta_2 R$, (Gleichung 13) betrifft, so treten an die Stelle derselben zunächst wieder zwei Einzelamplituden, die jedoch nicht, wie früher, senkrecht

und parallel zur Strahlrichtung (u_s, v_s, w_s), sondern zu einer sich dem Strahle zuordnenden neuen Richtung ($\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$), genommen werden sollen, deren Bedeutung weiter unten zur Sprache kommen wird. Und werden schliesslich beide Kräfte unter Hinzufügung axialer Verzögerungen durch axiale Einzelkräfte ersetzt, so lässt sich beispielsweise schreiben:

$$(24)\left\{\begin{aligned} X = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa(u'x+v'y+w'z)} \Big[& \mathfrak{A}\,\mathfrak{u}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} - \psi_x\right) \\ & + \mathfrak{A}_l\,\mathfrak{u}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{u_s x + v_s y + w_s z}{l_s} - \psi_x - l_x\right)\Big] \dots \end{aligned}\right.$$

und es erscheint $\mathfrak{A}_l$ als eine gewisse restaurirte Longitudinalamplitude.

Bevor wir vorstehende Ausdrücke in die entsprechenden Differentialgleichungen einführen, mögen noch zur Vereinfachung, ganz wie für isotrope Medien, und in Uebereinstimmung mit der electromagnetischen Dispersionstheorie[1]) folgende Abkürzungen eingeführt werden. Es soll, sofern $T_m / T = \lambda_m / \lambda$ ist, gesetzt werden:

$$(25)\left\{\begin{aligned} & \nu_s^2 - \varkappa_s^2 = 1 + p\,D, \qquad 2\,\nu_s\,\varkappa_s\cos r = q\,D \\ & p = \frac{1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^2 + G^2\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}}, \quad q = \frac{G\,\frac{\lambda_m}{\lambda}}{\left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}\right)^2 + G^2\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2}} \end{aligned}\right.$$

wo also λ_m die ungefähre Wellenlänge des Absorptionsmaximums, G die Absorptionsconstante und D eine Variable bedeutet, welche speciell für $\lambda = \infty$, ($\varkappa = q = 0$) mit der brechenden Kraft ($\nu_\infty^2 - 1$) zusammenfällt. r endlich ist der Winkel zwischen Strahlrichtung und Einfallsloth und daher definirt durch die Beziehung:

$$(25\text{b}) \qquad \cos r = u_s u' + v_s v' + w_s w'.$$

10. *Resultate.* Wie sich die Einführung der Schwingungsausdrücke in die Differentialgleichungen gestaltet, habe ich in meinem Buche p. 309 und ff. im Einzelnen gezeigt. Hier mag der Hinweis genügen, dass sich sämmtliche axiale Verzögerungen, von denen insbesondere l_x, l_y, l_z einander gleich werden, aus denselben eliminiren lassen. Die Bedingungs-

1) Ketteler, Wied. Ann. **49.** p. 382. 1893.

gleichungen der Integration erhalten so schliesslich die übe[rsicht-] sichtliche Form:

$$(26)\left\{\begin{array}{l}\sqrt{p^2+q^2}\,(D_x-D)\,\mathfrak{U}=\operatorname{tg}\vartheta\,\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2 r}\,.\,\mathfrak{u}\\ \sqrt{p^2+q^2}\,(D_y-D)\,\mathfrak{V}=\operatorname{tg}\vartheta\,\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2 r}\,.\,\mathfrak{v}\\ \sqrt{p^2+q^2}\,(D_z-D)\,\mathfrak{W}=\operatorname{tg}\vartheta\,\sqrt{(\nu^2-\varkappa^2)^2+4\,\nu^2\varkappa^2\cos^2 r}\,.\,\mathfrak{w}\end{array}\right.$$

Gleichungen, die völlig denen der durchsichtigen Medie[n] (Gleichungen 19), analog sind und für $\varkappa = G = 0$ in diese übe[r-] gehen.

Zu denselben tritt noch als Ergänzung die aus der Incom[-] pressibilitätsbedingung ableitbare Gleichung

$$(26\text{b})\qquad \mathfrak{U}\,\mathfrak{u}+\mathfrak{V}\,\mathfrak{v}+\mathfrak{W}\,\mathfrak{w}=0$$

hinzu, der zufolge die restaurirte Amplitude $\mathfrak{A}$ auf der Hülf[s-] strahlenrichtung ($\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$) senkrecht steht.

Unter Benutzung derselben ergeben die Gleichungen (2[6]) in bekannter Weise leicht:

$$(27)\left\{\begin{array}{l}D=D_x\,\mathfrak{U}^2+D_y\,\mathfrak{V}^2+D_z\,\mathfrak{W}^2\\ \dfrac{\mathfrak{u}^2}{D_x-D}+\dfrac{\mathfrak{v}^2}{D_y-D}+\dfrac{\mathfrak{w}^2}{D_z-D}=0,\end{array}\right.$$

von welchen Relationen die erstere dem Plücker'schen Elasti[-] citätsellipsoid und die zweite der Wellenfläche entpricht. Analo[g] erhält man daher für den halben Winkel der optischen Axe[n] den Ausdruck:

$$\operatorname{tang}\theta=\sqrt{\frac{D_y-D_z}{D_x-D_y}}$$

und für den ordinären und extraordinären Strahl gesonder[t] die ebenfalls ihrer Form nach bekannten Beziehungen:

$$D'=D_x+(D_z-D_x)\sin^2\frac{\chi-\chi'}{2}$$

$$D''=D_x+(D_z-D_x)\sin^2\frac{\chi+\chi'}{2}\,.$$

Auch der Winkel ϑ zwischen den Richtungen (u_n, v_n, w_n) und ($\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$) lässt sich in mannigfacher Weise ausdrücken. Begnügt man sich mit der einfachsten dieser Formeln, so leite[t] sich beispielsweise direct ab:

$$(28)\qquad \operatorname{tg}\vartheta=\frac{\sqrt{p^2+q^2}\,(D_x\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{u}+D_y\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{v}+D_z\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{w})}{\sqrt{(1+p\,D)^2+(q\,D)^2}},$$

und die Ebene, in welcher ϑ an $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ anzulegen ist, um u_n, v_n, w_n zu erhalten, ist ebenfalls durch bekannte Construction, resp. Symmetriebetrachtungen zu gewinnen. Repräsentirt aber schliesslich ν_s die reciproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung des Strahles, ν_n in der Richtung der Normalen, so folgt nothwendig:

$$(29\text{a}) \qquad \nu_n = \frac{\nu_s}{u_n u_s + v_n v_s + w_n w_s}.$$

Und was den dieser Normalen zukommenden Brechungswinkel r_n, bez. den zugehörigen äusseren Einfallswinkel e betrifft, so hat man:

$$(29\text{b}) \qquad \cos r_n = u_n u' + v_n v' + w_n w'$$
$$\sin e = \nu_n \sin r_n.$$

Wäre nun ausser D_x, D_y, D_z; p, q eine bestimmte Strahlrichtung (u_s, v_s, w_s) und Extinctionsrichtung (u', v', w',) als Einfallsloth gegeben, so würde man mittelst der vorstehenden Formeln leicht zu den Grössen D, ν_s, $\varkappa_s$ und sodann weiter zu ϑ sowie zur Normalrichtung (u_n, v_n, w_n) und den ihr entsprechenden Werthen ν_n, r_n, e fortschreiten können, vorausgesetzt, dass die Beziehung zwischen den Richtungen u_s, v_s, w_s und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ eine einfache wäre, oder dass gar beide Richtungen mit einander identificirt werden könnten. Dem ist aber leider im allgemeinen nicht so.

11. *Das Incompressibilitätsprincip.* Die practische Verwerthung unserer Formeln wird nämlich in hohem Grade dadurch erschwert, dass die Incompressibilität des Aethers einem jeden Strahle einen Hülfsstrahl zuordnet, dessen Richtung einmal selber vom Refractions- und Extinctionscoefficienten abhängt, dann aber auch im allgemeinen mit den Phasendifferenzen der äusseren Anregung variirt.[1]) Am leichtesten lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn man den von aussen in den Krystall eintretenden Strahl auf ein erstes Coordinatensystem (I) bezieht, dessen ZX-Ebene zugleich das Einfallsloth enthält, so dass also in den Schwingungsausdrücken für ξ, η, ζ sowohl $v_1{}^* = 0$ als $v_1{}' = 0$ wird. Für dieses specielle System erhält man mittelst der Gleichung:

1) Ketteler, l. c. p. 268 u. 301.

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{U}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{V}_1 \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{W}_1 \mathfrak{w}_1 = 0$$

$$(30)\quad \mathfrak{u}_1 = \sqrt{\frac{\nu^2 u_1^2 + \varkappa^2 u_1'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}}, \quad \mathfrak{v}_1 = 0, \quad \mathfrak{w}_1 = \sqrt{\frac{\nu^2 w_1^2 + \varkappa^2 w_1'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}}.$$

Demnach folgt, *dass die Richtung* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ *stets in der durch Strahl und Loth gelegten Ebene liegt.* Geht man sodann von diesem ersten Coordinatensystem zu einem zweiten über, welches mit den Symmetrieaxen des Krystalles zusammenfällt, so lassen sich $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{W}_1$; $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1$; $u_1, v_1, w_1, u_1', v_1', w_1'$ durch die entsprechenden $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ etc. ausdrücken. Ohne hier auf derartige langwierige Rechnungen einzugehen, beschränke ich mich auf die Erörterung der drei practisch wichtigsten Einzelfälle.

I) Für *senkrechten* Eintritt in den Krystall wird $u_1 = u'_1$, $w_1 = w'_1$ und daher nicht bloss $\mathfrak{u}_1 = u_1$, $\mathfrak{w}_1 = w_1$ sondern auch allgemein:

$$(30)\quad \mathfrak{u} = u, \quad \mathfrak{v} = v, \quad \mathfrak{w} = w,$$

d. h. *Strahlrichtung und Hülfsrichtung fallen zusammen.*

II) Der Krystall habe ein solches Absorptionsvermögen, dass zwar die zweiten Potenzen von $\varkappa / \nu$ beizubehalten sind, die *vierten* aber bereits vernachlässigt werden dürfen. In diesem Falle gehen die Ausdrücke (30) über in:

$$(31)\quad \mathfrak{u}_1 = u_1 \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2}{\nu^2}\left(\frac{u_1'^2}{u_1^2} - 1\right)}, \quad \mathfrak{v}_1 = 0, \quad \mathfrak{w}_1 = w_1 \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2}{\nu^2}\left(\frac{w_1'^2}{w_1^2} - 1\right)}$$

Lässt man nun bei den Versuchen vom senkrechten Eintritt an den Strahlenbrechungswinkel r nur soweit ansteigen, dass die innerhalb der Radicanden vorkommenden Producte noch gerade eben vernachlässigt werden können, so fallen wieder *näherungsweise* Strahl und Hülfsstrahl zusammen.

In beiden Fällen I und II lassen sich also in sämmtlichen obigen Formeln die $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ durch die u, v, w ersetzen, und so hat es für sie nicht die mindeste Schwierigkeit, von einem gegebenen Strahle zu der ihm entsprechenden Normale und dem zugehörigen äusseren Einfallswinkel zu gelangen. Damit dürfte aber wohl allen practisch-experimentellen Anforderungen genügt sein.

III. Der Krystall habe ein beliebig starkes Absorptionsvermögen, aber die Lichtbewegung gehe vor sich in einem *Hauptschnitte.* In diesem Fall genügt das Coordinatensystem (I), und wenn wir fortan die angehängten s fortlassen, so geben die Gleichungen 25, 27 und 30:

$$\nu^2 - \varkappa^2 - 1 = p\left(D_x \frac{\nu^2 w^2 + \varkappa^2 w'^2}{\nu^2 + \varkappa^2} + D_z \frac{\nu^2 u^2 + \varkappa^2 u'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}\right)$$

$$2\,\nu\,\varkappa \cos r = q\left(D_x \frac{\nu^2 w^2 + \varkappa^2 w'^2}{\nu^2 + \varkappa^2} + D_z \frac{\nu^2 u^2 + \varkappa^2 u'^2}{\nu^2 + \varkappa^2}\right).$$

Man leitet daraus ab:

$$\nu^4 - \varkappa^4 - \nu^2 A - \varkappa^2 B = 0$$

$$\nu^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\,\nu\,\varkappa\, C = 0,$$

in welchen Gleichungen A, B, C die Bedeutung haben:

$$A = p\,(D_x\, w^2 + D_z\, u^2), \quad B = p\,(D_x\, w'^2 + D_z\, u'^2)$$

$$C = \frac{p \cos r}{q}.$$

Eliminirt man aus ihnen den Brechungsindex ν, so ergibt sich der Extinctionsindex $\varkappa$ durch Auflösung der folgenden Gleichung:

(32) $$\varkappa^8 a + \varkappa^6 b + \varkappa^4 c + \varkappa^2 d + e = 0$$

mit den Coefficienten:

$$a = -16\, C^2 (1 + C^2)$$

$$b = -16\, C^2 [1 + B(1 + C^2)]$$

$$c = 4\,(1 + 2\,C^2)\,[2\,B(1 - \tfrac{1}{2} A) - A(1 + \tfrac{1}{2} B)]$$

$$d = 2\,(1 - \tfrac{1}{2} A)[2(1 - \tfrac{1}{2} A)(1 - \tfrac{1}{2} B) - A(1 - \tfrac{3}{2} A)(1 + 2\,C^2)]$$

$$e = (1 - \tfrac{1}{2} A)^2 [(1 - \tfrac{1}{2} A)^2 - A^2].$$

Ist aber so $\varkappa$ gefunden, so ergeben sich dann auch ν sowie die Cosinus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$.

Die obige biquadratische Gleichung reducirt sich unter der Bedingung $u = u'$, $w = w'$; $A = B$ auf eine Gleichung zweiten Grades. Für diesen Fall, identisch mit Specialfall I, erhält man ohne weiteres aus den Ausdrücken 25 und 27:

$$\nu^2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1 + p\,D)^2 + q^2 D^2} + (1 + p\,D)\right]$$

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1 + p\,D)^2 + q^2 D^2} - (1 + p\,D)\right]$$

$$D = D_x\, w^2 + D_z\, u^2$$

12. *Schlussbemerkung.* Die vorstehende Theorie der absorbirenden Krystalle glaube ich im Gegensatz zu der sechsdimensionalen Theorie der Hrn. Voigt und Drude als eine physikalische bezeichnen zu dürfen. Sie gibt die sämmtlichen Einzelgesetze des Lichtdurchganges für die Specialfälle I und II mit nahezu derselben Leichtigkeit und für den Fall, dass bereits die zweiten Potenzen von $\varkappa$, q und G vernachlässigt werden dürfen, mit gleicher Leichtigkeit und Eleganz wie für den Fall der ideell durchsichtigen Krystalle.

Hiernach hat auch die in meiner Optik p. 355—372 vorgetragene Theorie des Ueberganges des Lichtes in absorbirende anisotrope Medien in den vorerwähnten drei Fällen keine Schwierigkeit mehr. In das bezügliche Formelsystem tritt überhaupt der Normalbegriff nur insoweit ein, als er den dem Strahlenbrechungswinkel r_i entsprechenden äusseren Einfallswinkel e zu berechnen gestattet.

Bezüglich der Theorie zusammengesetzter Krystalle, sowie insbesondere der Dispersion der Symmetrieaxen gelten die Abschnitte p. 319—328 des Buches.

Münster i. W., im April 1893.

7. *Ueber die Diathermanität wässeriger Eisenoxydulsalzlösungen; von Richard Zsigmondy.*

Der Alaun, ebenso wie seine wässerige Lösung, erfreut sich des Rufes, für ultrarothe Strahlen besonders undurchlässig zu sein. Er wird daher mit Vorliebe angewendet, wenn es sich darum handelt, die Strahlen einer Lichtquelle von dunklen Strahlen zu befreien, obgleich schon Melloni[1]) nachgewiesen hat, dass der Alaunkrystall die dunklen Wärmestrahlen weniger absorbirt, als Eis, und eine wässerige Alaunlösung diese Strahlen besser hindurchlässt, als Wasser.

Es wird die Mittheilung vielleicht von Interesse sein, dass man farblose oder beinahe farblose Eisenlösungen herstellen kann, welche die dunklen Wärmestrahlen weit kräftiger absorbiren, als Wasser oder Alaun, und daher für praktische Anwendungen dieser Art weit geeigneter sind, als Alaun oder dessen Lösungen.

Auf die Wärmeundurchlässigkeit concentrirter blauer Kupfervitriol- und *grüner* Eisenvitriollösungen hat schon R. Franz in seiner Abhandlung: „Ueber die Diathermanität einiger Gasarten und gefärbter Flüssigkeiten" aufmerksam gemacht.[2]) Franz hat in dieser, sowie in einer späteren Abhandlung[3]) auf den Zusammenhang, welcher in der Licht- und Wärmeabsorption bestimmter Theile des Spectrums beim Durchgange des weissen Lichtstrahles durch *gefärbte* Substanzen besteht, hingewiesen, und diesem Umstande mag es zuzuschreiben sein, dass man dem Verhalten des Eisenvitriols gegen strahlende Wärme, das, wie wir gleich sehen werden, für die gefärbten, wie für die ungefärbten Eisenoxydul-

---

1) Melloni, La thermochrôse **1.** p. 164 und 165. 1850.
2) R. Franz, Pogg. Ann. **94.** p. 337. 1855.
3) R. Franz, Pogg. Ann. **101.** p. 46. 1857.

salze charakteristisch ist, bisher keine Beobachtung geschenkt hat.

Es sei mir gestattet, im Folgenden einige Versuchsresultate anzuführen, die ich bei Prüfung der Diathermanität von Ferrosalzlösungen erhielt.

Die Eisenlösungen wurden in ein Gefäss mit planparallelen Wänden gebracht, deren Innenabstand 9,5 mm betrug. Als Wärmequelle diente ein Argandbrenner, als Messinstrument das Flächenbolometer.

Während das Gefäss mit Wasser gefüllt 12,2 Proc., mit Alaunlösung gefüllt 12,1 Proc. der strahlenden Wärme des Argendbrenners hindurchliess, liess eine in dieser Dicke so gut wie farblose Lösung von Eisen in verdünnter Orthophosphorsäure (56 g Fe in einem Liter enthaltend) nur 2,1 Proc. und die selbst in dickerer Schicht farblose Lösung von ameisensaurem Eisenoxydul (mit 2,1 Proc. Fe) — in demselben Gefäss untersucht — 6,1 Proc. der strahlenden Energie derselben Wärmequelle hindurch.

Diese beiden Salze zeichnen sich durch besonders geringe Färbung aus. Wenig gefärbte und kräftig absorbirende Lösungen kann man aber auch durch Auflösen der Eisenoxyduldoppelsalze, noch bequemer durch Ansäuern der einfachen Eisenoxydulsalze erhalten.

Aus der ersten Gruppe habe ich nur das im Handel überall im Zustande grosser Reinheit erhältliche Ferroammoniumsulfat in den Kreis meiner Untersuchung gezogen, aus der Gruppe der einfachen Eisenoxydulsalze aber ausser den zwei bereits genannten Salzen noch das Eisensulfat und das Eisenchlorür.

In der folgenden Tabelle ist die Diathermanität von Ferrosulfat mit jener von Eisenchlorür verglichen. Die Lösungen beider Salze enthalten einen kleinen Ueberschuss der zugehörigen Säuren, der auf die Wärmeabsorption ohne bemerkbaren Einfluss ist. Zum Vergleiche habe ich noch die Zahlen, welche ich für die Wärmedurchlässigkeit der Lösungen von Eisenchlorid, Eisenphospat und Ferroammoniumsulfat erhalten haben, daneben gestellt.

Dicke der Schicht 9,5 mm.

Gramm-molecüle in 1 l gelöst	Eisengehalt in Proc.	Durchgelassene Wärme in Procenten der totalen Strahlung				
		$Fe Cl_2$	$Fe SO_4$	$Fe SO_4$, $(NH_4)_2 SO_4$	$Fe(H_2 PO_4)_2$	$Fe Cl_3$
2	11,2	1,16	—	—	—	—
1	5,6	1,85	1,87	—	2,10	—
1/2	2,8	4,06	4,06	4,40	—	11,2
1/4	1,4	6,73	6,75	—	—	—
1/8	0,7	8,95	8,94	—	—	—
1/16	0,35	10,31	10,32	—	—	—
1/32	0,175	10,93	10,87	—	—	—
Dest. Wasser	0,0	12,2	12,2	—	—	—

Bemerkenswerth ist die grosse Uebereinstimmung der Zahlen für die Diathermanität der Lösungen mit gleichem Eisenoxydulgehalte.

Es scheint daraus hervorzugehen, dass die Wärmenbsorption nur von der Quantität der gelösten Eisen abhängig ist, nicht jedoch der Art der Säure, an welche das Metall gebunden ist, solange es sich als Oxydul in Lösung befindet. [1])

Ganz andere Werthe ergeben sich dagegen für Eisenoxydsalze. Wird z. B. durch Einleiten von Chlor in die Flüssigkeit des Eisenchlorür in Chlorid verwandelt, so erhält man eine dunkelgelb gefärbte Lösung, deren Absorption dunkler Wärmestrahlen sich wenig von der des Wassers unterscheidet.

In den folgenden zwei Tabellen möchte ich noch einige Werthe für die Wärmedurchlässigkeit derselben Lösungen für dieselbe Wärmequelle, nur in dickerer Schicht, zur Untersuchung gebracht, angeben.

Wärmequelle: Argandbrenner.
Dicke der untersuchten Schicht: 24,25 mm.

Eisengehalt in Proc.	Durchgelassene Wärme in Proc. der totalen Strahlung	
	$Fe Cl_2$	$Fe SO_4$
1,4 Proc. Fe	2,69	2,58
0,7	4,50	4,47
0,35	6,17	6,10
0,175	7,17	7,20
Reines Wasser	8,6	—

1) Geringere Werthe habe ich allerdings für die Wärmeabsorption von ameisensaurem und pyrophosphorsaurem Eisenoxydul bekommen.

Dicke der Schicht: 54,3 mm.

Eisengehalt in Proc.	Durchgelassene Wärme in Proc. der totalen Strahlung	
	Fe Cl_2	Fe SO_4
1,4 Proc. Fe	1,14	—
0,7	2,12	2,05
0,35	3,29	3,22
0,175	4,36	—
Reines Wasser	5,12	—

Bezüglich der praktischen Verwerthung der Eisenoxydulsalze für Zwecke der Wärmeabsorption sei noch bemerkt, dass die angesäuerten Lösungen von Eisenchlorür und Eisensulfat beinahe gleich gefärbt, sehr haltbar und leicht herzustellen sind, und dass eine Lösung von $^1/_{16}$ g Atom Eisen (0,35 Proc Fe) in 54 mm dicker Schicht bei Tageslicht farblos erscheint.

Physikalisches Institut der Universität Berlin.

8. *Ueber die Diathermanität einiger Gläser von bekannter Zusammensetzung; von Richard Zsigmondy.*

Dem Verhalten der wässerigen Lösungen von Thonerde und Eisenoxydul gegen strahlende Wärme ganz analog ist auch das Verhalten dieser Oxyde, wenn man dieselben in Glassubstanz löst. Während ein abnorm grosser Gehalt von Thonerde im Glase dessen Diathermanität wenig beeinflusst, macht sich schon ein ganz geringer Gehalt an Eisenoxydul durch bedeutende Erhöhung der Absorptionsfähigkeit des Glases für strahlende Wärme bemerkbar.

Aus der folgenden Tabelle II, welche zunächst die Diathermanität eisenfreier Gläser enthält, wird ersichtlich sein, dass, ebenso wie die Thonerde, auch einige andere farblose Oxyde nur geringen Einfluss auf die Wärmedurchlässigkeit der Gläser ausüben.

Die mit Ziffern bezeichneten Gläser, deren gütige und bereitwillige Uebersendung ich Hrn. Dr. O. Schott, Director des glastechnischen Laboratoriums zu Jena, verdanke, haben — soweit ich die Zahlen der Oeffentlichkeit übergeben darf — die in Tabelle I wiedergegebene chemische Zusammensetzung.

Tabelle I.

Bezeichnung des Glases	Na_2O	K_2O	Al_2O_3	SiO_2	ZnO	As_2O_5	Mn_2O_3	PbO
709	17	—	—	70,5	12,0	0,4	0,06	—
1118	16,0		—	67,06	3,6	0,25	0,09	13,0
161‴	26		12	64	—	—	—	—
164‴	28		17	55	—	—	—	—
694	8,5		—	44,23	—	0,3	0,07	46,9

Tabelle II.

Bezeichnung des Glases	Dicke des Glases in mm	Durchgelassene Wärme in Proc. der totalen Strahlung. Wärmequelle: Argandbrenner
709	7,7	63,14
1118	7,73	62,90
Spiegelglas	7,52	62,50
161‴	8,0	62,15
164‴	7,6	58,90
694	7,5	59,45
Schweres Baryt-Crown I	7,6	61,04
Schweres Baryt-Crown II	7,67	58,40

Das Spiegelglas war ein Natron-Kalk-Glas von normaler Zusammensetzung, das schwere Baryt-Crown enthielt ausser ganz bedeutenden Mengen Baryumoxyd noch Borsäure. Die beiden mit I und II bezeichneten Gläser sind gleich zusammengesetzt und unterscheiden sich nur durch die Färbung. Glas I erscheint farblos, Glas II hat einen schwachen Strich ins gelbliche, vermuthlich infolge eines ganz geringen Eisengehaltes. Glas 164‴ enthält kleine Verunreinigungen, Schlieren und Steinchen, die den für die Wärmedurchlässigkeit gefundenen Werth jedenfalls etwas unsicher machen.

Sieht man von den beiden letzten Gläsern ab, so wird ein Blick auf die Tabelle II zeigen, dass die Diathermanität der so verschieden zusammengesetzten Glassorten sich nur wenig von der des Spiegelglases unterscheidet. Es folgt daraus, dass weder Thonerde noch Bleioxyd, Zinkoxyd, Baryt oder Thonerde noch auch ein Ueberschuss von Alkalien oder das Fehlen eines Erdalkalis die Wärmeabsorption des Glases wesentlich beeinflussen, dass die Zusammensetzung der farblosen Glassubstanz also innerhalb bedeutender Grenzen schwanken kann, ohne dass diese Schwankungen sich bei Prüfung des Glases auf Wärmedurchlässigkeit in beträchtlichem Maasse bemerkbar machen würden.

Der Wärmedurchlässigkeit dieser eisenfreien Gläser möchte ich mir erlauben, die dreier eisenhaltiger Gläser gegenüberüberzustellen.

Tabelle III.

Bezeichnung des Glases	Dicke des Glases in mm	Durchgelassene Wärme in Proc. der totalen Strahlung. Wärmequelle: Argandbrenner	Zirkonlampe
Spiegelglas	7,52	62,5 Proc.	59,0 Proc.
Glas Nr. 21	7,65	20,97 "	20,8 "
Glas A	8,3	0,72 "	0,73 "
Glas B	8,5	0,0 "	—

Glas Nr. 21 war ein kalkfreies Thonerde-Natron-Glas mit 8 Proc. Thonerde, das durch etwas Eisen schwach bläulichgrün gefärbt war. Glas A, ein Kalk-Natron-Crownglas, enthielt etwa 1 Proc. Eisenoxydul und war blaugrün gefärbt; das grüne Glas B enthielt nahezu 2 Proc. Eisenoxydul (vielleicht einen kleinen Theil des Eisens auch als Oxyduloxyd, worauf seine Färbung schliessen lässt).

Im Glase A war die Diathermanität von etwa auf 60 Proc. auf 0,75 Proc. herabgedrückt worden durch Zusatz von 1 Proc. Eisenoxydul. Man ersieht hieraus, dass das Eisenoxydul, in Glas gelöst, die Wärmedurchlässigkeit in noch viel höherem Maasse beeinflusst, als in wässeriger Lösung; damit in Uebereinstimmung steht auch die intensivere Färbung, welche Eisenoxydul dem Glase ertheilt.

Dieses Verhalten des Eisenoxyduls lässt eine technische Verwendung der damit abgeschmolzenen Gläser zu, indem es ermöglicht, durchsichtige Schirme gegen strahlende Wärme aus Glas herzustellen.[1])

Aus dem Angeführten geht hervor, dass man zur Untersuchung der Diathermansie der Gläser nur vollkommene eisenoxydulfreie Probestücke anwenden darf, indem ein ganz geringer Eisengehalt die Resultate viel mehr beeinflussen kann, als bedeutende Schwankungen in der chemischen Zusammensetzung des Glases.

Andererseits wird die Frage, ob in einem gegebenen Glase Eisen als Oxydul oder Oxyd enthalten ist, durch Prüfung der Diathermanität vermuthlich leicht zu entscheiden

---

1) Ausführlicheres darüber in Dingler's polyt. Journ. 1893.

sein; man wird vorher nur feststellen müssen, in welcher Weise die Durchlässigkeit des Glases für strahlende Wärme durch Eisenoxyd beeinflusst wird. Dass die Absorption durch dieses Oxyd nur wenig erhöht wird, dafür sprach bereits ein Vorversuch.

Es liegt in meiner Absicht, das Verhalten des Eisens zum Glase später eingehender zu studiren und dann meine kurze Mittheilung noch nach mancher Richtung hin zu ergänzen.

Physikalisches Institut der Universität Berlin.

---

9. *Aequipotential- und Magnetkraftlinien;*
von E. v. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der math.-phys. Klasse der k. bayer. Akad. d. Wissensch., mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Ein homogener leitender Körper werde von einem electrischen Strome durchflossen, der in zwei Punkten seiner Oberfläche ein- und austritt. Jede Stromlinie oder „Stromröhre“ ist, wie jeder lineare Leiter, von geschlossenen Magnetkraftlinien umringt, welche die Stromröhre, auf deren Axe ihre Ebenen überal senkrecht stehen, alle in demselben Sinne gleichsam umfliessen. Auf einer Fläche gleichen Potentials, welche sämmtliche Stromröhren rechtwinkelig schneidet, grenzen die elementaren Magnetströmchen benachbarter Stromröhren unmittelbar aneinander und heben sich durch die ganze Aequipotentialfläche gegenseitig ganz oder theilweise auf, ausgenommen da, wo die Aequipotentialfläche die Oberfläche des leitenden Körpers längs einer *Aequipotentiallinie* rechtwinkelig durchschneidet. Hier fliessen sie zu einem einzigen Strome magnetischer Kraft zusammen, welcher den Rand der Aequipotentialfläche in demselben Sinne wie jene elementaren Magnetströmchen umkreist. Jede Aequipotentiallinie ist daher eine auf der Oberfläche des Leiters verlaufende in sich zurückkehrende *Magnetkraftlinie.* Diese Magnetkraftlinien, also auch die Aequipotentiallinien, lassen sich, wie ich bereits gezeigt habe[1]), auf einer durchströmten ebenen Platte durch aufgestreute Eisenfeile sichtbar machen.

Wir nennen *Stromfläche* jede Fläche, welche durch eine stetige Aufeinanderfolge von Stromlinien gebildet wird. Durch jede Stromlinie lassen sich alsdann unendlich viele Stromflächen legen, welche alle auf den Aequipotentialflächen senkrecht stehen und sämmtlich durch die beiden Electrodenpunkte hindurchgehen. Aus dieser unendlichmal unendlichen Fülle von Stromflächen kann man nun durch Festsetzung gewisser

---

1) Lommel, Sitzungsber. **22.** p. 371. 1892; Wied. Ann. **38.** p. 462. 1893.

Merkmale einzelne Schaaren herausheben, welche für die weitere Betrachtung besonders bequem sind, wie z. B. diejenige Schaar, welche die Körperoberfläche, die ja stets eine Stromfläche ist, in sich enthält und sich beiderseits an sie anschliesst. Eine zweite Schaar bilden die Stromflächen, welche sich in der geraden Verbindungslinie der Electroden (die eine Stromlinie ist, und auch dann als solche aufzufassen ist, wenn sie ganz oder theilweise ausserhalb der leitenden Körpermasse verläuft) schneiden. Je eine Fläche der einen und eine Fläche der anderen Schaar schneiden sich in einer Stromlinie, und die beiden Schaaren von Flächen zerlegen den Raum in Stromröhren.

Wie einerseits die Körperoberfläche stets eine Stromfläche ist, so kann andererseits jede Stromfläche als Begrenzungsfläche des Leiters gewählt werden. Man kann daher durch Schnitte, die längs Stromflächen geführt werden, Stücke des Körpers abtragen, oder ihm von Stromflächen begrenzte Stücke anfügen, ohne dass in dem übrigbleibenden oder in den neu hinzugekommenen Körpertheilen die Gestalt und Lage der Aequipotentialflächen und der Stromlinien eine Aenderung erfährt. Kennt man daher für irgend einen Körper diese Flächen und Linien, so kennt man sie auch für eine Unzahl von Körperformen, die sich auf die angegebene Weise aus dem gegebenen Körper bilden lassen.

Betrachten wir z. B. den unendlichen Raum als mit leitender Masse erfüllt, so ist unmittelbar ersichtlich, dass in diesem allseitig unbegrenzten Leiter die Aequipotentialflächen Rotationsflächen um die Verbindungslinie der Electroden als Axe, und sämmtliche Meridianebenen Stromflächen sind. In jeder Meridianebene bieten die Aequipotential- und Stromlinien ein ähnliches Bild dar, wie die beiden Systeme zu einander rechtwinkeliger Kreise in Fig. 1 p. 542. Nur sind die Aequipotentiallinien in diesem Falle nicht Kreise, sondern Curven, welche der Gleichung $1/r - 1/r' = \text{Const.}$ genügen (wenn r und r' die Entfernungen eines Punktes der Ebene von den Electrodenpunkten A und B bezeichnen), und die Stromlinien sind die dazu senkrechten Trajectorien. Lässt man beide Systeme von Curven um die Axe AB rotiren, so erzeugen die ersteren die Aequipotentialflächen, die letzteren eine Schaar von Stromflächen,

welche mit den Meridianebenen zusammen den Raum in Stromröhren zerschneiden. Jede dieser Stromflächen kann als Oberfläche eines Körpers angenommen werden, den sie aus der leitenden Masse herausschneidet und gegen den übrigen nun als nichtleitend anzunehmenden Raum abgrenzt. Aus jedem so entstandenen Körper kann durch zwei Meridianebenen eine Schnitze herausgeschnitten oder es kann der Körper durch eine Meridianebene halbirt werden. Man kann ferner innerhalb eines solchen Körpers durch eine zweite jener Stromflächen Hohlräume bilden und so z. B. schalenförmige Körper erhalten, überhaupt die mannigfaltigsten Körperformen, soweit sich deren Oberflächen mittels der von den gegebenen Aequipotentialflächen bedingten Stromlinien bilden lassen.

Will man dagegen die Strömung in einem gegebenen leitenden Körper kennen lernen, so hat man zunächst die zugehörigen Aequipotentialflächen zu finden, welche die Oberfläche des Körpers, die ja stets eine Stromfläche ist, rechtwinkelig schneiden. Denkt man sich den Körper um die Verbindungslinie AB der beiden Electroden gedreht, so wird, da seine Lage in Beziehung zu den Electroden die nämliche bleibt, die Strömung nicht geändert. Bei dieser Drehung beschreibt jeder Punkt einer Aequipotentiallinie, indem er auf der zugehörigen Aequipotentialfläche bleibt, einen Parallelkreis um die Drehungsaxe AB. Die Aequipotentialflächen sind also auch in diesem Falle Rotationsflächen um diese Axe.

Betrachten wir z. B. eine Kugel mit beliebig auf ihrer Oberfläche gelegenen Electrodenpunkten A und B. Man weiss, dass jeder Kreis, welcher durch A und B geht, von allen Kreisen orthogonal geschnitten wird, deren Mittelpunkte in die Verlängerung der Geraden AB fallen, und welche diese Gerade in Punkten schneiden, die zu den Punkten A und B harmonisch liegen ($AE:AF = BE:BF$, Fig. 2; in Fig. 1 stellen bekanntlich jene Kreise, welche durch die Electrodenpunkte A und B gehen, die Stromlinien, diese Kreise die Aequipotentiallinien für eine unbegrenzte ebene Platte dar). Dreht sich nun das erstere System von Kreisen um die in der Mitte von AB errichtete Senkrechte CD, so erzeugt jeder Kreis eine durch A und B gehende Kugelfläche, welche von allen Kugeln, die durch Rotation des zweiten Systems von

Kreisen um AB entstehen, rechtwinkelig geschnitten wird. Lässt man nämlich zwei beliebige Kreise der beiden Systeme, die sich in P und Q (Fig. 2) rechtwinkelig schneiden, um die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte O und M rotiren, so erzeugen sie die nämlichen Kugelflächen, als wenn man den Kreis M für sich um AB, den andern O für sich um CD rotiren lässt, und man sieht, dass die beiden Kugeln längs der Kreislinie, in welcher sie sich schneiden, ringsum aufeinander senkrecht stehen. Die Kugelflächen des zweiten Systems sind daher die zu jeder Kugel des ersten Systems gehörigen Aequipotentialflächen, und jede Kugelfläche, welche durch die Electroden A und B geht, ist eine zu den aequipotentialen Kugeln gehörige Stromfläche und kann daher als

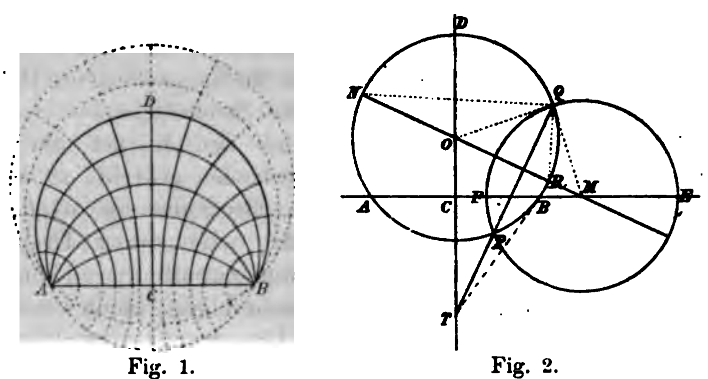


Fig. 1. Fig. 2.

Begrenzungsfläche eines leitenden Körpers angenommen werden. Hiernach ist aber die Frage nach den Aequipotential- und Stromlinien auf einer Kugelfläche mit zwei beliebig auf ihr angebrachten Electroden ohne Rechnung beantwortet. Die Linien gleichen Potentials ergeben sich nämlich als Kreise, deren Ebenen sich alle in der Durchschnittslinie der in den Electrodenpunkten an die Kugel gelegten Tangentialebenen schneiden. Denn legt man an den Kreis O (Fig. 2) im Punkte B eine Tangente, welche die verlängerte CD in T schneidet, zieht durch T eine beliebige Secante TPQ, fällt auf diese von O aus eine Senkrechte, welche den Kreis in N und R, die Verlängerung von AB in M trifft und verbindet M und O mit Q, so ist. wenn man den Winkel MOQ mit φ bezeichnet, der Winkel $OQP = 90^0 - \varphi$ und der Winkel $OMQ =$ W. $ORQ -$ W;

$ONQ = \frac{1}{2}(180^0 - \varphi) - \frac{1}{2}\varphi = 90^0 - \varphi$, folglich der Winkel $MQP = \varphi$. Es ist demnach Winkel $MQO =$ W. $OQP +$ W, $MQP = 90^0 - \varphi + \varphi = 90^0$, d. h. jeder von einem so bestimmten Punkt M der Geraden AB mit dem Radius MQ beschriebene Kreis schneidet den Kreis O in Q (und P) rechtwinkelig, nach welchem Punkte Q des Kreisumfanges von T aus die Secante TQ auch gezogen wurde. Umgekehrt müssen alle durch die Schnittpunkte P und Q des Kreises O mit jedem der zu ihm orthogonalen Kreise, deren Mittelpunkte auf der verlängerten AB liegen, gezogenen Secanten durch den Punkt T gehen. Es müssen demnach auch im Raume alle Ebenen, welche durch diese Secanten senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt werden und die Kreise enthalten, längs welchen die Kugel O von der Schaar der zu ihr orthogonalen Kugeln M geschnitten wird, durch die in T auf der Ebene der Figur errichtete Senkrechte gehen, in welcher sich die in A und B an die Kugel O gelegten Tangentialebenen begegnen. Auf dasselbe System von Aequipotentiallinien führt natürlich auch die analytische Behandlung der Aufgabe.[1]) — Die Stromlinien auf unserer Kugelfläche sind diejenigen Kreise, in welche eine durch die Verbindungsgrade der Electroden gehende Schaar von Ebenen die Kugelfläche schneidet. Da diese Ebenen Stromflächen sind, so kennt man auch die Strömung für jedes durch eine solche Ebene von der Kugel abgetrennte Segment, sowie für jede durch zwei solche Ebenen aus ihr herausgeschnittene Kugelschnitze. Nimmt man zur Begrenzung noch die kugelförmigen Stromflächen hinzu, die sich alle in dem Kreise schneiden, der in der durch AB senkrecht zu CD gelegten Ebene, die ebenfalls eine Stromfläche ist, um C mit dem halben Electrodenabstand als Radius beschrieben ist, so lassen sich schalenförmige Körper bilden, die innen und aussen durch Kugelflächen begrenzt sind und für welche ebenfalls der Verlauf ihrer Strom- und Aequipotentiallinien bekannt ist.

Aehnliche Ueberlegungen zeigen, dass bei einem geraden Kreiscylinder mit Electroden an den Endpunkten seiner Axe

1) Boltzmann, Sitzungsber. d. Wiener Akad., math.-naturw. Klasse. **52.** p. 214. 1865.

auf der Mantelfläche die Erzeugenden des Cylinders Stromlinien, die Parallelkreise Aequipotentiallinien sind, während auf den kreisförmigen Stirnflächen die Aequipotentiallinien von den Electrodenpunkten aus beschriebene concentrische Kreise, die Stromlinien Radien derselben sind. Von dem Verlaufe der Aequipotentialflächen im Innern des Cylinders erhält man, wenn auch nur empirisch, eine Vorstellung durch Aufstreuen von Eisenfeilen auf die Ebene eines durch die beiden Electroden gelegten Schnittes. Die Feilspäne ordnen sich auf dieser Ebene in Linien von der in Fig. 3 angedeuteten Gestalt. Diese Linien stehen überall senkrecht zum Umfang des Rechteckes, nur die durch die Ecken gehenden machen hiervon eine, jedoch nur scheinbare, Ausnahme. Bei physischen Platten oder Körpern gibt es nämlich keine mathematisch scharfen Ecken und Kanten, sondern dieselben sind in Wirklickeit mehr oder weniger abgerundet, und die Aequipotentiallinien stehen zu diesen Abrundungen senkrecht.

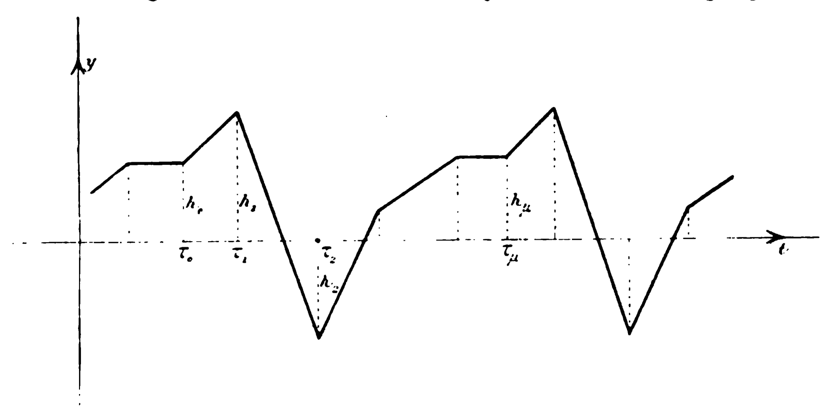


Fig. 3.

---

10. *Zerlegung geradliniger Schwingungsfiguren; von O. Krigar-Menzel.*

Unter den graphischen Figuren, welche die periodischen Bewegungen einzelner Punkte von gestrichenen und gezupften Saiten darstellen, spielen diejenigen eine wichtige Rolle, welche aus geradlinigen Strecken verschiedener Neigung zusammengesetzt sind; diese sind nämlich einer einfachen Ausmessung und analytischen Darstellung directer zugänglich, als die krummlinigen. Es kommt bei der Analyse solcher Schwingungs-



figuren meist darauf an, dieselben in eine Superposition von einfachen Sinuswellen, entsprechend dem Grundton und dessen harmonischen Obertönen, aufzulösen. Mathematisch wird diese Aufgabe durch die Darstellung der vorgeschrieben periodischen Function in Form einer Fourier'schen Reihe gelöst.

Da ich beim Studium der Saitenbewegungen oft in die Nothwendigkeit solcher Entwickelungen versetzt bin, habe ich mir eine stets gebrauchsfertige Formel hergestellt, welche vielleicht auch anderen Rechnern nützlich sein kann, und deshalb hier in Kürze abgeleitet werden soll.

Gegeben ist ein periodischer Linienzug, dessen Periode aus μ unter willkürlichen Winkeln aneinander gesetzten geradlinigen Strecken besteht, wie ihn obenstehende Figur zeigt.

Die Form dieser gebrochenen Linien können wir dadurch bestimmen, dass wir die Coordinaten sämmtlicher Eckpunkte im Bereiche einer Periode messen und angeben. Dieselben seien:

Abscissen: τ_0 τ_1 τ_2 . . . . τ_μ
Ordinaten: h_0 h_1 h_2 . . . . . . h_μ.

Das ganze Intervall $\tau_\mu - \tau_0 = T$ ist die Länge einer Periode; wegen der continuirlichen Fortsetzung des Linienzuges muss $h_\mu = h_0$ sein.

Bezeichnen wir die Abscissen mit t, die Ordinaten mit y, so ist die Function $y(t)$, welche durch diesen Linienzug graphisch dargestellt wird, in den verschiedenen Theilintervallen durch folgende analytische Ausdrücke gegeben.

Für $\tau_0 < t < \tau_1$ ist

$$y = \frac{h_0 \tau_1 - h_1 \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} + \frac{h_1 - h_0}{\tau_1 - \tau_0} . t$$

. . . .

Für $\tau_b < t < \tau_{b+1}$ ist

$$y = \frac{h_b \tau_{b+1} - h_{b+1} \tau_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} + \frac{h_{b+1} - h_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} . t$$

$$(b = 1, 2, \ldots \mu - 1).$$

Die bekannte Form der Entwickelung einer Function y von der Periode T in eine trigonometrische Reihe ist:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} A_\mathfrak{a} \cos 2 \mathfrak{a} \pi \frac{t}{T} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} B_\mathfrak{a} \sin 2 \mathfrak{a} \pi \frac{t}{T} .$$

Dabei sind die Coefficienten bestimmt durch die Gleichungen:

$$A_\mathfrak{a} = \frac{2}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_\mu} y . \cos 2 \mathfrak{a} \pi \frac{t}{T} . dt$$

und

$$B_\mathfrak{a} = \frac{2}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_\mu} y . \sin 2 \mathfrak{a} \pi \frac{t}{T} . dt.$$

Diese Integrale zerfallen, entsprechend den μ geradlinigen Strecken, in μ Summanden mit den Grenzen τ_0, τ_1, τ_2 . . . τ_μ.

Wir wollen die von τ_b bis τ_{b+1} reichenden Antheile bilden und durch $A_a^{(b)}$ und $B_a^{(b)}$ bezeichnen. Es ist dann in einer ohne weiteres verständlichen kurzen Schreibart:

$$\begin{Bmatrix} A_a^{(b)} \\ B_a^{(b)} \end{Bmatrix} = \frac{2}{T} \frac{h_b \tau_{b+1} - h_{b+1} \tau_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \int\limits_{\tau_b}^{\tau_{b+1}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{t}{T} dt$$

$$+ \frac{2}{T} \frac{h_{b+1} - h_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \int\limits_{\tau_b}^{\tau_{b+1}} t \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{t}{T} dt.$$

Die auftretenden Integrale sind leicht auszurechnen. Dabei tritt im ersten Integral und in dem durch partielle Ausführung des zweiten gewonnenen Antheil der Factor $1/a$ auf. Um diese Glieder haben wir uns nicht zu bekümmern, denn dieselben müssen sich doch bei der Summirung über alle Theilintervalle fortheben; hat doch Stokes[1]) bewiesen, dass die Coefficienten bei Entwickelung einer Function, wie die unserige, die selbst keine Sprünge hat, deren erste Differentialquotienten aber unstetig sind, proportional $1/a^2$ fortschreiten.

Einen dementsprechenden Antheil liefert nur das zweite Integral nach Ausführung der partiellen Integration. Dieser Antheil lautet:

$$\frac{h_{b+1} - h_b}{\tau_{b+1} - \tau_b} \cdot \frac{T}{2 a^2 \pi^2} \left[\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_{b+1}}{T} - \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_b}{T} \right].$$

Der Factor $(h_{b+1} - h_b)/(\tau_{b+1} - \tau_b)$ stellt die Tangente der Neigung der ausgewählten Strecke dar und werde deshalb durch $\operatorname{tg} \vartheta_b^{b+1}$ bezeichnet.

Bilden wir nun die Summe über sämmtliche Theilintervalle von $b = 0$ bis $b = \mu - 1$, so erhalten wir als Resulat die Formel:

$$\begin{Bmatrix} A_a \\ B_a \end{Bmatrix} = \frac{T}{2 a^2 \pi^2} \left[\operatorname{tg} \vartheta_0^1 \cdot \left(\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_1}{T} - \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_0}{T} \right) \right.$$

$$+ \operatorname{tg} \vartheta_1^2 \cdot \left(\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_2}{T} - \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_1}{T} \right) + \cdots$$

$$\left. + \operatorname{tg} \vartheta_{\mu-1}^{\mu} \left(\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_\mu}{T} - \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2 a \pi \frac{\tau_{\mu-1}}{T} \right) \right].$$

1) Cambridge Transact. 8. p. 533—584.

Bedenkt man, dass die trigonometrischen Functionen v $2\pi\tau^0/T$ und von $2\pi\tau_\mu/T\,(=2\pi+2\pi\tau_0/T)$ identisch sind, kann man die Ausdrücke auch in folgender Form schreibe

$$\begin{Bmatrix} A_a \\ B_a \end{Bmatrix} = \frac{T}{2\,a^2\pi^2}\Big[(\operatorname{tg}\vartheta^{\mu}_{\mu-1} - \operatorname{tg}\vartheta^{1}_{0}) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2\,a\,\pi\,\frac{\tau_0}{T}$$

$$+ (\operatorname{tg}\vartheta^{1}_{0} - \operatorname{tg}\vartheta^{2}_{1}) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2\,a\,\pi\,\frac{\tau_1}{T} + \cdots$$

$$+ (\operatorname{tg}\vartheta^{\mu-1}_{\mu-2} - \operatorname{tg}\vartheta^{\mu}_{\mu-1}) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} 2\,a\,\pi\,\frac{\tau_{\mu-1}}{T}\Big].$$

(Diese Formeln passen nicht auf das unperiodische Glied d Reihenentwickelung; dieses ist vielmehr:

$$\frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{\tau_0}^{\tau_\mu} y \, . \, d\,t.$$

und stellt den Mittelwerth der Erhebungen der Figur über d t-Axe dar. Dasselbe ist meist ohne Interesse und kann dur geeignete Lage der t-Axe stets gleich Null gemacht werde.

Hiernach ist es leicht, für jede aus geradlinigen Streck zusammengesetzte und ausgemessene Schwingungsfigur d Coefficienten der Reihe: das sind die Amplituden der Parti schwingungen, zu berechnen. Häufig kann man durch geeigne Wahl des Anfangspunktes τ_0 die Zerlegung noch so ve einfachen, dass entweder alle $A_a = 0$ werden (kehrgleic Figuren), oder alle $B_a = 0$ werden (spiegelgleiche Figure Der Zeitpunkt τ_0 braucht keinem wahren Knick der Figur entsprechen, denn die Möglichkeit $\operatorname{tg}\vartheta^{\mu}_{\mu-1} = \operatorname{tg}\vartheta^{1}_{0}$ ist in unser Rechnung nicht ausgeschlossen.

Berlin, Mai 1893.

10. *Hertz'sche Versuche in objectiver Darstellung und der Hochspannungsaccumulator;* *von L. Zehnder.*

Im vergangenen Jahre zeigte ich in diesen Annalen[1]), wie sich die Hertz'schen Versuche mit Strahlen electrischer Kraft objectiv sehr schön darstellen lassen. Die Methode der objectiven Darstellung mit Hülfe eines Hochspannungsaccumulators (von 600 Planté-Elementen) hat unzweifelhaft allen Physikern, welche, durch Freiburg hindurchreisend, die Versuche gesehen haben, ganz ausnehmend wohl gefallen; weil aber auch von anderen Seiten her zu solchen Versuchen dienende Entladungsröhren vom hiesigen Glasbläser bezogen worden sind, so dass diese Methode in der That Anklang gefunden zu haben scheint, so halte ich es nicht für überflüssig, meine seitherigen Erfahrungen bei der Ausführung solcher Versuche in Nachfolgendem niederzulegen.[2])

Zuerst will ich bemerken, dass wahrscheinlich alle Hertz'schen Versuche mit electrischen Schwingungen, bei welchen in der Funkenstrecke eines secundären Leiters Fünkchen sichtbar werden oder nicht, je nach Wahl der Versuchsanordnung, auch nach den von mir veröffentlichten Methoden objectiv dargestellt werden können. Ich habe mich darauf beschränkt, mit einem Secundärleiter, dessen beide aus 0,5 mm dickem Blech gebildete Hälften je 27 cm lang und 5 cm breit waren[3]), die Reflexion des aus dem Primärspiegel austretenden Strahles im Luftraume an ebener Wand für objective Darstellung einzurichten, bei welcher ich ausser dem an der Wand liegenden noch zwei andere Knoten nachzuweisen im Stande war. Ganz besonders schön aber präsentirt sich die

1) Zehnder, Wied. Ann. **47.** p. 77. 1892.

2) Bei Anlass der 65. deutschen Naturforscherversammlung in Nürnberg gedenke ich solche Hertz'sche Versuche in objectiver Darstellung vorzuweisen.

3) Vergl. Klemenčič und Czermak, Wien. Sitz.-Ber. **101.** (IIa.) p. 935. 1892.

von Hrn. Boltzmann zuerst angegebene Versuchsanordnung[1]), nach welcher ein Strahl electrischer Kraft durch zwei plane Spiegel *A* und *B* (Fig. 1) getheilt und in den secundären Spiegel hinein reflectirt wird. Im letzteren kommen somit zwei verschiedene von einer Quelle stammende Strahlen an, welche im Allgemeinen, je nach dem ihnen ertheilten Gangunterschied, einen Phasenunterschied besitzen und demzufolge mit einander interferiren. Der Versuch bildet also in gewisser Beziehung ein Analogon zu dem Fresnel'schen Spiegelversuche. Ohne Mühe gelang es mir nun, bei Parallelverschiebung des Spiegels *B* von vorn nach hinten oder umgekehrt, am feststehenden Spiegel *A* vorbei, in der Entladungsröhre acht Mal die Accumulatorenentladung zum Erscheinen, sieben Mal dieselbe zum Verschwinden zu bringen, d. h.

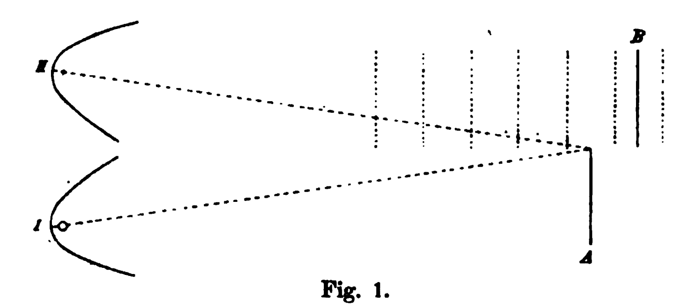


Fig. 1.

7 Minima der Interferenzwirkungen auf die Focallinie des secundären Spiegels nachzuweisen, den in Fig. 1 punktirt eingezeichneten Spiegelstellungen entsprechend. Möglicherweise hätte ich noch weitere solche Minima erhalten können, wenn der damals zur Verfügung stehende Raum grössere Abstände der reflectirenden Blechtafeln von den parabolischen Spiegeln zugelassen hätte.

Ganz hübsch ist noch der Versuch, den Secundärleiter (mit der Entladungsröhre) auf separatem Stativ zu befestigen und ihn mit diesem im Inneren des Secundärspiegels zu verschieben. Man erkennt sofort, dass die Entladungsröhre auf-

1) Dieselbe wurde von den Hrn. Klemenčič und Czermak (l. c.) veröffentlicht, welche mit ihr eine Reihe von sehr interessanten Untersuchungen ausgeführt haben.

leuchtet, wenn der Secundärleiter in der Fokallinie dieses Spiegels, dass sie dunkel bleibt, wenn derselbe ausserhalb jener Fokallinie aufgestellt wird. Indessen scheinen sich doch vor einem parabolischen Cylinderspiegel ähnlich wie vor einer ebenen reflectirenden Wand in geringem Masse noch stehende Wellen mit Knoten und Bäuchen auszubilden; wenigstens leuchtete meine Röhre noch an einer zweiten Stelle im Inneren des Secundärspiegels auf, welche Stelle dem zweiten vor der Wand liegenden Bauche stehender Wellen entsprochen haben mag.

Die Vorweisung der Hertz'schen Versuche ist vielleicht hie und da, ganz besonders in einem stark gefüllten Auditorium, nicht recht gelungen, wenn dieselben vom Vortragenden noch so gut vorbereitet waren. Ein solches Misslingen kann die im Auditorium während eines längeren Vortrages stark zunehmende Luftfeuchtigkeit herbeiführen, welche hauptsächlich die Wirksamkeit der Primärfunken zu beeinträchtigen vermag. Man erkennt dies daran, dass die Primärfunken das kräftige scharfe Knallen verlieren. Nun lassen sich zwar die Hertz'schen Versuche oft noch mit den schwächer wirksamen Funken anstellen, wenn man nur die Spiegel einander genügend nähert; war sodann der häufig schliessende Deprez-Interruptor eine Zeit lang in Thätigkeit, so verschwindet der Wasserbeschlag auf dem Primärleiter zum Theil und es kehrt die frühere Wirksamkeit wieder zurück. Zweckmässiger ist indessen das Verfahren, welches ich jüngst bei einer Demonstration der Versuche angewandt habe: die primären Leiterhälften über einem Bunsenbrenner unmittelbar vor Beginn der Versuche genügend zu erwärmen und dadurch die Feuchtigkeit zu vertreiben. In neuester Zeit umgab ich den Primärleiter mit einem etwas weiten rings geschlossenen Pappdeckelgehäuse, in welches ich vor Beginn der Versuche ein kleines Gefäss mit concentrirter Schwefelsäure stellte; nach vorn besitzt dies Gehäuse ein Glasfenster, durch welches die Primärfunken beobachtet werden können. Durch diese Vorrichtung wird vermuthlich das Misslingen wegen der atmosphärischen Feuchtigkeit ebenfalls gründlich vermieden sein.[1])

---

1) Vergl. auch Sarasin und De la Rive, Arch. de Genève **28.** p. 306. 1892 (Primärfunken in Oel statt in Luft).

Von Zeit zu Zeit tritt, wie schon von Hrn. Hertz erwähnt worden ist, ein plötzliches Unwirksamwerden der Primärfunken auf, was an dem Aufhören des scharfen Knallens wahrgenommen wird; nach einiger Zeit hört diese Periode des Unwirksamseins von selbst wieder auf, oft aber dauert sie sehr lange. Ich habe bis dahin die Wirksamkeit stets sofort wieder herstellen können, indem ich mit der Hand oder mit einem Pappeblatt während des Functionirens des Deprez-Interruptors in unmittelbarer Nähe der Primärfunken kräftig fächerte. Dadurch nämlich, dass ein solches Unwirksamwerden stets vorübergehend eintrat, wenn ich die gegen einander gekehrten Stellen der primären Leiterhälften — an welchen die Priestley'schen Figuren sich bilden — mit gewissen Substanzen, beispielsweise mit einem zur Einstellung dienenden Holzkeile, berührt hatte, kam ich auf den Gedanken, es seien möglicherweise kleine Spuren von Verunreinigungen an jenem Unwirksamwerden der Primärfunken schuld; solche Fremdkörperchen werden offenbar während des primären Funkenspieles electrisirt, zwischen den Electroden hin- und hergeworfen, und sie können den Raum, in welchem die Primärfunken zu Stande kommen, nicht mehr so leicht verlassen, weil ihnen kaum ein Impuls dazu gegeben wird; ausser etwa, wenn sie im electrischen Funken zum Verdampfen gebracht werden. Erzeugt man aber im betreffenden Raume eine kräftige Luftströmung, so wird dieselbe jene Fremdkörperchen zu entfernen im Stande sein.

Ein häufiges Putzen des Primärleiters mag für quantitative Versuche sehr wichtig sein; bei meinen qualitativen dagegen hielt ich es nicht für nöthig, denn ohne solches Putzen habe ich nicht nur Stunden, sondern Tage lang genügende Wirkungen erzielt, obgleich meine Primärfunken nicht zwischen Platinelectroden (nach Hrn. Klemenčič) entstanden.

Die schönsten Ergebnisse, über die ich in meiner oben erwähnten Arbeit berichtete, habe ich mit der letzten der von mir selbst hergestellten Entladungsröhren erhalten. Bevor ich aber jene Arbeit niederschrieb, liess ich durch den Glasbläser nach dem Muster meiner Röhre eine andere solche ausführen, pumpte dieselbe aus, führte Natrium hinein und erhielt mit dieser Röhre ohne weiteres beinahe vollkommen die-

selbe Empfindlichkeit, wie mit meiner ursprünglichen Entladungsröhre, und Entladungen in ganz ähnlichem geschichtetem Lichte. Ich hielt mich darnach für berechtigt, jene Arbeit so zu publiciren, wie es geschehen ist, indem ich glaubte, der Fabrikation der Röhren durch den Glasbläser ständen nun keine Schwierigkeiten mehr im Wege. Indessen hatte ich mich getäuscht. Als Bestellungen auf solche Entladungsröhren bei Hrn. Kramer einliefen, wollte die Herstellung derselben nicht mehr gelingen. Erst nach langem Suchen erkannte ich, dass mehr oder weniger zufällige Erweiterungen der von mir selbst geblasenen Röhren, welche der Glasbläser als unnöthig weggelassen hatte, bei den früheren Röhren doch von wesentlicher Bedeutung sein mussten. Ich fand nämlich, dass der Widerstand, welcher der Glimmentladung entgegengesetzt wird, für die Hertz'schen Electroden ein möglichst geringer, für die beiden zur Accumulatorenentladung dienenden Hauptelectroden dagegen ein möglichst grosser sein müsse. Dazu kommt andererseits für die Hertz'schen Electroden die Bedingung, dass dieselben in sehr kleinem Abstande von einander stehen müssen; und endlich kann der Abstand der beiden Hauptelectroden nicht grösser oder der Rohrdurchmesser nicht kleiner gewählt werden, als dass die verfügbare Accumulatorenbatterie noch die Entladung zu Stande kommen lässt. Zur Erfüllung aller dieser Bedingungen habe ich Röhren von 7 mm lichtem Durchmesser verwenden und da, wo die Electroden eingeschmolzen sind, Kugeln von passender Weite anblasen lassen.

Während ich mit solchen von mir hergestellten Röhren nicht nur die für die Versuche gewünschte Empfindlichkeit, sondern auch öfters, so wie früher, schön geschichtetes Licht erhielt, ist dies letztere dem Glasbläser leider noch bei keiner einzigen Röhre gelungen. Seine Röhren lassen sich für die Versuche sehr gut verwenden; in letzter Zeit hat derselbe etwa acht Röhren nach einander fertiggestellt, ohne dass eine einzige derselben sich als untauglich erwiesen hätte; dieselben leuchten sogar zum Theil viel heller, als meine Röhren: aber die Schichtung zeigen sie nicht, und trotz vielfacher lange andauernder Bemühungen habe ich bis jetzt den Grund des Ausbleibens der Schichtung bei seinen Röhren nicht herausfinden können.

Die vom Glasbläser bis dahin gelieferten Entladungsröhren zeigen noch eine andere Eigenthümlichkeit: Regulirt man die zugeschalteten Widerstände so, dass beim Einsetzen der Primärfunken die Accumulatorenentladung in der Röhre gleichfalls einsetzt, bei der Unterbrechung der Primärfunken die Entladungsröhre wieder zu leuchten aufhört, so sind bei einzelnen Röhren die passenden Widerstände ziemlich sorgfältig aufzusuchen; und manchmal ist auch das dabei erhaltene Glimmlicht kein sehr helles. Will man nun aber mit der Entladungsröhre die Hertz'schen Versuche selber ausführen, indem man den das Inductorium speisenden Strom bleibend schliesst und also den Deprez-Interruptor beständig spielen lässt, so genügt eine weit rohere Einstellung der zugeschalteten Widerstände, und das Licht der Entladungsröhre kann bedeutend heller gemacht werden als zuvor, ohne dass diese ihre grosse Empfindlichkeit, z. B. gegen das Eintreten des Experimentirenden in den Strahl, verlöre. Demnach reagiren diese Entladungsröhren weit empfindlicher auf Aenderungen, welche an dem vom Primärspiegel ausgehenden Strahl electrischer Kraft durch Hineinstellen von Leitern in denselben vorgenommen werden, als auf das völlige Verschwinden dieses Strahles durch *bleibende* Unterbrechung des primären Funkenspiels, welch' letztere bei meinen Versuchen nicht durch den Deprez-Interruptor, vielmehr durch einen besonderen Quecksilberunterbrecher besorgt wurde.

Die erste von mir mit Natriumeinführung hergestellte Entladungsröhre hat nach langer Zeit nicht mehr richtig functioniren wollen, möglicherweise, weil ich bei meinen Versuchen häufig unabsichtlich directe kräftige Entladungen des Ruhmkorff's durch dieselbe hatte hindurchgehen lassen, bei welchen Entladungen die Röhre ihrer ganzen Länge nach hell aufleuchtete. Durch Umwechseln der Hauptelectroden, dadurch also, dass ich die frühere Anode der Entladungsröhre zur Kathode machte und umgekehrt, erhielt die Röhre ihre frühere Wirksamkeit wieder. Aus dieser und aus den oben mitgetheilten Eigenthümlichkeiten solcher Entladungsröhren geht hervor, dass bei denselben noch manche dunkle Punkte sich befinden, die aufzuklären mir bis dahin nicht gelungen ist.

In meiner mehrfach erwähnten früheren Arbeit habe ich eine Methode der objectiven Darstellung Hertz'scher Versuche ohne Verwendung eines Hochspannungsaccumulators angegeben. Zum Abnehmen eines den Strom dieses Accumulators dort ersetzenden Zweigstromes vom Ruhmkorff verwende man indessen statt der damals vorgeschlagenen Spitze bez. statt eines Stanniolblattes einen einfachen Draht [1]), den man auf die Länge von einigen Decimetern dem einen Zuleitungsdrahte des Hertz'schen Primärleiters parallel legt (Fig. 2). Man erhält in dieser Weise weit kräftigere Zweigströme, ohne jenen Draht der Ruhmkorffleitung so sehr nähern zu müssen, dass man directe Entladungen des Ruhmkorffs nach demselben zu befürchten braucht, was immer für die Entladungsröhre nachtheilig wäre. Vorsichtshalber habe ich jenen Draht in eine dickwandige Glasröhre *G* eingeschlossen, um jedes Funkenüberschlagen möglichst zu verhindern. Erwähnenswerth ist vielleicht noch, dass auch diese Methode objectiver Darstellung *ohne* den Hochspannungsaccumulator nicht einen absolut verdunkelten Raum notwendig voraussetzt, vielmehr gelingt die Darstellung in einem nur so stark verdunkelten Raume, dass in demselben alle Manipulationen des Experimentirenden eben noch gut zu sehen sind.

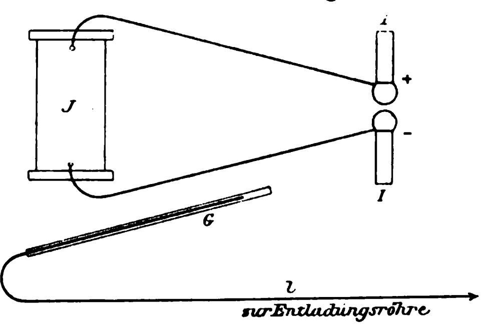


Fig. 2.

Eine vom Glasbläser bezogene Entladungsröhre wird man leicht in zweierlei Weise einer vorläufigen Prüfung unterziehen können: erstens soll ein Natriumspiegel in derselben sichtbar sein, und zweitens sollen bei nahe zusammengeschobenen parabolischen Spiegeln die Hertz'schen Secundärfünkchen selbst, ohne Anschluss des Accumulators, im Innern der Röhre als deutliches Glimmlicht erscheinen, nicht als helle scharf ab-

1) Vgl. Zehnder, Wied. Ann. 47. p. 90. 1892; die zur Entladungsröhre führende Leitung *l* werde nicht unnöthig lang gemacht!

gegrenzte Fünkchen; denn in letzterem Falle wäre die Röhre voll Luft geworden.

Für meine Bestrebungen, die Hertz'schen Versuche mit Hülfe der Accumulatorenentladung objectiv darzustellen, liess mir Hr. Prof. Warburg die Wahl, entweder seinen eigenen neueren in gutem Zustande befindlichen Accumulator von 600 Planté-Elementen mitzubenutzen oder statt dessen einen alten vor etwa sieben Jahren hergestellten Accumulator von 1000 solchen Elementen mir wieder herzurichten, zu meiner nachherigen ausschliesslichen Verfügung. Obwohl dieser letztere Accumulator bereits ausser Gebrauch gesetzt worden war, weil er von allen Praktikanten, welche mit ihm zu arbeiten versucht hatten, wegen des unaufhörlichen Ueberkriechens der Schwefelsäure zu den an die Bleistreifen gelötheten Kupferdrähten und in die Quecksilbernäpfchen aufgegeben worden war, entschied ich mich doch für denselben, in der Erwägung, dass ich an einem alten reparaturbedürftigen Accumulator eher Erfahrungen zu machen im Stande sein werde, als an einem neuen noch tadellos functionirenden.

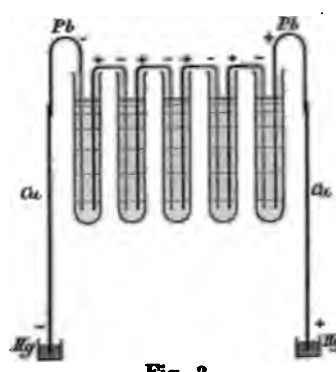


Fig. 3.

Die Ursache des Ueberkriechens der Säure war mir denn auch bald klar: Der betreffende Accumulator hat nämlich die nebenstehend skizzirte Construction (Fig. 3): an den Endbleien sind Kupferdrähte angelöthet, welche in Quecksilbernäpfchen tauchen. Die sämmtlichen 1000 Elemente sind zu Fünfen in Gruppen verbunden, wie hier gezeichnet: diese Gruppen werden zur Ladung nebeneinander, zur Entladung, d. h. zum Gebrauche hintereinander geschaltet. Bei der Ladung und ganz besonders bei der Ueberladung steigen nun die an den Electroden sich entwickelnden Gasbläschen in die Höhe, platzen an der Flüssigkeitsoberfläche und werfen dabei kleinste Tröpfchen oft bis zu 10 cm Höhe (Linie *aa* in der Figur 3) über jene Oberfläche empor. Von diesen Tröpfchen fällt ein Theil

auf die Bleistreifen, und diese überziehen sich nach und nach überall, auch an den höchsten Punkten, mit einer zusammenhängenden Flüssigkeitsschichte, welche dafür sorgt, dass nun alle frisch auffallenden Säuretröpfchen leicht nach allen Seiten wieder abfliessen können. Demnach fliesst Säure an den Endbleien auch nach aussen gegen die Löthstellen von Blei und Kupferdraht hin, längs des Kupferdrahtes hinunter, bis zu den Quecksilbernäpfchen, und in Folge dessen überzieht sich der Kupferdraht überall mit einer Sulfatschicht. Ist einmal die gesammte Bleioberfläche feucht geworden, der Kupferdraht seiner ganzen Länge nach mit einer feuchten Sulfatschichte überzogen, so wirkt das System mit Hülfe der Capillarkräfte wie ein Heber: es fliesst, so lange die Flüssigkeitsoberfläche im betreffenden Elemente hoch genug steht, fortwährend Säure aus demselben hinüber gegen das bedeutend tiefer liegende Quecksilbernäpfchen, den Kupferdraht und das Quecksilber allmählich mit einer Millimeter dicken mit Säure geschwängerten Sulfatschichte überziehend. Das Putzen der angegriffenen Stellen hilft nur vorübergehend; denn schon nach etwa 14 Tagen tritt neuerdings starke Sulfatbildung auf.

Das eben erwähnte Ueberfliessen der Säure hatte bei dem beschriebenen Accumulator noch den weiteren Nachtheil, dass das hölzerne Gestell, auf welchem die Elemente gelagert waren und welches den Kupferdrähten als Führung diente, allmählich sehr viel Säure in seinem Inneren aufnahm und dadurch aus einem Isolator zu einem Leiter wurde, der die Spannung des Accumulators verhältnissmässig rasch wieder verschwinden liess.

Zur Vermeidung dieses Ueberkriechens der Säure wurden manche Mittel versucht: Ueberziehen der Endbleibügel, der Löthstellen und der Kupferdrähte mit Paraffin, mit Schellack oder mit ähnlichen isolirenden Mitteln. Allein diese Isolirungen wurden bald hart, lösten sich allmählich von den Metalloberflächen ab und waren dann nicht mehr im Stande, ihren Zweck zu erfüllen.[1] Ich griff daher zu einem Isolirmittel, welches beinahe gar nicht oder doch erst nach langer Zeit verhärtet, nämlich zu Vaselin. Nachdem ich von der ganzen

1) Vgl. dagegen Warburg, Wied. Ann. **31.** p. 547. 1887.

Batterie 600 Elemente gründlich wieder hergestellt, gereinigt, auch das theilweise leitend gewordene Holz durch Einsetzen neuer Isolirungen verbessert hatte, rieb ich alle Bleibügel und Löthstellen der Endbleie gut mit Vaselin ein. Dabei hatte ich einen Theil derselben vor dem Einreiben gut getrocknet, den anderen Theil ohne Entfernen der Säurehaut, welche vermuthlich die Metallflächen noch bedeckte, eingerieben. Der Unterschied zeigte sich sehr bald: Schon nach etwa 14 Tagen begannen bei den letzteren wieder theilweise Sulfatbildungen an den Kupferdrähten, während die ersteren bis heute sich ausgezeichnet gehalten haben, nie mehr gereinigt werden mussten. In Folge dessen habe ich auch die letzteren Endbleie neuerdings gewaschen, getrocknet und frisch eingerieben, und nun ist auch bei diesen seither keine Reparatur mehr nöthig gewesen.

Dass das Ueberkriechen der Säure nur nach vorherigem Trocknen der Metallflächen, vor dem Einreiben derselben mit Vaselin, durch dieses verhindert werden kann, ist wohl ganz gut verständlich, weil eine schon benetzte Metallfläche Fett nicht mehr annimmt; es bleibt also trotz des Einreibens mit Fett die Säurehaut auf dem Metall und sie kann neuerdings Säure capillar in das Quecksilbernäpfchen hinüberziehen. Die zuvor getrockneten und darnach gefetteten Bleibügel nehmen dagegen die verdünnte Schwefelsäure nicht mehr an, die auf diese Bügel fallenden Tröpfchen vereinigen sich nicht zu einer zusammenhängenden Flüssigkeitsschichte, und es kann somit das Ueberkriechen der Säure, wie mein Accumulator lehrt, schon bei der in Fig. 3 skizzirten Construction eines solchen mehr als $1^1/_2$ Jahre lang, vielleicht noch viel länger, völlig verhindert werden. In der angegebenen Weise wiederhergestellt steht nun jener $8^1/_2$ Jahre alte Accumulator den neueren seither für das Institut angeschafften Accumulatoren, was seine Wirksamkeit anbetrifft, wohl in keiner Beziehung mehr nach.

Accumulatoren, welche in ähnlicher Weise wie der oben beschriebene construirt sind und welche somit denselben Nachtheil des Ueberkriechens der Säure haben, können demnach durch folgendes Verfahren wesentlich verbessert werden: Man wasche die zuvor entladenen Endbleie mit destillirtem Wasser gut aus, trockne sie, indem man sie auf über 100° erwärmt, und reibe die noch warmen Bleibügel, soweit sie aus der Säure

herausragen bis zu den Kupferdrähten, mit wenig Vaselin ein. Wenn auch die Vaselinschichte so dünn gemacht wird, dass beim Berühren mit dem Finger sich an diesem kaum wesentliche Fettspuren zeigen, so wird doch das Ueberkriechen der Säure wie an meinem Accumulator für lange Zeit nicht mehr auftreten. Zeigen sich aber nach Jahren wieder Sulfatbildungen, so muss die Reinigung nebst Einreiben von Vaselin neuerdings vorgenommen werden; durch Ablagern von Staub und häufig wiederholtes Auffallen aufspritzender Säuretröpfchen auf die Bleibügel wird eben doch die Wirksamkeit des Vaselins nach und nach beeinträchtigt werden.

Möglicherweise ist es von grossem Vortheil, die Säureoberfläche in den Elementgläschen mit einer dünnen Oelschichte zu bedecken. Ich habe vor ungefähr einem Jahre in fünf Elementchen je zehn Tropfen Olivenöl auf die Säure gegossen, wodurch eine 1—2 mm dicke Oelschicht auf der Säureoberfläche entstand. Damit ist wohl in diesen Elementen das Aufspritzen der Säure ganz und gar vermieden, denn die bei der Ladung rasch durch die Säure aufsteigenden Gasbläschen arbeiten sich nur langsam durch das dickflüssige Oel hindurch, und wenn sie platzen, so reissen sie höchstens Oeltröpfchen, keine Säuretröpfchen in die Höhe; indessen findet auch dieses nur in geringem Grade statt, denn in der langen Versuchszeit eines Jahres hat die Dicke der Oelschichte kaum wesentlich abgenommen, ein Nachgiessen von Oel ist nicht nöthig geworden. Aber auch das Säurevolumen selbst hat sich in dieser langen Zeit kaum vermindert: Während in den übrigen Elementen alle paar Monate Säure nachgegossen werden musste, war dies bei den mit jener Oelschicht versehenen Elementen nie nöthig. Es bietet somit das Bedecken der Säureoberfläche mit einer dünnen Oelschicht sehr wichtige praktische Vortheile. Ob andererseits Nachtheile damit verknüpft sind, kann ich noch nicht beurtheilen. Ich habe bis dahin keine solchen beobachten können; vielmehr schienen jene fünf Elemente stets genau ebenso gut zu functioniren, wie alle übrigen.

Der beschriebene Accumulator zeigt noch andere Mängel, von denen ich zwei hervorheben will: Die Bleiplatten sind ungefähr ebenso lang, wie die Glasgefässe selbst. Weil sich aber beim Formiren und beim Gebrauche des Apparates oftmals

Theile von den Bleiplatten loslösen und zu Boden fallen, so kann sich in den Zellen leicht ein Kurzschluss bilden, unter welchem die betreffende Zelle stark leidet und bald zu Grunde geht. Sodann verbiegen sich bekanntlich die Bleiplatten bei der Ladung und Entladung, und zwar um so stärker, je dünner sie sind. Aus diesem Grunde erhalten die in der Technik verwendeten Accumulatoren Isolirstangen, z. B. Glasröhren, welche, zwischen die gegenüberstehenden Bleiplatten eingeschoben, ein Verbiegen derselben und insbesondere eine Berührung positiver mit negativen Platten verhindern sollen.

Zur Vermeidung aller dieser Mängel habe ich probeweise einen kleineren Accumulator von 100 durch Oel gut voneinander isolirten Elementen ausgeführt, mit Gefässen, welche etwa 2 cm länger sind, als die Bleiplatten, sodass durch Ablagerung losgelöster Theile kein Kurzschluss entstehen kann. Es werden ferner die in einer Zelle befindlichen Bleiplatten durch Glasröhren von passender Dicke und von der Höhe der Zellen daran verhindert, sich gegenseitig zu berühren. Ueberdies sind diese Glasröhren oben bis zur beiderseitigen Berührung mit dem Zellengefäss *S*-förmig abgebogen (Fig. 4), wodurch das Hochspritzen von Säuretröpfchen nahezu vollständig vermieden wird. Die Bügel der Endbleie habe ich etwa 14 cm über die Flüssigkeitsoberfläche emporragen lassen, und ausserdem dafür gesorgt, dass sie und besonders ihre Löthstellen mit den Kupferdrähten, beständig mit einer dünnen Vaselinschicht bedeckt sind. Die Quecksilbernäpfchen können bequem entleert und mit frischem Quecksilber gefüllt werden.

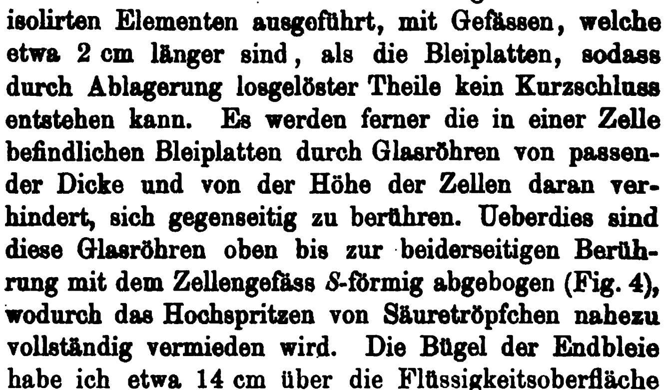


Fig. 4.

Diesen Accumulator hat Hr. Klingelfuss dadurch verbessert, dass er die in der Technik gebräuchliche von mir in der oben citirten Arbeit (p. 78) auch zu allgemeinerer Anwendung auf physikalische Apparate empfohlene *gedeckte* Oelisolirung nun bei demselben wirklich durchgeführt hat.[1]) Derselbe gab dem Hochspannungsaccumulator im Principe die in umstehender Fig. 5 skizzirte Construction. Sämmtliche Zellengefässe, die Bügel der Endbleie und die Quecksilber-

1) Fr. Klingelfuss in Basel fabrizirt solche Accumulatoren.

näpfchen ruhen auf Stützen, welche, wie aus der Skizze ersichtlich, durch gedeckte Oelisolirungen *O* . . . die Ableitung von Strömen in und durch das Gestell verhindern, so dass die Spannung des Accumulators auch bei sehr grosser Elementenzahl kaum unter das entsprechende Vielfache der Spannung des einzelnen Elementes sinken wird, ein für genaue Messungen gewiss nicht zu unterschätzender Vortheil. Für den Fall eines etwa eintretenden Zellengefässbruches fliesst die entsprechende Säuremenge ab, ohne die übrigen Isolirungen des Apparates nachtheilig zu beeinflussen. Zur Erzielung einer grösseren Capacität versieht Hr. Klingelfuss die Bleiplatten mit feinen Rippen. Die von mir oben vorgeschlagenen Verbesserungen sind bei dieser Accumulatorconstruction mit berücksichtigt.

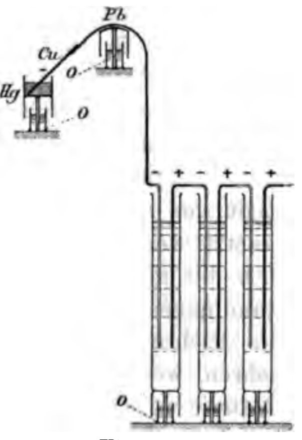


Fig. 5.

Die Elemente können, einer in physikalischen Instituten fast allgemein üblichen Normalspannung der ladenden Maschine von ungefähr 70 Volts entsprechend, zu Gruppen von 20 oder zu noch grösseren Gruppen hintereinander angeordnet werden, welche Gruppen bei der Ladung alle nebeneinander geschaltet sind. Bei der Hintereinanderschaltung sämmtlicher Elemente wird es in vielen Fällen zweckmässig sein von etwa 300 zu 300 Elementen je einen Flüssigkeitswiderstand (Jodcadmiumlösung) durch die Umschaltvorrichtung ***selbstthätig*** in den Stromkreis einzuschalten, damit der Experimentator bei unabsichtlicher Berührung zweier Stellen grösserer Potentialdifferenz nicht einen unangenehm kräftigen Schlag oder sogar eine stärkere Verwundung davontrage.

Zur Oelisolirung kann man Olivenöl oder das flüssige Vaselinöl verwenden. Beide sehr gut isolirende Oele ziehen sich nur wenig den Wänden entlang in die Höhe, lassen also nicht die Oberfläche des ganzen Apparates nach und nach mit einer sichtbaren Fettschichte überzogen erscheinen. Noch günstiger verhält sich aber in dieser Beziehung das gewöhnliche zähflüssige Vaselin, mit welchem nach gelindem Erwärmen

die vorgesehenen Oelrinnen gefüllt werden können; es wird unter diesen Umständen der Apparat auch nach zufälligem Neigen reinlich bleiben, und doch ist die Isolirung, wenigstens für einen längeren Zeitraum, kaum eine geringere als bei Verwendung von dünnflüssigem Oel. Es dürfte sogar ausreichen, die Oelrinnen zur Vertreibung der an ihnen haftenden Feuchtigkeit zu erwärmen und dieselben dann mit Vaselin nur *einzureiben*, welches Verfahren sich ja unter viel ungünstigeren Verhältnissen, nämlich für die von Säuretröpfchen in grosser Zahl getroffenen Bügel der Endbleie der Accumulatorzellen, aufs beste bewährt hat und wohl auf Jahre hinaus genügt.

Ueber die *Formirung* der hier beschriebenen zuerst von Hrn. G. Planté construirten Accumulatorelemente hat der französische Gelehrte folgende Vorschriften gegeben [1]): Man lade die Elemente und entlade sie mit passenden Stromstärken, in abwechselnder Aufeinanderfolge; dieses Verfahren fortwährender Ladungen und darauffolgender Entladungen soll so lange fortgesetzt werden, bis man genügende Formirung erzielt hat, d. h. bis genügend dicke Bleischichten an den chemischen Umwandlungen theilnehmen. Dabei ist es von grossem Vortheil, die Richtung des ladenden Stromes von Zeit zu Zeit umzukehren, weil nach jedem solchen Umkehren die Capacität der Batterie verhältnissmässig stark zunimmt, vorausgesetzt, dass unmittelbar vorher eine Zeit lang in einem und demselben Sinne jene Ladungen fortgesetzt worden sind. Eine Ladung ist beendigt und der Ladungsstrom kann also unterbrochen werden, sobald an beiden Electroden starke Gasentwickelung auftritt. Dies erfolgt bei den ersten Ladungen beinahe momentan nach Stromschluss, lässt aber um so länger auf sich warten, je weiter die Formirung fortgeschritten ist. Hat man die letztere eine Zeit lang ausgesetzt, den Accumulator ruhen lassen — derselbe darf indessen bekanntlich nie ungeladen stehen bleiben — so soll die nächstfolgende Ladung nach dem Erscheinen der Gasentwickelung doch noch etwa eine Stunde lang fortgesetzt werden. d. h. es soll Ueberladung stattfinden. Ist einmal die Formirung genügend weit gediehen, so bietet das Umkehren der Richtung des Ladestromes keinen Vortheil mehr. weil dann leicht die gelockerten, bald oxydirten, bald

1) Planté, Les Mondes 27. p. 469. 1872.

reduzirten Bleischichten sich vom Bleiplattenkerne loslösen und abfallen, wodurch die Formirung illusorisch wird. Eine für viele Versuche genügende Formirung ist bald vorhanden; dagegen erreicht man einen ungefähren Grenzwerth der Capacität des Accumulators erst nach monatelanger Formirung desselben. Hr. Planté hat auch ein Verfahren vorgeschlagen, um durch Behandlung der Bleiplatten mit Salpetersäure die Formirungszeit wesentlich abzukürzen.[1])

Die zuzulassenden Stromstärken berechnen sich aus den gegenwärtig in der Technik üblichen Stromdichten, welche für die bewährten Accumulatoren in Ampers wie folgt angegeben werden[2]): für die Ladung; 0,4 — 0,6 *A* pro 1 qdm Oberfläche der positiven Platten; für die Entladung: 0,3 — 0,7 *A* pro 1 qdm Oberfläche der positiven Platten.

Besondere Vorsicht ist bei der Richtungsänderung des ladenden Stromes anzuwenden, weil die positiven Bleiplatten auch nach völliger Entladung der Zelle stellenweise noch Bleisuperoxyd enthalten, weshalb bei der Umkehrung der Ladungsstromrichtung die Stromdichte an den betreffenden Stellen leicht zu gross werden kann, was ein Ablösen der bereits formirten Schichte zur Folge hat. Man schalte also bei dieser Umkehrung grosse Ballastwiderstände ein und lasse die Stromdichte eine Zeitlang nicht auf jenes vorgeschriebene Maximum, vielleicht nicht einmal auf den vierten Theil desselben anwachsen, so lange etwa, bis die nun als positiv gewählten Platten durch Braunfärbung die Bildung von Bleisuperoxyd anzeigen, die neuerdings negativ gewordenen Platten dagegen ihre frühere braune Färbung verloren haben.

Die im hiesigen Institute befindlichen, längere Zeit formirten Accumulatoren werden alle 12 bis 14 Tage eine Stunde lang mit der üblichen Stromdichte nachgeladen, auch wenn sie inzwischen nicht gebraucht worden sind. Möglicherweise wird der oben beschriebene besser isolirte Accumulator nach genügender Formirung seine Spannung entsprechend länger halten; indess fehlen darüber noch die nöthigen Erfahrungen.

Freiburg i/B., Phys. Inst. d. Univ., Mai 1893.

1) Planté, C. R. 95. p. 418. 1892.

2) Heim, el. Beleuchtungsanlagen p. 95. Hannover 1882.

12. *Beiträge zur Theorie des Secundärelementes; von Franz Streintz.*

(Fünfte Mittheilung.)[1]

11. Calorimetrische Messungen. — Die Wärme, welche in der Zeiteinheit im Inneren eines galvanischen Elementes entwickelt wird, ist gegeben durch die Gleichung:

$$q = i^2 w - i S.$$

Der erste Summand drückt darin den Antheil aus, welcher von der Stromwärme herrührt, der zweite jenen, welchen die secundäre Wärme liefert. Sowie man ersteren gewöhnlich als Joule-Wärme bezeichnet, so kann man letzteren nach ihrem Entdecker die Helmholtz-Wärme nennen. Dabei ist:

$$S = T \frac{\partial E}{\partial T}.$$

In diesen Gleichungen bedeutet i die Stromstärke, E die Potentialdifferenz des offenen Elementes, w dessen Widerstand und T die absolute Temperatur. Werden i in Ampère und E in Volt ausgedrückt, so erhält man q in Watt.

Im Secundärelement ist, wie in der letzten Mittheilung gezeigt wurde, der Temperaturcoefficient stets positiv. Da das Element in jenen Stadien, in welchen eine Abscheidung von freien Gasen vermieden wird, als vollkommen reversibel anzusehen ist, Bildung von Bleisulfat aus metallischem Blei auf der negativen Platte, aus Bleisuperoxyd an der positiven Platte während der Entladung, Rückbildung der genannten Substanzen aus diesem Salze während der Ladung, so erhält man im Inneren eines Elementes als auftretende Wärmemengen:

während der Entladung: $q = i^2 w - S i$,

während der Ladung: $q' = i'^2 w' + S i'$,

wenn man den Wechsel im Vorzeichen von $\partial p / \partial T$ zum Ausdrucke bringt.

Durch Abgleichen eines Widerstandes in der Drahtleitung lässt sich erzielen, dass die Stromstärke bei Entladung und

1) Vgl. F. Streintz, Wied. Ann. **38.** 1889; **43.** 1891; **46.** 1892; und F. Streintz und G. Neumann, Wied. Ann. **41.** 1890.

Ladung dieselbe bleibt. Sorgt man ferner dafür, dass der Ausdruck für die Differenz der Joule-Wärmen $i^2(w' - w)$ verschwindend klein wird gegen jenen der Helmholtz-Wärme, so ergiebt sich:

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2i}(q' - q).$$

Man hat mithin neben der constant gehaltenen Stromstärke nur die beiden bei Ladung und Entladung frei werdenden Wärmemengen q' und q calorimetrisch zu bestimmen, um den Temperaturcoefficienten berechnen zu können.

Zu den Messungen wurde ein Bunsen'sches Eiscalorimeter gewählt. Das Rohr, welches den Quecksilberfaden enthielt, war 1 m lang und in Millimeter getheilt. Durch Verschieben eines Fadens von 34 cm Länge war dasselbe calibrirt worden. Das Gewicht eines Fadens von 1 mm Länge ergab sich aus Wägungen von Faden verschiedener Länge zu 0,01460 gr reducirt auf die Temperatur von 0° C. Da 0,01544 gr Quecksilber der Grammcalorie entsprechen, so kommt einer Verschiebung von 1 mm im Rohre eine Wärmemenge von 0,9456 Grammcalorien zu. Zehntel eines Millimeters konnten mit genügender Sicherheit geschätzt werden. — Das Calorimeter wurde an seinem oberen Rande von zwei Holzleisten gehalten, die auf den Rändern eines weiten und hohen cylindrischen Glasgefässes ruhten. Das Gefäss war mit reinem Schnee dicht erfüllt, desgleichen die über den Rand desselben hervorragenden Theile des Instrumentes. Das Schmelzwasser konnte mittelst eines Glashebers, welcher nahe dem Boden des Gefässes mündete, von Zeit zu Zeit abgesogen werden. Der Glascylinder stand in einem weiteren cylindrischen Gefässe aus Eisenblech mit doppelten Wänden, deren Zwischenräume mit Sägespähnen erfüllt war. Bedeckt wurde derselbe mit einer Kappe aus Pappe, welche innen mit Watte ausgelegt war und die nöthigen Ausschnitte für Rohr und Zuleitungsdrähte enthielt. Das Reagirglas des Calorimeters bildete das Behältniss für das zu untersuchende Element, Tudorplatten in Streifen von 9,3 cm Länge und 1,6 cm Breite in verschieden concentrirter Schwefelsäure. Selbstverständlich waren an die Platten Bleidrähte von mehreren Centimetern Länge ohne Verwendung eines fremden Metalles gelöthet. Die beiden Platten, welche

durch an drei Stellen angebrachte Bindfaden vor gegenseitiger Berührung geschützt waren, mussten einander sehr nahe stehen, um in dem Reagirglase Platz zu finden.

Die Beobachtungen wurden im Januar und Februar des abgelaufenen durch seine Strenge ausgezeichneten Winters in einem Zimmer, welches ungeheizt blieb, ausgeführt; die Temperatur desselben schwankte zwischen 1 und 5° Wärme, so dass von einer Zimmertemperatur nicht gut gesprochen werden kann. Zunächst wurde der normale Gang des Calorimeters — der geschmolzene Schnee war regelmässig am Abend vorher durch frischen ersetzt worden — durch Stunden in Intervallen von zehn zu zehn Minuten notirt. Dieser Gang war grossentheils regelmässig; fast ausnahmlos rückte der Faden langsam gegen das Ende des Rohres vor, der Eiscylinder im Instrumente vergrösserte sich also, eine Erscheinung, welche auf die nicht vollkommene Reinheit des übrigens meist frisch gefallenen Schnees schliessen lässt. Dann wurde das Element in dem Reagirglase geschlossen durch eine oder auch durch zwei Stunden, und der Strom durch eine Spiegeltangentenboussole geleitet, deren Reductionsfactor mit Hilfe eines Normal-Clark-Elementes ermittelt war. Ein Strom von 0,188 A rief eine Ablenkung von 100 mm des Bildes einer Scala hervor, die 220 cm entfernt vom Instrumente aufgestellt war. Durch Umschlagen einer rasch functionirenden Wippe wurden die Ausschläge nach beiden Seiten der Ruhelage ermittelt. Ein Poggendorff'scher Rheochord, welcher dem Rheostatenwiderstand von 20 bis 30 Ohm zugeschaltet war, gestattete, die Stromstärke stets constant zu erhalten. Allerdings war es dazu nöthig, Ablesungen von fünf zu fünf Minuten vorzunehmen. In dieser Periode wurde auch der Stand des Fadens im Rohre in denselben Intervallen beobachtet. War der Strom geöffnet, so wurde der Gang des Fadens wieder in derselben Weise festgestellt, wie in jener dem Stromschluss vorangegangenen Periode. Aus diesen Beobachtungen, bevor das Element geschlossen und nachdem es wieder geöffnet war, liess sich der Gang des Calorimeters berechnen, welcher stattgefunden hätte, wenn keine Wärme in dem Reagirglase frei geworden wäre. Auf diese Weise liess sich dann die durch das Element im Calorimeter erzeugte Wärmemenge ermitteln.

Um der Bedingung zu genügen, dass der Ausdruck $i^2(w' - w)$ gegen $2\,i\,S$ vernachlässigt werden könne, war es erforderlich, nur mit schwachen Strömen zu arbeiten, damit einerseits das Quadrat der Stromstärke im Vergleiche zur ersten Potenz derselben sehr klein werde, andererseits die Differenz der Widerstände des Elementes während der Ladung und Entladung nahezu verschwinde. Wie sich im nächsten Abschnitte zeigen wird, war es zur Erfüllung der letzteren Voraussetzung noch erforderlich, die Wärmeentwickelung im Elemente nur zu jenen Zeiten zu bestimmen, in welchen sich dasselbe in einem mehr anfänglichen Stadium der Ladung, beziehungsweise Entladung befand. Zufälliger Weise wurde dieser Bedingung Genüge geleistet, da die Erfahrung lehrt, dass in diesem Stadium die Stromstärke am meisten constant bleibt. In diesem Falle ist auch die eingangs erwähnte Bedingung der Umkehrbarkeit der electrolytischen Processe erfüllt.

Bestimmungen des inneren Widerstandes im ungeschlossenen Zustande wurden mit Hilfe eines in einer Spule erzeugten Stromstosses durch Voltainduction vorgenommen und ergaben im Mittel nur ein Viertel Ohm für denselben. Die angewendeten Stromstärken durften ein Zehntel Ampère nicht überschreiten, so dass also im äusseren Stromkreise mindestens 20 Ohm Widerstand eingeschaltet werden mussten.

In vollständig abweichender Form hat Jahn bei seinen Bestimmungen der Wärmeerzeugung in galvanischen Ketten[1]) das Problem angefasst. Die von ihm untersuchten Elemente besassen grossen inneren Widerstand und waren so gut wie kurz geschlossen. Dadurch entwickelte sich der grösste Theil der Stromwärme im Inneren des Elementes, sehr wenig im Leitungsdrahte. So erzeugte das Daniell-Element 44,3 Cal. im Calorimeter und nur 7,5 Cal. im Schliessungskreise. Aehnliche Verhältnisse herrschten auch bei den übrigen von Jahn untersuchten Elementen. Eine derartige Anordnung kann aber keine glückliche genannt werden; geringe Fehler in der Bestimmung der bedeutenden Gesammtwärme sind dann im Stande, die wahren Werthe der fast stets sehr kleinen Helmholtz-Wärmen gar nicht erkennen zu lassen. Um bei dem

1) Jahn, Wied. Ann. **28.** p. 21 und 491. 1886.

Jahn'schen Versuche[1]) mit dem Daniell-Elemente zu verbleiben, so beträgt die secundäre Wärme nur — 0,43 Cal., also nach ihrem absoluten Werthe knapp 1 Proc. der im Calorimeter frei gewordenen. Setzt man sich über diesen Einwand hinaus, so wird man sich aber schwerlich mit der stillschweigenden Annahme Jahn's befreunden können, nach welcher ein galvanisches Element im offenen Zustande dieselbe electromotorische Kraft besitzen soll, als wenn es in der angegebenen Weise behandelt worden ist.[2]) Es wird kaum geläugnet werden können, dass sich die in unseren Laboratorien gebräuchlichen Typen von Daniell- und Bunsen-Elementen polarisiren werden, wenn man sie durch wenige Hundertel von Ohm dauernd schliesst. Darauf aber kommt es bei der Anordnung durch Jahn hinaus.

Ich theile nun die Versuche in der Reihenfolge, wie sie ausgeführt wurden, mit. Vorher soll noch erwähnt werden, dass sich in der Leitung auch ein Potentialgalvanometer befand, gewissermassen zur Ueberwachung des Elementes.

In den nachstehenden Tabellen sind die mit E_δ bezeichneten Werthe aus Gleichung (2), die mit $(\partial E / \partial T)_{\text{ber}}$ bezeichneten aus Gleichung (3) der vierten Mittheilung[3]) gerechnet; t gibt die Dauer des Stromes in Minuten, α die durch ihn hervorgerufene Verschiebung des Quecksilberfadens im Calorimeterrohre in Millimetern, δ endlich das specifische Gewicht der Säure an. 1 Watt = 0,24 gr cal. / sec.

1. Versuch.

$$\delta = 1{,}155, \quad E_\delta = 1{,}992 \text{ Volt}, \quad E_{\text{beob.}} = 1{,}990 \text{ Volt}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\text{ber.}} = 326 \,.\, 10^{-6} \,\frac{\text{Volt}}{1^{\circ}\text{C.}}$$

Entladung:	Ladung:
$i = 0{,}100$ Amp.	$i' = 0{,}101$ Amp.
$t = 61$ min.	$t = 61$ min.
$\alpha = 3{,}7$ mm	$\alpha = 21{,}2$ mm
$q = 0{,}0040$ Watt	$q' = 0{,}0228$ Watt

$$q' - q = 0{,}0188 \text{ Watt}, \quad S = 0{,}0942$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) = 345 \,.\, 10^{-6}$$

1) Jahn, l. c. p. 29.
2) Jahn, l. c. p. 25.
3) F. Streintz, Wied. Ann. 46. p. 457 u. 461. 1892.

2. Versuch.

$$\delta = 1{,}153, \quad E_\delta = 1{,}990 \text{ Volt}, \quad E_{\text{beob.}} = 1{,}991 \text{ Volt}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\text{ber.}} = 316 \,.\, 10^{-6}$$

Entladung:	Ladung:
i = 0,0678 Amp.	i = 0,0678 Amp.
t = 120 min.	t = 60 min.
α = 2,9 mm	α = 12,5 mm
q = 0,00159 Watt	q' = 0,01368 Watt

$$q' - q = 0{,}0121, \quad S = 0{,}0891$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) = 326 \,.\, 10^{-6}$$

Beide Versuche bestätigen in sehr befriedigender Weise die Theorie von v. Helmholtz.

Es soll nun ein Versuch angegeben werden, bei welchem die Stromstärke das als zulässig bezeichnete Maass von 0,1 Amp. überschritt.

3. Versuch.

$$\delta = 1{,}152, \text{ wie beim 2. Versuche.}$$

Entladung:	Ladung:
i = 0,130 Amp.	i = 0,130 Amp.
t = 61 min.	t = 61 min.
α = 6,3 mm	α = 36,7 mm
q = 0,00678 Watt	q' = 0,03950 Watt

$$q' - q = 0{,}03272, \quad S = 0{,}1258$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 461 \,.\, 10^{-6}$$

Hier war offenbar die Bedingung $i(w' - w) = 0$ nicht mehr erfüllt. Die Klemmenspannung war gegen den Schluss der Ladung ziemlich angestiegen, sodass auf Gasentwickelung an der positiven Platte geschlossen werden konnte. Da die beiden Platten des Elementes leider sehr nahe aneinander stehen mussten, so blieben die entwickelten Gasperlen an den Electroden haften, wodurch der Widerstand w' wesentlich steigt.

Im Folgenden soll eine Versuchsreihe angeführt werden, welche mit einem Element, dessen Säure stärkere Concentration besass, angestellt wurde.

4. Versuch.

$$\delta = 1{,}237, \quad E_\delta = 2{,}067 \text{ Volt}, \quad E_{\text{beob.}} = 2{,}070$$

Entladung:	Ladung:
$i = 0{,}0729$ Amp.	$i = 0{,}0729$ Amp.
$t = 60$ min.	$t = 60$ min.
$\alpha = 5{,}0$ mm.	$\alpha = 11{,}2$ mm
$q = 0{,}00547$ Watt	$q' = 0{,}01225$ Watt.

$$q' - q = 0{,}00678, \quad S = 0{,}0465 \text{ Volt}$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 170 \,.\, 10^{-6}$$

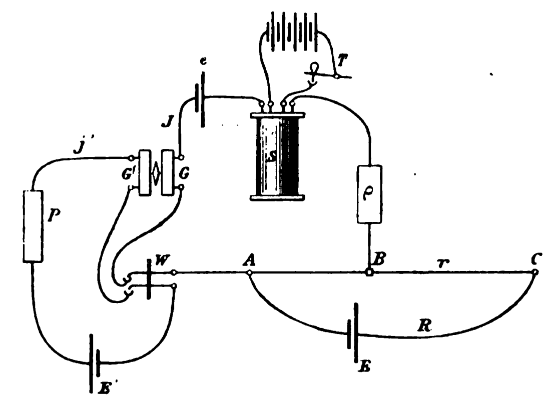
Die l. c. durchgeführten Bestimmungen des Temperaturcoefficienten ergaben für $E = 2{,}01$ Volt $(\partial E / \partial T) = 255 \,.\, 10^{-6}$, für $E = 2{,}08$ Volt $(\partial E / \partial T) = 130$. Die Uebereinstimmung mit der Theorie kann also auch hier eine zufriedenstellende genannt werden.

Ich hatte die Absicht, weitere Versuche mit einem Calorimeter, dessen Reagirglas einen weit grösseren Fassungsraum besitzen sollte, anzustellen, um Elemente von grösseren Dimensionen untersuchen zu können, deren innerer Widerstand bedeutend geringer wäre. Ferner hätte ein Rohr mit kleinerer innerer Lichte die Empfindlichkeit des Instrumentes erhöhen sollen, wodurch es ermöglicht worden wäre, durch Vergrösserung des Widerstandes im Schliessungskreise mit viel schwächeren Strömen zu arbeiten. Leider ergaben sich bei Anfertigung des Calorimeters glastechnische Schwierigkeiten, welche bisher nicht überwunden wurden. Ich hoffe jedoch im nächsten Winter in den Besitz des geschilderten Instrumentes zu gelangen; vielleicht werde ich damit auch in den Stand gesetzt, einige Elemente mit Quecksilber als Electroden (Clark u. A.), welche wegen ihrer leichten Polarisirbarkeit schwieriger zu behandeln sind, nach der beschriebenen Methode zu untersuchen.

Ich erfülle eine angenehme Pflicht, wenn ich an dieser Stelle dem Director unseres Institutes, Hrn. Prof. Pfaundler für die rasche Einführung in das Gebiet der practischen Calorimetrie meinen innigen Dank ausspreche.

12. Der innere Widerstand. Nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes erscheint es von besonderem Interesse, den Widerstand eines Secundärelementes während seiner *nor-*

malen Thätigkeit kennen zu lernen. Zu diesem Zwecke wurde folgendermassen verfahren (vgl. Figur). Das zu untersuchende Element *e* befand sich in einem Stromkreise, in welchem ein Rheostatenwiderstand ϱ in Bruchtheilen einer Siemens-Einheit und ein Rheochord nach Poggendorff, der mit einem über meterlangen Draht *AC* aus Patentnickel besaitet und dem Contactschiffchen *B* versehen war, ferner die bifilar gewickelte Secundärrolle eines Voltainductors von 0,7 Ω Widerstand geschaltet waren. Durch die auf gleiche Weise gewickelte Primärrolle von beiläufig gleichem Widerstand konnte mittelst eines Tasters *T* ein Strom, welchen fünf grosse Secundärelemente erzeugten, geleitet werden. Die beiden Endpunkte *A*



und *B* des Rheochorddrahtes standen durch zwei kurze und starke Kupferkabel in Verbindung mit den Polen eines, bez. zweier Secundärelemente von grosser Capacität (120 Ampère Stunden) und sehr kleinem inneren Widerstande. Durch Verschiebung des Quecksilberschiffchens *B* wurde es ermöglicht, beliebige Potentialdifferenzen $\varDelta$ der electromotorischen Kraft des Elementes entgegenzustellen. Bezeichnet R den Widerstand der ganzen Drahtlänge AC, r den des in den Stromkreis geschalteten Stückes AB, so ist $\varDelta = Er/R$ bei erlaubter Vernachlässigung des Widerstandes in E. Das Element *e* konnte dann entweder in stromlosen Zustand versetzt werden oder es konnte zur Entladung oder zur Ladung geschlossen werden. Die beiden letzteren Vorgänge sollen durch Stromstärken erfolgen in den bei normaler Benutzung von

Secundärelementen zulässigen Grenzen. Die für den beabsichtigten Zweck wichtige Unterscheidung von der gewöhnlichen Anordnung besteht darin, dass der Widerstand im Stromkreise auch bei den geringsten Stromstärken von derselben Grössenordnung bleibt wie der zu untersuchende Widerstand des Elementes.

Der durch die Potentialdifferenz erzeugte Strom durchfloss die Rolle G eines Differentialgalvanometers von geringem Widerstand. Um die Magnetnadel wieder auf die Ruhelage zurückzuführen, wurde eine zweite Rolle G' des Galvanometers mit einem grossen Secundärelement E' und einem Rheostatenwiderstand von 5000 S. E. in Stufen von 1 S. E. in passender Weise verbunden.

Dann wurde durch Niederdrücken des Tasters T eine electromotorische Kraft in der Rolle inducirt, die durch

$$\eta = i(w + g + s + \varrho + z)$$

gegeben ist. In der Gleichung bedeuten w den zu untersuchenden Widerstand des Elementes, g und s die Widerstände des Galvanometers und der Rolle, z endlich jenen Widerstand, welcher zwischen den Punkten A und B des Messdrahtes zur Geltung kommt. Dieser Widerstand lässt sich aus der Gleichung

$$z = r\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

berechnen. Schaltet man darauf die beiden Stromquellen E und e aus, öffnet den Stromkreis mit E' und bringt das Contactschiffchen an jene Stelle, bei welcher $AB = z$ wird, so sind die durch Niederdrücken des Tasters hervorgerufenen Stromstösse gegeben durch:

$$\eta = i_1 (g + s + \varrho_1 + z)$$

bei einem Rheostatenwiderstande ϱ_1

$$\eta = i_2 (g + s + \varrho_2 + z) \text{ bei } \varrho_2.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich der gesuchte Widerstand:

$$w = \frac{i\varrho(i_2 - i_1) + i_1\varrho_1(i - i_2) + i_2\varrho_2(i_1 - i)}{i(i_1 - i_2)}.$$

Die Rechnung wird vereinfacht, wenn $\varrho = \varrho_1 = 0$ gemacht wird; es ist dann

$$(2) \qquad w = \frac{i_2}{i} \cdot \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_3} \cdot \varrho_2$$

Bei den Versuchen wurde ϱ_2 meist zwischen 0,1 und 0,3 S. E. variirt und so der Widerstand w gleichfalls in Siemens-Einheiten erhalten. Den Stromstärken i proportional sind die Sinus der halben Ausschlagwinkel, welche am Galvanometer beobachtet wurden. Die Wippe W diente dazu, die Ströme, welche durch die Rollen g und g' flossen, gleichzeitig zu öffnen und zu schliessen.

Der Messdraht wurde in Stücken von 5 zu 5 cm Länge sorgfältig geaicht; sein gesammter Widerstand R betrug 0,787 S. E. bei Zimmertemperatur. Die Veränderung desselben durch die Erwärmung, welche bis 50° C. betrug, wurde, da der Temperaturcoefficient (0,018 Proc. pro 1° C.) bekannt war, in Rechnung gezogen. Um auf die Beobachtungen mit eingeschalteten Elementen rasch jene folgen zu lassen, bei denen dieselben ausgeschaltet waren, wurde eine Tabelle angelegt, welche die den verschiedenen Stellungen des Contactschiffchens zugehörigen Widerstände r und die diesen entsprechenden Werthe z in Theilen des Messdrahtes enthielt.

Es erschien nothwendig, die Elemente e und E sorgfältig vor Temperaturschwankungen und Erschütterungen zu schützen. Dazu befanden sich dieselben in Behältern, welche mit Sägemehl gefüllt und auf isolirte Steinplatten des Gebäudes gestellt waren.

Das Versuchselement enthielt zwei Platten Tudor'scher Form; sie hatten beide die Dimensionen 4,0 × 3,8 cm und standen parallel zu einander in einer Entfernung von 1,3 cm. Das Gewicht beider Platten betrug 290 g, die Dichte der Säure nach beendeter Ladung 1,169, womit die beobachtete electromotorische Kraft $e = 2.010$ Volt vollständig übereinstimmte. Das Element enthielt ein Thermometer im Inneren und war durch einen mit Paraffin übergossenen Kautschukpfropfen vollständig abgeschlossen.

Um die jeweiligen Stromstärken I kennen zu lernen, bei welchen die Entladungen und Ladungen vorgenommen wurden, bestimmte man das Verhältniss der Reductionsfactoren beider

Rollen g und g', ferner die Dichte der Säure des vollständig geladenen Elementes E in der in der vierten Mittheilung angegebenen Weise; da auch der Widerstand des jeweiligen Rheostatenwiderstandes P bekannt war, so konnte aus diesen Elementen die Stromstärke, welche durch die Rolle g floss, ermittelt werden. Das Verhältniss der Reductionsfactoren C/C' betrug 21,544, die Dichte der Säure $\delta = 1{,}255$, woraus sich $E = 2{,}085$ Volt ergibt. P wurde zwischen 282 und 5000 Ohm variirt.

Die Methode erfordert bei ihrer Anwendung einige Uebung und Aufmerksamkeit. Die Nadel des Galvanometers war stark gedämpft und hatte sehr kleine Schwingungsdauer; diese beiden Eigenschaften waren hier von besonderem Vortheile, da der Strom I jederzeit geringen Schwankungen unterworfen ist. Aus diesem Grunde wurden die Werthe für i_1, i_2 und i_3 nicht aus Einzelbeobachtungen, sondern aus den Mitteln von zehn Ablesungen gewonnen. Die Ausschläge, welche meist zwischen 100 und 130 Skalentheilen gelegen waren, weichen jedoch selten um mehr als einen Theilstrich in einer und derselben Serie von Ablesungen von einander ab.

Es sollen zunächst die bei der Entladung gefundenen Werthe mitgetheilt werden. Am 25. Februar war das Element geladen worden, am 1. März wurden bei verschiedenen Stromstärken I die nachstehenden Werthe w beobachtet:

I Amp.	w S. E.	I Amp.	w S. E.
0	0,215	0,0686	0,218
0,0476	0,253	0,1200	0,191
0,0534	0,240	0	0,235
0,0600	0,245		

Aus den angeführten Zahlen wird ersichtlich, dass w eine Function der Stromstärke ist. Bei schwachen Strömen wird der Widerstand des Elementes grösser als im offenen Zustande desselben, bei stärkeren Strömen sinkt er jedoch unter jenen herab. Auch ist zu bemerken, dass der Widerstand des offenen Elementes durch den Gebrauch wächst.

Dass diese Veränderungen nicht etwa zufälliger Natur sind, ergab eine grosse Reihe von Beobachtungen, von denen ich noch einige mittheilen werde. Nachdem das Element über Nacht sich selbst überlassen war, wurden die Beobachtungen am 2. März fortgesetzt. Dabei ergaben sich:

I Amp.	*w* S. E.	*I* Amp.	*w* S. E.
0	0,247	0,080	0,253
0,120	0,197	0,095	0,223
0,160	0,179	0,069	0,255

Am 3. März wurde beobachtet:

I Amp.	*w* S. E.	*I* Amp.	*w* S. E.
0	0,233	0,080	0,245
0,048	0,288	0,095	0,223
0,053	0,271	0,160	0,174
0,060	0,267	0	0,262
0,069	0,260		

Die beiden neuen Reihen bestätigen die Behauptung. Der Grund für die Erscheinung mag darin gelegen sein, dass schwache Ströme eine langsame Bildung von Gasblasen erzeugen und damit eine grössere Ausbildung derselben an den Electroden ermöglichen, während kräftige Ströme diese Bildung zwar beschleunigen, damit aber ein stetes Abreissen der Gasblasen in weniger ausgebildeter Form verursachen.

Die Beobachtungen wurden in den nächsten Tagen fortgesetzt und dienten zur weiteren Bestätigung des bereits Mitgetheilten. Noch sollen die Beobachtungen bei sehr geringer Stromdichte, wie solche am 4. März angestellt wurden, Platz finden.

I Amp.	*w* S. E.	*I* Amp	*w* S. E.
0	0,242	0,0119	0,316
0,0095	0,295	0,0476	0,268
0,0119	0,333	0	0,287
0,0095	0,300		

Der Widerstand bei der Entladung besitzt also bei einer verhältnissmässig sehr geringen Stromintensität ein Maximum seiner Grösse, sinkt bei Verstärkung des Stromes langsam ab bis zu einem Werthe, welcher jenem bei offenem Kreise gleichkommt, um dann bei höheren Intensitäten noch weiter abzunehmen. Das Maximum des Widerstandes beträgt nach den vorliegenden Tabellen 0,333 S. E. bei 0,0119 Amp.; der Werth, welcher dem geöffneten Element entspricht, liegt bei 0,08 Amp; der kleinste Werth für w (0,174) jedoch findet sich bei der grössten angewendeten Stromstärke von 0,160 Amp.

Es ergibt sich ferner aus den Beobachtungen, dass der Widerstand im stromlosen Zustande mit dem Vorrücken der Entladung fortschreitet, eine Erscheinung, die offenbar in der Bildung des schlecht leitenden Bleisulfates an beiden Electroden

ihren Erklärungsgrund besitzt. So betrug der Widerstand des geöffneten Elementes am 5. März 0,292, am 6. März 0,315, am 7. März endlich 0,328 S. E. Durch diese Veränderlichkeit des Widerstandes mit der Zeit war es nicht möglich, die Abhängigkeit desselben von der jeweiligen Stromintensität durch eine Curve darzustellen; zudem scheint es nicht gleichgültig zu sein, ob das Element vorher mit schwächeren oder stärkeren Strömen entladen worden war.

Mit der Ladung des Elementes wurde am 7. März zunächst mit geringer Stromdichte begonnen. Dazu reichte noch ein Element in *E* aus, da dasselbe höhere electromotorische Kraft besass als das zu untersuchende *e*. Es wurde erhalten:

I' Amp.	*w'* S. E.	*I'* Amp.	*w'* S. E.
0	0,328	0,0119	0,237
0,0318	0,231	0,0095	0,238
0,0238	0,232	0	0,237
0,0159	0,236		

Die Reihe zeigt, dass geringe Stromstärken zu Beginn der Ladung den ursprünglichen Widerstand bereits bedeutend herabsetzen; dieser erscheint dann innerhalb der angewendeten Grenzen unabhängig von der Intensität.

Am nächsten Tage war der Widerstand des offenen Elementes schon wieder auf 0,265 S. E. gestiegen.

Nun erfolgte am 9. März längere Ladung bei schwachem Strome; die Beobachtungen am nächsten Tage — zur Ladung dienten nunmehr zwei Elemente in *E* — ergaben:

I' Amp.	*w'* S. E.	*I'* Amp.	*w'* S. E.
0,0159	0,180	0,1200	0,154
0	0,197	0,1340	0,160
0,0476	0,176	0	0,179
0,0950	0,146		

Bei der Ladung ergibt sich eine Abnahme des Widerstandes mit zunehmender Stromdichte bis zu einem Minimum und darüber hinaus eine langsame Zunahme desselben.

Am 11. März wurde die Ladung weiter fortgesetzt, es ergab sich schliesslich ein Widerstand von 0,154 S. E. im ungeschlossenen Kreise; doch war tags darauf derselbe schon wieder auf 0,174 S. E. gestiegen, was wohl wieder der indessen eingetretenen Sulfatbildung zuzuschreiben sein wird.

Schliesslich wurde das Element so lange geladen, bis sich auch an der negativen Platte lebhafte Gasentwickelung bemerkbar machte. Wird die Ladung dann noch weiter fortgesetzt, so kann der Widerstand unter Umständen ganz enorm wachsen.

Der für die letzte Periode der Ladung benutzte Strom hatte 0,08 Amp. betragen, der Widerstand des offenen Elementes war schliesslich auf 0,291 S. E gestiegen. Wurde die Ladung bei Gasentwickelung noch weiter mit 0,120 Amp. fortgesetzt, dann stieg w' auf 0,914 S. E., um nach Oeffnen auf 0,567 S. E. zu sinken. Nach vorangegangener kurzer Entladung sank der Widerstand des offenen Elementes bald auf 0,226 S. E. und stieg dann bei erneuter Ladung mit 0,120 Amp. allmählig von 0,245 bis 1,584 S. E. an. Geht man jetzt zu geringeren Intensitäten über, so wächst w' noch weiter, um dann bei einer gewissen Grenze jäh abzufallen und bei neuerlicher Verstärkung wieder jäh anzusteigen.

Eine Beobachtungsreihe, welche am 20. März angestellt wurde, diene zur Veranschaulichung des Gesagten:

I' Amp.	w' S. E.
0,120	0,789—0,950
0,0238	4,535
0,0159	4,530
0,0095	0,458
0,0476	2,050

Man ist also im Stande, den Widerstand des geladenen Elementes durch entsprechende Behandlung auf das zwanzigfache seines normalen Werthes zu erhöhen.

Die zuletzt besprochenen Erscheinungen gehören vollständig dem Gebiete der galvanischen Polarisation an. Die reichlich an den Platten ausgeschiedenen Gasblasen verringern gewissermassen die leitenden Oberflächen derselben. Durch die Art der Entwickelung dieser Blasen, ihre Grösse und die Geschwindigkeit, mit welcher sie sich von den Platten losreissen, wird die Veränderung des Widerstandes bedingt werden.

13. *Zur Frage der Wasserstoffocclusion. — Abhängigkeit der electromotorischen Kraft jeder einzelnen Platte vom Säuregehalte. —*

Die Frage nach der Wasserstoffocclusion durch die negative Platte hat bisher eine befriedigende Lösung nicht erfahren

können. Es war vielleicht nicht ganz glücklich, den Ausdruck Occlusion in Anwendung zu bringen. Occlusion ist nach dem gegenwärtigen Stand der experimentellen Forschung noch ein Begriff, der viele ganz verschiedene Begriffe deckt. So besteht z. B. die Occlusion des Wasserstoffes durch Palladium in einer chemischen Verbindung ($Pd_2 H$), welche die beiden Körper mit einander eingehen, die Occlusion desselben durch Platin und Gold scheint wieder den Charakter einer Legierung zu besitzen, den die Metalle mit dem metallischen Hydrogenium bilden, und endlich müssen Verdichtungen des Gases an der Oberfläche anderer Metalle gleichfalls als Occlusion bezeichnet werden.

In der Untersuchung, welche G. Neumann mit mir im verflossenen Jahre veröffentlichte[1]) zeigte es sich, dass geschmolzenes Blei unter zehn in einer Wasserstoffatmosphäre der Prüfung unterzogenen Metallen den vorletzten Rang einnimmt. Nun lagen aber hier die Verhältnisse ganz wesentlich anders als beim Secundärelement, dessen Bleiplatte schwammig aufgelockert, electrolytischen Wasserstoff aufnimmt. Um den Unterschied zu charakterisiren beachte man die Resultate, welche Graham und wir an Platin gefunden haben. Graham arbeitete mit bei der Darstellung geschmolzenem Metall, wir untersuchten Mohr. Er erhielt nur 0,17 Vol. Wasserstoff bezogen auf die Volumeneinheit des Metalles, wir bekamen 49,30 Vol., also *den dreihundertfachen Werth.*

Shields[2]) suchte die Frage der Wasserstoffocclusion durch Blei auf indirektem Wege zu lösen; er studirte nämlich den Verlauf der Wasserstoffpolarisation an elf verschiedenen Metallen und an Kohle nach Oeffnen der electrolysirenden Kette. Dabei zeigte sich, dass jene Metalle, von denen es bekannt ist, dass sie das Gas aufnehmen, noch Reste dieser Polarisation dreissig Minuten nach Offenen des Stromes besitzen, während andere Metalle, zu welchen auch Blei gehört, schon nach kurzer Zeit eine vorangegangene Polarisirung nicht mehr erkennen lassen.

Nun habe aber ich bereits zehn Jahre vor Shields an fünf Metallen vollständig analoge Beobachtungen angestellt und folgende Behauptung ausgesprochen: „Während aber die *H*-

1) G. Neumann u. Streintz, Wied. Ann. **46**. p. 447. 1892.
2) Shields, Chem. News. **65**. p. 196. 1892.

occludirenden Metalle (*Pd* u. *Pt*), sobald ihnen nur Gelegenheit geboten war, grössere Mengen des Gases aufzunehmen, nur bis 15 Proc. ihres Anfangswerthes einbüssen, haben Gold und Silber den weitaus überwiegenden Theil, Aluminium sogar den Gesammtwerth der electromotorischen Kraft verloren."[1])

Da ich bald darauf Gelegenheit fand, Versuche mit Bleielectroden anzustellen[2]) und dabei zu Resultaten gelangte, mit welchen jene von Shields in Einklang standen, so habe ich mich einer scheinbaren Inconsequenz schuldig gemacht. Es zwangen mich eine Reihe von Erscheinungen im Secundärelement zur Annahme, dass Blei Wasserstoff absorbire. Es ist wahrscheinlich, dass diese Art von „Occlusion" der genannten dritten Art angehört und somit grundverschieden ist von jener, welche bei Palladium oder bei Platin und Gold auftritt. Dass übrigens ein Bestehen von Wasserstoffpolarisation im offenen Stromkreise kein Erkennungszeichen für Occlusion in dem gebräuchlichen weiteren Sinne des Wortes ist, geht aus den bereits erwähnten Versuchen von Neumann und mir am Metalle Kobalt hervor. Nach denselben occludirt dieses Metall die 153fache Menge seines eigenen Volumens, zeigt aber keine Spur von kathodischer Polarisation, sobald die ladende Kette geöffnet ist.

Cantor[3]) hat jüngst gegen zwei von Neumann und mir vorgebrachte Einwände gegen seine Untersuchungsmethode[4]) der Wasserstoffocclusion durch Blei Verwahrung eingelegt. In welcher Weise Cantor, um auf den ersteren Einwand zu kommen, bewirkte, dass durch Aufsaugen des Zellinhaltes in eine Pipette die Platte nur mit der über ihr befindlichen *H*-Atmosphäre in Berührung kam", ist mir noch immer nicht klar geworden. Vielleicht genügt ein Gleichniss. Man denke sich ein mit Wasser gefülltes Gefäss unter Quecksilber gebracht und geöffnet. Niemand wird daran zweifeln, dass das leichtere Wasser im Gefässe sofort durch das schwerere Quecksilber wird ersetzt werden. Fast dasselbe Verhältniss besteht aber zwischen den specifischen Gewichten von Wasserstoff und Luft.

1) F. Streintz, Wied. Ann. **17.** p. 849, 850. 1882.
2) F. Streintz u. Aulinger, Wied. Ann. **27.** 180. 1886.
3) Cantor, Wied. Ann. **47.** p. 424. 1892.
4) Cantor, Wien. Ber. **2.** p. 99. 1890.

Der zweite Einwand bestand darin, dass Cantor bei Bestimmung der Gesammtmenge der im Electrolyte enthaltenen Schwefelsäure keine Rücksicht genommen habe auf die durch den Bleischwamm aufgesaugte Menge der Flüssigkeit. Herr Cantor gibt nun nachträglich an, dass ein Auswaschen der Electrode allerdings stattgefunden habe. In welcher Weise aber bei der nun erforderlichen grossen Quantität an Waschwasser eine sichere Bestimmung der gesammten vorhandenen Schwefelsäure durch Titration durchgeführt und mit welchen Mitteln auch während des langwiergen Waschungprozesses eine Oxydation vermieden wurde, übersieht Herr Cantor auch in seiner Entgegnung anzugeben.

In einem Punkte indess stimme ich mit Cantor überein. Die in der ersten Mittheilung ausgesprochene Vermuthung, dass die grosse Gasabgabe durch die geladene negative Platte eines Elementes, dessen Säure verhältnismässig stark concentrirt war[1]), in der dem Oeffnen des Ladungsstromes folgenden Periode einen Schluss auf Wasserstoffocclusion gestatte, ist nicht aufrecht zu erhalten. Schon in der zweiten Mittheilung über diesen Gegenstand habe ich durch eine Formel[2]) zum Ausdrucke gebracht, dass ich die Abgabe von 49 Vol. Wasserstoff auch der wasserzersetzenden Eigenschaft dieses Metalles zuschreibe. Gleichwohl hielt ich damals, durch weitere Versuche veranlasst, an der Annahme, dass schwammiges Blei electrolytischen Wasserstoff absorbire oder vielleicht an der Oberfläche verdichte, aufrecht. Versuche, die ich erst vor Kurzem anstellte, bestärken diese Ansicht.

Man reinige zwei vollkommen gleiche Bleistreifen sorgfältig von Oxyd; dies geschieht, wenn man die Streifen zunächst in verdünnte Salpetersäure legt und dann mit einem in destillirtes Wasser getauchten Lappen, endlich mit Fliesspapier nachdrücklich abreibt. Die Streifen werden vollständig metallisch glänzend. Taucht man zunächst einen der Streifen in mit Schwefelsäure versetztes Wasser (1:10), so erhält man eine Spannung von 0.544 Volt. gegen eine amalgamirte Zinkplatte in Säure derselben Concentration; wird der Streifen nun etwa durch eine Viertelstunde mit electrolytischem Wasserstoff be-

1) In schwächerer Säure ist eine Gasentwicklung nicht bemerkbar.
2) Streintz u. Neumann, Wied. Ann. 41. p. 108. 1890.

deckt, so bleibt derselbe nach Oeffnen der electrolysirenden Kette durch weit längere Zeit auf dem früher innegehabten Potential, als der andere Streifen, welcher zur Zeit, als die Electrolyse am ersten Streifen bereits sistirt war, unmittelbar nach beendigtem Reinigungsverfahren in die Säure getaucht wurde und keinen Wasserstoff empfing. Es geht dies aus der im Nachstehenden mitgetheilten Zusammenstellung hervor. Die Potentialdifferenzen zwischen der mit H bedeckten Platte und Zn sind durch Zn | Pb + H, jene zwischen der gasfreien und Zn durch Zn | Pb angegeben.

		Zn | Pb + H	Zn | Pb
22. Nov. 1892.	10^h vorm. unmittelb. n. d. Eintauchen	0,544 V.	
	10^h 20^m n. Oeffnen des Stromes	0,554 „	unmittelb. n. d. Eintauchen 0,544 V.
	8^h abends	0,538 „	0,546 „
23. Nov. 1892.	Von 10^h vorm. bis 8^h abends	0,535—0,539 V.	0,537—0,546 V.
24. Nov. 1892.	10^h vorm.	0,532 V.	0,838 V.
	4^h nachm.	0,540 „	0,839 „
	8^h abends	0,544 „	0,825 „
25. Nov. 1892.	9^h vorm.	1,012 „	0,824 „

Die Oxydation und damit die Sulfatbildung wurde also durch eine geringe Menge abgeschiedenen Wasserstoffes an der Electrode um mindestens zehn Stunden verzögert. Versuche dieser Art wurden wiederholt und ergaben übereinstimmend, dass eine wenn auch nur kurze Zeit mit electrischem H bedeckte Platte 12—24 Stunden länger auf dem metallischen Werthe verharrt, als eine vom Gase freigehaltene.

Wenn man weiter zwei Bleistreifen, nachdem sie in der angegebenen Weise behandelt wurden, mit gleichen Mengen electrolytischen Sauerstoffes bedeckt, dann erhält man folgende Veränderungen der Potentialdifferenzen mit der Zeit:

28. Nov. 1892. Die Dauer des anodischen Stromes betrug 5 Min.

	Zn | Pb + H	Zn | Pb
11^h 30^m unmittelbar n. Oeffnen desselben	2,458 V.	2,439 V.
11^h 35^m	0,910 „	1,392 „
11^h 40^m	0,843 „	0,949 „
0^h 15^m	0,522 „	0,912 „
0^h 30^m	0,521 „	0,732 „
0^h 45^m	0,521 „	0,519 „

Wiederholte Versuche gaben ähnliche Resultate. Es unterscheidet sich also auch hier eine vorher mit Wasserstoff be-

deckte Platte von der gewöhnlichen. Dadurch, dass ein Theil des an der Oberfläche verdichteten Wasserstoffs mit dem entwickelten Sauerstoff zu Wasser vereinigt wird, erholt sich die betreffende Platte rascher von dem höheren Potential. Dabei ist nicht zu übersehen, dass bei den mitgetheilten Versuchen die Oberfläche des blanken Metalles eine nur geringe ist; es werden sich mithin die zeitlichen Veränderungen wesentlich anders gestalten, wenn das Material von schwammiger Beschaffenheit ist. —

Für die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft vom Säuregehalte wurden in der vierten Mittheilung innerhalb der Dichtigkeitsgrenzen von 1,055 bis 1,279 die Formel

$$E_s = 1{,}850 + 0{,}917\,(s - s_0)$$

gefunden. s war dabei das specifische Gewicht der Säure, s_0 das des Wassers bei der Beobachtungstemperatur. Jüngst wurde eine Reihe von Beobachtungen angestellt, um die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft jeder einzelnen Platte des Elementes vom Säuregehalte kennen zu lernen. Es geschah dies in der Weise, dass zur Zeit der Beobachtung eine amalgamirte Zinkplatte, welche in einem Thoncylinder mit concentrirter Zinksulfatlösung stand, in entsprechende Verbindung mit dem Potentialgalvanometer gebracht wurde.

Die Potentialdifferenzen $P_s = Zn \mid ZnSO_4 + aq \mid H_2SO_4$ $+ aq \mid PbO_2$ und $p_s = Zn \mid ZnSO_4 + aq \mid H_2SO_4 + aq \mid Pb$ genügen in gleich befriedigender Weise, wie für E_s gefunden wurde, den linearen Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} P_s = 2{,}3275 + 0{,}5925\,(s - s_0) \\ p_s = 0{,}4775 - 0{,}3245\,(s - s_0) \end{cases}$$

Dabei ist $P_s - p_s = E_s$. Während also P_s mit zunehmender Säureconcentration wächst, nimmt p_s ab. Dabei geht die Veränderung der Potentialdifferenzen an der positiven Platte etwa mit der doppelten Geschwindigkeit vor sich, wie an der negativen Platte. —

Mit den vorliegenden dreizehn Abschnitten, deren experimentelle Durchführung in den Jahren 1889 bis 1893 erfolgte, glaube ich ein wenig zur Klärung der Theorie des Secundärelementes beigetragen zu haben.

Graz, Physik. Institut d. Univ., 1. Mai 1893.

---

13. *Ueber die Bestimmung der Länge eines Solenoids; von F. Himstedt.*

1. Hr. Heydweiller hat im 41. Bande dieser Annalen[1]) eine Methode angegeben, die Länge einer Drahtspule auf galvanischem Wege zu bestimmen. Man stelle das Solenoid so auf, dass seine ost-westlich gerichtete Axe durch die Mitte der Nadel einer Tangentenbussole geht: erste Hauptlage.[2]) Bezeichnet man den Abstand vom Mittelpunkte des Solenoids bis zu dem Mittelpunkt der Magnetnadel mit $^1/_2\, e$, den Radius, die Länge und die Windungszahl des Solenoids mit r, l und n, den Radius der mit nur einer Windung versehenen Tangentenbussole mit R, bezeichnet man ferner den Ausschlag, welchen die Magnetnadel anzeigt, wenn ein Strom Tangentenbussole und Solenoid hintereinander und in gleichem Sinne durchfliesst, mit α, wenn in entgegengesetztem Sinne, mit α_1 so besteht die Relation:

$$(1)\qquad 8\,r^2 n\,R\left(1 - 0{,}19\,\frac{\lambda^2}{R^2}\right)\frac{e\,(1-\Theta)}{(e^2 - l^2)^2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1}$$

wo

$$\Theta = 6\,r^2\,\frac{e^2 + l^2}{(e^2 - l^2)^2}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2\,r^2}\right) - 10\,r^4\,\frac{3\,e^4 + 10\,e^2 l^2 + 3\,l^4}{(e^2 - l^2)^4}$$

λ der Polabstand der benutzten Magnetnadel ist.

Bringt man jetzt das Solenoid aus der Entfernung $^1/_2\, e$ in eine andere Entfernung $^1/_2\, e'$ so erhält man eine der Gleichung (1) entsprechende, in welcher nur e durch e', Θ durch Θ' und der Ausdruck $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1)/(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1)$, welcher der Kürze wegen mit p bezeichnet werden soll, durch p' zu ersetzen ist. Combinirt man diese Gleichungen in passender Weise, so ergibt sich:

$$(2)\qquad l = \sqrt{\frac{q\,e^2 - e'^2}{q - 1}} \qquad q^2 = \frac{p}{p'}\cdot\frac{e'\,(1 - \Theta')}{e\,(1 - \Theta)}\,.$$

---

1) Heydweiller, Wied. Ann. **41.** p. 876. 1890.

2) Das Verfahren ist durchaus ähnlich dem für die Bestimmung des Polabstandes eines Stabmagneten.

Nachdem auf diese Weise l bestimmt ist, findet man dann weiter den Radius des Solenoids aus der Gleichung:

$$(3)\quad \begin{cases} r^2 = p\,\dfrac{(e^2 - l^2)^2}{e(1-\Theta)} \cdot \dfrac{1}{8\pi R\left(1 - 0{,}19\,\dfrac{l^2}{R^2}\right)} \\[2ex] = p'\,\dfrac{(e'^2 - l^2)^2}{e'(1-\Theta')} \cdot \dfrac{1}{8 N R\left(1 - 0{,}19\,\dfrac{l^2}{R^2}\right)} \end{cases}$$

Ganz ähnliche Gleichungen lassen sich ableiten für den Fall, dass man das Solenoid in der zweiten Hauptlage, d. h. südlich oder nördlich von dem Magneten der Tangentenbussole aufstellt. [1]

Diese Beziehungen hat Hr. Heydweiller dazu benutzt, auf galvanischem Wege die Länge und den Radius des Solenoids zu bestimmen, welches Hr. Roiti [2] bei seiner Ohmbestimmung benutzt hat. Das Resultat seiner Messungen fasst Hr. Heydweiller zusammen in dem Satze: „. . . dass die galvanische Fernwirkung solcher Spulen nach den bisher angewandten Formeln sich nicht mit hinreichender Genauigkeit aus den geometrischen Ausmessungen berechnen lässt, und dass daher alle darauf basirten absoluten Maassbestimmungen wahrscheinlich erheblicher Correctionen bedürfen.“ Hr. Heydweiller beschränkt seine Schlussfolgerung ausdrücklich auf sehr lange Solenoide [3], wie mir aber scheint, nicht mit Recht. Es ist bekannt, dass man bei der Berechnung der Fernwirkung einer Spule entweder ausgehen kann von dem Biot-Savart'schen Gesetz und die Wirkung berechnen durch Integration über die sämmtlichen Windungen oder aber, dass man sich die geometrischen Endflächen des Solenoids mit magnetischer Masse belegt denken kann und die Wirkung dieser berechnen. Beide Wege führen zu dem gleichen Resultate. Wenn also Hr. Heydweiller durch seine Messungen nachgewiesen hätte, dass die galvanisch bestimmten Grössen des Radius und der Länge eines Solenoids nicht identisch wären mit den geometrisch gemessenen Grössen, so würde man meiner Ansicht nach ganz allgemein daraus folgern müssen, dass die Fernwirkung einer Spule aus dem Biot-Savart'schen

1) Heydweiller, l. c. p. 881.
2) Roiti, Exn. Rep. 20. p. 615. 1884.
3) Heydweiller, l. c. p. 886.

Gesetze durch Integration über die Windungen nicht mit genügen- Genauigkeit gefunden werden kann, denn in Bezug auf diese Integration besteht kein Unterschied zwischen kurzen und langen Spulen. Es würden mithin nicht nur die Messungen, welche unendlich lange Solenoide benutzen, sondern alle Messungen, bei denen die Fernwirkung galvanischer Spulen benutzt ist, einer Correction bedürfen, denn wenn bei den letzteren auch vielleicht die Länge gar keine Rolle spielt, so würde doch jedenfalls der Radius in Betracht kommen und für diesen glaubt ja Hr. Heydweiller auch eine Differenz zwischen den Resultaten der galvanischen und geometrischen Ausmessungen constatiren zu können.[1])

Ich habe es deshalb nicht für überflüssig gehalten, die Messungen des Hrn. Heydweiller an einem langen Solenoid zu wiederholen. Meine Messungen bestätigen die von Hrn. Heydweiller gezogene Schlussfolgerung nicht.

Ehe ich indessen dazu übergehe, meine Messungen zu beschreiben, möchte ich darzuthun versuchen, dass auch die Messungen des Hrn. Heydweiller kaum als Beweis für seine Behauptung angesehen werden können.

2. Hr. Heydweiller hat im ganzen vier Messungen in der ersten Hauptlage ausgeführt; die gemessenen Grössen waren

Nr.	e	e'	p	p'
1	323,994 cm	526 469 cm	2,94825	0,58285
2	324,392 „	526,869 „	2,93185	0,58127
3	323,994 „	526.469 „	2,94968	0.58336
4	324,392 „	526,869 „	2,93859	0,58200

Hr. Heydweiller berechnet nun die Versuche in der Weise, dass er stets die in einer Horizontalreihe stehenden Grössen als zu einem Versuche gehörend betrachtet und erhält

Nr.	l	r
1	117,222 cm	15,4832 cm
2	116,940 „	15,4849 „
3	117,104 „	15,4899 „
4	117,249 „	15,4886 „
Mittel	117,129 cm	15,4866 cm
Geomet. Messung	116,707 „	15,4966 „
Differenz	0,36 Proc.	0,064 Proc.

1) Heydweiller, l. c. p. 884.

Offenbar bildet aber jedes e mit seinem p resp. jedes e' mit seinem p' eine in sich abgeschlossene Beobachtung und man ist deshalb berechtigt, wie der Hr. Verfasser auf eine Mittheilung mir auch zu bestätigen die Freundlichkeit hatte, für die Berechnung des l jedes e, p mit jedem e', p' zu combiniren, ja man muss dies offenbar thun, wenn man ein Urtheil über die erzielte Genauigkeit haben will. Ich habe deshalb diese Rechnungen für die Beobachtungen des Hrn. Heydweiller ausgeführt. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, deren Anordnung wohl ohne Weiteres klar ist.

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1'	117,222	116,980	117,372	117,546
e_2'	117 448	116,940	117,457	117,632
e_3'	116,967	116,504	117,104	117,420
e_4'	116,989	116,567	117,064	117,240

Mittel 117,150.

Wie man sieht, beträgt die grösste Abweichung über 0,9 Proc., der mittlere Fehler jedes einzelnen Resultates berechnet sich zu 0,29 Proc. Da erscheint es wohl kaum gerechtfertigt, der noch nicht 0,4 Proc. betragenden Differenz, welche sich zwischen den Resultaten der galvanischen und der geometrischen Ausmessung ergeben hatte, besonderes Gewicht beizulegen. Beachtet man weiter, dass die geometrische Bestimmung des l einer sehr grossen Genauigkeit fähig ist, so wird man, glaube ich, mit voller Berechtigung schliessen dürfen, die hier hervorgetretene Differenz ist auf Kosten der galvanischen Ausmessung zu setzen und nicht, wie es Hr. Heydweiller gethan hat, auf Kosten der geometrischen Bestimmung. Eine Discussion der bei der galvanischen Ausmessung nöthigen Beobachtungen wird diese Schlussfolgerung noch einleuchtender erscheinen lassen.

Hr. Heydweiller hat schon darauf aufmerksam gemacht[1], dass bei seinen Versuchen die Fehler in e und e' mit dem neun- resp. achtfachen, solche in p und p' mit dem 2,5fachen Betrage in dem Werthe von l auftreten. Die Werthe

1) Heydweiller, l. c. p. 885.

von e und e' werden sich bei grosser Sorgfalt mindestens auf 0,01 Proc. genau messen lassen, also nach dieser Seite der Fehler in l sich wohl bestimmt auf 0,1 Proc. herabdrücken lassen. Anders ist die Sache bei den mit p bezeichneten Grössen. Bei dem Abstande e' lagen die Ausschläge der Magnetnadel bei Hrn. Heydweiller's Beobachtungen [1]) zwischen 190 und 40 Scalentheilen, je nachdem Solenoid und Tangentenbussole in gleichem oder entgegengesetztem Sinne wirkten. Nehmen wir einmal an, sie seien gerade $x = 190$ und $x' = 40$ gewesen, so würde sich hieraus ergeben, da A der Scalenabstand $= 3000$ Sc. war

$$p' = \frac{x - x'}{x + x'}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{x x'}{A^2}\right) = 0{,}652\,105.$$

Wäre nun aber x' nur um 0,1 Scalentheil falsch beobachtet, also 40,1 statt 40,0 gefunden, so würde sich ergeben

$$p' = 0{,}\ 651\,387,$$

d. h. ein um 0,11 Proc. abweichender Werth. Dadurch würde aber l um 0,28 Proc. falsch werden. Bedenkt man nun, dass bei der Ablesung mit Fernrohr Spiegel und Scala die Zehntel der Millimeter nur durch Schätzung gefunden werden, beachtet man weiter, dass als Stromquelle eine Batterie von 27—35 Daniell'schen Elementen benutzt werden musste, also kleine Stromschwankungen höchst wahrscheinlich nicht zu vermeiden waren, so wird man zugestehen müssen, dass ein Ablesungsfehler von 0,1 mm gewiss nicht zu den Unmöglichkeiten gehört. Ein solcher Fehler von 0,1 mm bei den Ablenkungsbeobachtungen des Magnets würde aber, selbst wenn alle anderen Beobachtungen absolut fehlerfrei wären, was kaum anzunehmen, schon im Stande sein, fast die ganze Abweichung zu erklären, auf welche Hr. Heydweiller den Eingangs erwähnten Schluss betr. des l gründet.

Nicht eigentlich günstiger liegen die Verhältnisse bei den Messungen des Hrn. Heydweiller hinsichtlich des Radius. r wird berechnet aus der p. 584 angeführten Gleichung (3). Hr. Heydweiller setzt bei der Berechnung der r für das in der Formel vorkommende l den jedesmal aus dem betreffen-

---

1) Heydweiller, l. c. p. 884.

den Versuche berechneten Werthe ein, also in der p. 585 angeführten Tabelle ist der erste Werth 15,4832 berechnet, indem für l gesetzt ist, 117,222 der zweite Werth $r = 15,4849$ ist berechnet mit $l = 116,940$ etc. Richtiger ist es aber offenbar, bei der Berechnung von r aus den verschiedenen Versuchen stets denselben Werth von l zu benutzen und zwar denjenigen, welchen die Versuche als den wahrscheinlichsten ergeben haben, d. h. den oben gefundenen Mittelwerth $l = 117,150$. Mit diesem l ergeben sich aus Hrn. Heydweiller's Beobachtungen für p folgende Werthe:

1. Versuch	$r = 15,4840$	und	15,4857
2. „	$r = 15,4764$	„	15,4816
3. „	$r = 15,4878$	„	15,4892
4. „	$r = 15,4926$	„	15,4899

Mittel $r = 15,4859$
Geomet. Messung $r = 15,4966$ Differenz 0,069 Proc.

Die Uebereinstimmung der Einzelwerthe ist also wieder bei richtiger Berechnung eine weit weniger gute, als bei der Berechnung Heydweiller's; immerhin könnte es auffällig erscheinen, dass alle Messungen Werthe ergeben haben, die kleiner sind, als das Resultat der geometrischen Ausmessung. Allein hier darf der folgende Punkt nicht übersehen werden. Ich glaube im Vorhergehenden gezeigt zu haben, dass der durch die galvanische Ausmessung gefundene Werth von l kein besonderes Vertrauen verdient, und es scheint mir deshalb sehr beachtenswerth, dass, mit diesem Werthe berechnet, das r zu klein ausfällt, dass hingegen, wenn man für l den durch die geometrische Ausmessung gefundenen Werth 116,707 benutzt, man nun auch für r aus den galvanischen Messungen einen Werth erhält, nämlich $r = 15,4985$, der mit dem geometrisch bestimmten 15,4966 bis auf fast 0,01 Proc. übereinstimmt.

3. Für die Versuche, welche ich selbst angestellt habe nach der Methode des Hrn. Heydweiller, habe ich ein Solenoid benutzt, dass auf einen Glascylinder gewickelt war. Die genauere Beschreibung der Wickelung soll bei einer anderen Gelegenheit erfolgen. Es genüge hier zu erwähnen, dass unbesponnener Kupferdraht mit Hülfe der Schraube einer Theilmaschine auf den mit aller Sorgfalt geschliffenen Glas-

cylinder gewickelt, und auf diesem nach der Wickelung durch darauf getragene Schellacklösung befestigt war. Auf diese Weise ist für die Isolation wie für die gleichmässige Wickelung eine sehr grosse Sicherheit erzielt. Radius, Länge und Anzahl der Windungen des Solenoids betrugen

$$r = 11{,}6546 \text{ cm} \qquad l = 96{,}705 \text{ cm} \qquad n = 3190.$$

Die Dicke des benutzten Drahtes betrug 0,022 cm.

Die Tangentenbussole bestand aus einem geschliffenen Glasringe, um welchen eine Drahtwindung von demselben Drahte gelegt war, der bei dem Solenoid verwendet war. Das eine Ende des Drahtes war an eine dünne, 30 cm lange Kupferröhre gelöthet, das andere Ende war im Innern dieser Röhre entlang geführt, von ihr isolirt durch eine dünne Glasröhre, in welche es mit Siegellack eingekittet war. Eine Correction wegen der Zuleitung war deshalb bei dieser Tangentenbussole nicht nöthig. Der Magnet der Bussole hatte 1 cm Länge, war an einem Quarzfaden aufgehängt und in den ersten Versuchen nur mit Luftdämpfung versehen, später aber noch in einen Kupferdämpfer eingeschlossen. Der Radius der Tangentenbussole war

$$R = 24{,}712 \text{ cm}.$$

Anfangs verfuhr ich genau wie Hr. Heydweiller[1]), es gelang mir aber nicht, bei wiederholten Messungen für die Entfernungen e gut übereinstimmende Resultate zu erhalten. Ich liess deshalb in der Folge die Tangentenbussole stets an ihrem Orte, stellte das Solenoid westlich resp. östlich davon auf und wählte die Abstände so, dass ich mit einem Comparator, dessen Maassstab 160 cm lang war, direct, unter Vermeidung aller Senkel, die Entfernung von dem Drahte der Tangentenbussole bis zu der ersten Windung des Solenoids messen konnte. Bei jedem Versuche wurde diese Entfernung vor und nach der Bestimmung des p gemessen. Die Resultate wichen höchstens um 0,05 mm von einander ab, stimmten aber meist fast vollkommen überein. Dadurch, dass diese Messungen auf beiden Seiten ausgeführt wurden, also sowohl

1) Heydweiller, l. c. p. 883.

AB als *CD* der Figur gemessen wurden, erhielt man zugleich eine Controlle, dass die Axen der Tangentenbussole *T* und des Solenoids *S* eine gerade Linie bildeten. Aus den so gemessenen Entfernungen *d* ergab sich das in der Formel benutzte *e*

$$e = 2\sqrt{d^2 - (R - r)^2} + l.$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die Theilungsfehler des Comparatormaassstabes bekannt waren und dass die Längen alle auf ein Normalmeter bezogen wurden, welches in der Normalaichungscommission mit dem Normal verglichen war. Neun Versuche, in dieser Weise angestellt, ergaben für *l* die Werthe

B T D R d d r A C S

96,812, 901, 800, 856, 549, 649,
817, 772, 663, 609
Mittel 96,743.

Sechs Versuche, in der zweiten Hauptlage ausgeführt, ergaben

96,766, 561, 643, 582, 788, 585
Mittel 96,655
Geometrische Ausmessung 96,705.

Ich hatte damals die ganze Methode noch nicht in der Weise kritisch durchgearbeitet, wie ich es im Vorhergehenden angedeutet habe. Ich glaubte deshalb, da ich die Beobachtungen mit der grössten Sorgfalt ausgeführt hatte, trotzdem aber lange nicht die gute Uebereinstimmung unter den Einzelmessungen erreicht hatte, welche Hr. Heydweiller, nach seiner Publication zu urtheilen, erreicht hatte, dass vielleicht doch in dem Solenoid ein Isolationsfehler stecke. Ich wurde in dieser Annahme bestärkt dadurch, dass eine mit diesem Solenoid ausgeführte Ohmbestimmung ganz unmögliche Werthe ergeben hatte.[1]) Ich entschloss mich deshalb, das Solenoid abzuwickeln und mit neuem Drahte (Durchmesser 0,0263 cm) so zu bewickeln, dass die Steighöhe der Schraubenlinie, in

1) Später stellte sich heraus, dass die erhaltenen Werthe nur infolge eines Fehlers bei der Ausrechnung falsch gefunden waren.

welcher der Draht um den Glascylinder gelegt wurde, grösser wurde. Radius, Länge und Windungszahl des neu gewickelten Solenoids ergaben sich

$$r = 11{,}657\,, \quad l = 96{,}985\,, \quad n = 2132.$$

Mit diesem Solenoid habe ich eine grosse Zahl von Beobachtungen in der ersten wie in der zweiten Hauptlage angestellt. Als Stromquelle dienten 33—45 grosse Tudoraccumulatoren. Die Doppelausschläge der Magnetnadel betrugen bei 3,5 m Scalenabstand bei der kleinen Entfernung zwischen Solenoid und Tangentenbussole 1200 bez. 600 Sc., in der grossen Entfernung 500 bez. 10—20 Sc. Trotzdem auf diese Weise die Verhältnisse für die Bestimmung der p bedeutend günstiger waren, als bei Hrn. Heydweiller (ein Ablesungsfehler von 0,1 mm bedingte einen Fehler in p bez. p' von 0,02 bez. 0,04 Proc. gegen 0,045 bez. 0,11 Proc. bei Hrn. Heydweiller), ist es mir nicht gelungen, die Differenzen zwischen den Resultaten der Einzelbeobachtungen unter 0,2 Proc. bis 0,4 Proc. herabzudrücken. Ich halte es deshalb für überflüssig, meine Beobachtungen in extenso mitzutheilen, und beschränke mich darauf, die Mittelwerthe der einzelnen Beobachtungsreihen anzuführen, sowie den grössten und kleinsten Werth, welcher bei einer Beobachtungsreihe vorgekommen ist. Ich bemerke noch, dass für jede neue Versuchsreihe die Apparate neu aufgestellt werden mussten, da der einzige Raum, welcher für die Versuche genügend festen Fussboden hatte, ein grosser Corridor mit Terrazzoboden, mir nur in den Ferien zur Verfügung stand.

Es sind deshalb die einzelnen Beobachtungsreihen vollkommen unabhängig von einander. Jede Beobachtungsreihe ist für sich in der p. 586 angegebenen Weise berechnet, sodass also z. B. acht von einander unabhängige Beobachtungen bei der Ausrechnung 64 Werthe für l ergeben.

	Anzahl der Werthe	Haupt-lage	Grösster Werth	Kleinster Werth	Mittel
10./9.—13./10. 1891	64	1	97,199	96,787	96,981
18./12. 91—4./1. 92	36	2	97,253	97,030	97,146
12./8.—15./10. 1892	36	1	97,175	96,900	96,971
	16	2	97,221	96,873	96,982
29./3.—20./4. 1893	49	1	97,130	96,753	97,043

Obgleich das Mittel aller dieser Beobachtungen $l = 97{,}024$ nur um 0,04 Proc. verschieden ist von dem durch geometrische Ausmessung gefundenen Werthe $l = 96{,}985$, glaube ich dieser Uebereinstimmung doch nicht unbedingte Beweiskraft beilegen zu sollen, weil, wie erwähnt, bei den Einzelbeobachtungen Abweichungen bis zu 0,4 Proc. vorkommen.

Ich glaube aber auf Grund dieser Beobachtungen sowie der vorstehenden Besprechung der Heydweiller'schen Messungen meine Ansicht dahin aussprechen zu sollen: Die Behauptung des Hrn. Heydweiller, die galvanisch gemessene Länge eines Solenoids stimme mit der geometrisch bestimmten Länge nicht überein, ist durch die Messungen des Hrn. Heydweiller nicht bewiesen, durch meine Beobachtungen aber sehr unwahrscheinlich gemacht. Die Methode des Hrn. Heydweiller erscheint nicht sehr geeignet, diese Frage zu entscheiden.

4. Wie oben schon erwähnt, hatte Hr. Heydweiller aus seinen Messungen weiter noch den Schluss gezogen, dass auch der galvanisch bestimmte Radius nicht übereinstimme mit dem geometrisch gemessenen. Dass seine Messungen nicht als Beweis für diese Behauptung angesehen werden können, glaube ich p. 588 gezeigt zu haben. Meine Messungen liefern, wie ich glaube, den sicheren Beweis, dass diese Behauptung nicht richtig ist. Ich habe gefunden:

10./9.—13./10. 1891	1.	Hauptlage	$r = 11{,}6565$
18./12.—4./1. 1892	2.	„	$r = 11{,}6557$
12./8.—15./10. 1892	1.	„	$r = 11{,}6588$
	2.	„	$r = 11{,}6563$
29./3.—20./4. 1893	1.	„	$r = 11{,}6586$
		Mittel	$r = 11{,}6572$
		Geometr. Messung	$r = 11{,}6570$

Der grösste Werth, welchen je eine Einzelbeobachtung ergeben hat, war 11,6596, der kleinste 11,6540.

Giessen, April 1893.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1893. ANNALEN № 8.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 49.

1. *Polarisation ungebeugter ultrarother Strahlung durch Metalldrahtgitter;*
von H. E. J. G. du Bois und H. Rubens[1]).

(Hierzu Taf. III.)

(Inhalt: Einleitung; I. Theil: Versuchsanordnung, Orientirungsversuche, Hauptversuche, Controllversuche; II. Theil: Allgemeine Discussion, Einfluss der Beugung, Pleochroïtisches Krystallmodell, Vergleich mit den Hertz'schen Gittern.)

Einleitung.

§ 1. In einer früheren Untersuchung hat der Eine von uns gezeigt, dass polarisirtes Licht, welches blanke Silberdrahtgitter durchstrahlt, ohne dabei eine Beugung zu erleiden, im allgemeinen eine Drehung seiner Polarisationsebene erfährt.[2]) Die Bestimmung dieser Drehung als Function des Polarisationsazimuths führte zu dem Schlusse, dass die Durchlässigkeit solcher Gitter für ⊥ zur Drahtrichtung polarisirtes Licht eine grössere ist als für || dazu polarisirtes.[3]) Das Verhältniss der ersteren zur letzteren, welches wir kurz das „Durchlässigkeitsverhältniss" nennen, sei n^2; es ist in dem damals untersuchten sichtbaren Spectralbereiche $n^2 > 1$.

Es wurde ferner festgestellt, dass n^2 mit abnehmender Oeffnungsbreite der Gitter, ebenso wie mit zunehmender

1) Die anfänglichen Ergebnisse vorliegender Untersuchung sind in den Berl. Sitzungsber. Dec. 1892 p. 1129 mitgetheilt worden. Im Folgenden geben wir eine zusammenhängende, unsere Arbeit vorläufig abschliessende Bearbeitung der damals veröffentlichten Resultate mit den seither neu gewonnenen.

2) du Bois, Reflex. und Transm. des Lichtes durch gewisse äolotrope Gebilde II. Theil, Wied. Ann. **46.** p. 548. 1892; zur Polarisation des ungebeugten Lichtes durch Gitter, Wied. Ann. **48.** p. 546. 1893; Auf erstere Arbeit werden wir im Texte häufig als (l. c.) Bezug nehmen.

3) Der Kürze halber sind im Folgenden die Symbole || oder ⊥ für parallel bez. senkrecht durchweg benutzt.

Wellenlänge, wächst, dagegen von der Drahtstärke ziemlich unabhängig ist. Schliesslich wurde auf die Analogie der von Hrn. Hertz eingeführten Gitterpolarisatoren für electromagnetische Strahlung [1]) mit den benutzten feinen Gittern hingewiesen, jedoch mit folgender Verwahrung (l. c. p. 562): „Wo bei diesen der Werth n^2 bis zu 1,13 gefunden wurde, ist er bei jenen Null; dementsprechend tritt an Stelle des durch Gleichung (4) ausgedrückten Verhaltens ein dem Malus'schen ähnliches Gesetz, wie es von Rubens und Ritter l. c. gefunden wurde. Da aber bei dem heutigen Stande der electromagnetischen Lichttheorie die electrischen Schwingungen als zur Polarisationsebene ⊥ angenommen werden müssen [2]), versagt die Analogie in einer Hauptsache, dem Sinne der Polarisation. Wäre doch dieser bei den Miniaturgittern ‖ der Drahtrichtung zu erwarten, entgegen dem Befunde."

§ 2. Zur weiteren Klärung dieser Frage wurde damals die Untersuchung noch feinerer Gitter aus verschiedenen Metallen im ultrarothen Spectralbereiche in Aussicht gestellt. Die Mittheilung unserer auf dieses Ziel gerichteten Versuche bildet den Inhalt des ersten Theiles vorliegender Arbeit, während wir im zweiten Theile einige sich daran knüpfende Folgerungen und Betrachtungen erörtern werden.

Auf dem angedeuteten Wege konnten wir zu räumlichen Verhältnissen zu gelangen hoffen, welche denen der Hertz'schen Gitterversuche schon bedeutend näher liegen. Wir wollen gleich vorweg bemerken, dass wir die scheinbare Oeffnungsbreite unserer Gitter bis auf ein Tausendstel Centimeter hinunter verringert haben, während wir zu Wellenlängen heraufgelangten, welche höchstens zwei Drittel dieses Werthes betrugen. Wir halten es für schwierig, vorläufig in dieser Beziehung weiter zu gelangen, als höchstens bis zur ungefähren Gleichheit der beiden Dimensionen.

---

1) Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 775. 1889. Es sei daran erinnert, dass diese Gitter eine merkliche Schwächung der Strahlung überhaupt nicht verursachen, falls der electrische Vector zur Drahtrichtung ⊥ steht. Bei ‖ Orientirung wird dagegen gar keine Strahlung hindurchgelassen, wenige Procente werden absorbirt, das Uebrige regelmässig reflectirt; vgl. Rubens und Ritter, Wied. Ann. **40.** p. 71 1890.

2) Vgl. Trouton, Phil. Mag. (5) **32.** p. 80. 1891; Klemenčič, Wied. Ann. **45.** p. 62. 1892.

Andererseits war bei den bisher angestellten electromagnetischen Gitterversuchen das Verhältniss der Wellenlänge zur Oeffnungsbreite mindestens das zwanzigfache. Die Ausführung unserer Versuche in 10 000fachem Linearmaassstabe würden Oeffnungsbreiten von 10 cm und Wellenlängen von derselben Grössenordnung erheischen.

Jene von uns erreichte geringste Oeffnungsbreite von 0,001 cm haben wir der Bequemlichkeit halber als Einheit angenommen und dementsprechend alle vorkommenden kleinen Grössen in Millicentimetern (mcm $= 10^{-3}$ cm) ausgedrückt. Die hauptsächlich angewandten Bezeichnungen stellen wir hier übersichtlich zusammen; die Definitionen der betreffenden Grössen sind an geeigneter Stelle gegeben.

d Durchmesser der Gitterdrähte; a, a' wahre, bez. scheinbare Gitterconstante; b, b' wahre, bez. scheinbare Oeffnungsbreite; $\mathfrak{p} = b/a$ Oeffnungsverhältniss; β Neigungswinkel; ν Polarisationsazimuth; γ Beugungswinkel; m Ordnungszahl; λ Wellenlänge.

Ferner A Strahlungsintensität; Q centrale Durchlässigkeit; $\mathfrak{n}^2 = Q_s/Q_p$ Durchlässigkeitsverhältniss; die Indices s und p beziehen sich auf die $\perp$ bez. $\parallel$ zur Drahtrichtung polarisirten Strahlungscomponenten.

I. Theil.

Versuchsanordnung.

§ 3. Die bolometrische Methode der Strahlungsmessung im ultrarothen Spectrum kann heute als eine zuverlässige und in allen Einzelheiten durchgearbeitete betrachtet werden; es erschien uns daher angezeigt, mit ihrer Hülfe die Intensität der $\perp$ bez. $\parallel$ der Drahtrichtung polarisirten Strahlung, nach ihrem Durchgang durch das Gitter, direct zu messen, statt wie früher die resultirende Drehung zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bedienten wir uns bei der weitaus grössten Anzahl der Versuche der in Fig. 1, Taf. III schematisch dargestellten Anordnung; diese war zwar etwas complicirt, dafür aber, wie wir glauben, einwurfsfrei. Einfachere Einrichtungen, wie wir sie bei einigen mehr qualitativen Controllversuchen benutzten, sollen an geeigneter Stelle beschrieben werden (§§ 20, 21).

In A befand sich in einem Schutzkasten die Strahlungsquelle. Bei der Mehrzahl der Versuche war dies ein Zirkon-

brenner; um dabei eine möglichst unveränderliche Flammengestalt behufs Erlangung constanter Strahlungsintensität zu erzielen, waren in die Zuleitungen des Leuchtgases wie des Sauerstoffs Druckregulatoren eingeschaltet. Um bei Wellenlängen über 0,4 mcm noch genügende Energie zu erhalten, waren wir in einigen Fällen genöthigt, eine Hefner'sche Contactbogenlampe anzuwenden. Bei sorgfältiger Regulirung brannte diese mit einem Strome von 22 Amp. aus dem städtischen Leitungsnetze ruhig genug, um wenigstens auf einige Zeit als constant betrachtet werden zu können.

Die Strahlen der Lichtquelle wurden durch eine Sylvinlinse l_1 von kurzer Brennweite auf der Blende d zu einem reellen Bilde vereinigt, von dem die kreisrunde Blendenöffnung einen entsprechenden Theil hindurchliess. Manchmal wurde auch der Krater der wie üblich zurückgestellten positiven Dochtkohle direct in d eingestellt. Dieser projicirte sich dann als ein runder glühender Fleck von etwa 0,7 cm Durchmesser, von dem man annehmen durfte, dass er fast den vollen Betrag der überhaupt von dem Kohlenpaare ausgesandten Strahlung lieferte. Hinter dem Diaphragma wurden die Strahlen durch die Steinsalzlinse l_2 || bez. schwach convergent gerichtet und dann unter einem Polarisationswinkel von etwa 55°, dessen Dispersion vernachlässigt werden durfte, an einem Glasplattensatz G reflectirt. Dieser bestand aus zwei ca. 0,025 cm dicken „Deckglas"platten, welche in möglichst Lage auf einer 0,3 cm starken, auf der Rückseite geschwärzten, verticalen Glasplatte befestigt waren. Wir erreichten durch diese Vorrichtung, dass die reflectirten Strahlen nahezu vollkommen in der Horizontalebene linear polarisirt waren und behielten, da die Reflexion an fünf hintereinanderliegenden Flächen erfolgte, ungefähr ein viertel bis ein drittel der auffallenden Strahlung, d. h. drei- bis viermal mehr, als mit einer einzigen schwarzen Glasplatte. Durch die geringe Dicke der Deckglasplatten wurde ferner deren Absorption für Strahlen grösserer Wellenlänge möglichst verringert.

§ 4. Nach der Reflexion am Glasplattensatz G trafen die Strahlen den in Fig. 2, Taf. III perspectivisch dargestellten Apparat, welcher zur Aufnahme des Gitters diente. Er bestand aus einem ca. 5 cm weiten Messingrohre $\overline{FF'}$, welches

an einem Ende unter 90°, an dem anderen unter 44,4° Neigung zu seiner Axe abgeschnitten war. Beide Enden waren mit Verschlussplatten (*A* und *B*) versehen, von denen sich diejenige, welche die senkrecht abgeschnittene Rohröffnung verschloss, nach Belieben entfernen liess. Beide Platten, sowohl *A* als *B*, waren centrisch gebohrt, sodass ein Strahlenbündel von genau kreisförmigem Querschnitt hindurchgelassen wurde. Die Oeffnung in der Platte *B* hatte dazu die Form einer Ellipse, deren Axen sich wie 7 zu 10 verhielten. Durch zwei kreisförmige Blenden von passendem Durchmesser, welche in unmittelbarer Nähe der Platten *A* und *B* eingesetzt wurden, konnte der Querschnitt des durch den Apparat hindurchgehenden Strahlenbündels nach Bedürfniss auch verringert werden. Ausserdem liess sich eine dritte Platte *C* aufsetzen, welche dann um das Charnier *NN'* drehbar war; sie war in der Normalstellung auf der Drehbank senkrecht zur Rohraxe justirt; ihre Neigung gegen diese ihre Nulllage konnte mittelst des in Fig. 2 abgebildeten getheilten Kreisbogens zwischen 0° und 45° beliebig abgelesen, bez. eingestellt werden.

Das Rohr *FF'* war im Innern eines Metallringes *Q* derart angebracht, dass es um seine Axe gedreht werden konnte; durch sorgfältiges Einschleifen wurde bewirkt, dass bei dieser Drehung die Axe eine unveränderte Lage beibehielt. Der Metallring *Q* bildete das obere Ende eines massiven Messingstativs, welches durch Kniegelenke nach jeder Richtung hin justirt und durch Schrauben in jeder Lage festgestellt werden konnte. Das Gitter selbst wurde nach Belieben auf den Endplatten *A*, *B* oder *C* mit Hülfe zweier Schraubklammern befestigt, sodass die Gitternormale auf der betreffenden Platte senkrecht stand, d. h. entweder der Strahlrichtung parallel war oder mit dieser einen Winkel von 45,6° bildete; bei Befestigung auf den geneigten Platten *B* oder *C* wurde die Drahtrichtung der zur Rohraxe senkrechten Charnierrichtung *NN'* ‖ gestellt. Die auf dem Rohr angebrachte Kreistheilung ermöglichte mit Hülfe der auf *Q* befindlichen Marke die Einstellung des Rohres, bez. Gitters in bestimmten Azimuthen.

Hinter dem Apparat *Q* befand sich eine zweite Steinsalzlinse l_3, welche die Strahlen in die Spaltebene eines zu Messungen im ultrarothen Spectrum eingerichteten Spectro-

meters vereinigte. Hier entstand also ein reelles Bild des ersten kreisförmigen Diaphragmas *d*, dessen verticaler Durchmesser auf den Spalt *s* fiel. Wurde dann ein Gitter in der beschriebenen Weise auf dem Apparate *Q* befestigt, so erblickte man neben dem Centralbilde eine Reihe von Beugungsbildern in der bekannten symmetrischen Anordnung. Da es sich in der vorliegenden Arbeit *ausschliesslich um die Untersuchung des Centralbildes* handelt, wurde die Grösse des Diaphragmas *d* und die Länge des Spaltes *s* je nach der zu untersuchenden Wellenlänge so gewählt, dass in keiner Stellung des Gitters eins der Beugungsbilder auf den Spalt fallen konnte. Die Aenderung der Spaltlänge bez. des Durchmessers des Diaphragmas *d* geschah durch jeweiliges Einsetzen besonderer Blenden an beiden Stellen. Da der Abstand der Beugungsbilder vom Centralbilde unter sonst gleichen Umständen der Wellenlänge der betreffenden Strahlung proportional ist, so war es vollkommen statthaft, mit wachsender Wellenlänge weitere Diaphragmen und grössere Spaltlängen anzuwenden, deren Dimensionen sich in einfacher Weise aus den Brennweiten der Linsen l_2 und l_3, sowie aus der Gitterconstante berechnen liessen. Derselbe Grund berechtigte uns, um das Arbeiten bei den grössten Wellenlängen noch zu ermöglichen, den Krater der Bogenlampe ohne weiteres an Stelle von *d* zu setzen, wie oben erwähnt wurde.

§ 5. Das benutzte Wärmespectrometer war ein Instrument der Firma Schmidt und Hänsch, in welchem das Fadenkreuz des Fernrohrs durch den temperaturempfindlichen Widerstand eines Linearbolometers ersetzt war. Die Einrichtung dieses Bolometers ist von dem Einen von uns[1]) bei Gelegenheit einer früheren Untersuchung beschrieben worden. Der Bestrahlungswiderstand *B* bestand aus drei 0,02 cm breiten und 1 cm langen nebeneinander aufgespannten Streifen sehr dünnen Eisenbandes, welches durch Flachhämmern eines 0,004 cm dicken Eisendrahtes hergestellt war. Die Breite des Bolometers betrug 0,07 cm, sein Widerstand 4,5 Ohm. Meist betrug die Stärke des Hauptstromes in der Wheatstone'schen Brücke etwa 0,04 Amp. Dies entsprach einer Empfindlichkeit

1) Rubens, Wied. Ann. **45**. p. 238. 1892.

des Bolometers, welche ungefähr durch den Umstand definirt ist, dass dessen Bestrahlung durch eine in 1 m Abstand befindliche Hefner'sche Amylacetatlampe einen Scalenausschlag von etwa 500 mm hervorbrachte.

Dieser Ausschlag wurde mit einem der modificirten astatischen Galvanometer erhalten, welche wir kürzlich beschrieben haben[1]), und bei welchen neben hoher Empfindlichkeit hauptsächlich die Erreichung genügender Erschütterungslosigkeit selbst unter ungünstigen Umständen ins Auge gefasst wurde. Bei den zur vorliegenden Untersuchung gehörigen Beobachtungen, welche zu beliebigen Tageszeiten angestellt wurden, waren wir denn auch weniger bestrebt, hohe nominelle Empfindlichkeiten zu erreichen. Vielmehr haben wir uns durch die bekannte einfache Regel leiten lassen, stets unter Berücksichtigung sämmtlicher Fehlerquellen und störender Umstände das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers zum ganzen Scalenausschlag auf ein Minimum zu reduciren. Die Galvanometerspulen wurden nebeneinander geschaltet, sodass der gesammte Widerstand 5 Ohm betrug; im allgemeinen arbeiteten wir bei einer mässigen Astasirung; die volle Periode (doppelte „Schwingungsdauer") betrug meistens nur 10″. Ein Mikroampère ergab hierbei wegen des grossen Scalenabstandes (5000 Scalentheile) einen Ausschlag von ca. 4000 Scalentheilen; andererseits entsprach ein Scalentheil einer Temperaturänderung des Bolometers um acht Millionstel Grad.

§ 6. Die Spectrometerobjective l_4 und l_5 bestanden aus Fluorit, ebenso wie das Prisma P, welches schon früher von Rubens und Snow[2]) auf seine Dispersion hin untersucht war, und dessen Brechungsindex daher bis zu einer Wellenlänge von 0,8 mcm als Function dieser letzteren bekannt war. Die Minimumstellung des Prismas wurde durch eine einfache kinematische Vorrichtung bewirkt. Die Minimalablenkung betrug für $\lambda = 0{,}059$ mcm. (D-Linie) $31^0 36'$; die Differenzen φ der geringeren Ablenkungen bei grösseren Wellenlängen gegen jene sind in Tab. 1 angegeben; dieser durch graphische Interpolation aus den Werthen von Rubens und Snow erhaltenen Daten

1) du Bois u. Rubens, Wied. Ann. **48.** p. 236. 1893.

2) Rubens u. Snow, Wied. Ann. **46.** p. 529. 1892.

bedienten wir uns bei den Beobachtungen zur Einstellung auf irgend einen der gewünschten Werthe von λ.

Tabelle 1.

φ	λ mcm	φ	λ mcm	φ	λ mcm
0° 0′	0,059	0° 38′	0,150	1° 46′	0,400
8′	0,067	50′	0,200	2° 2′	0,450
16′	0,080	1° 2′	0,250	19′	0,500
25′	0,100	16′	0,300	35′	0,550
31′	0,125	30′	0,350	52′	0,600

§ 7. Bei der gegenwärtigen Arbeit gelangten im ganzen acht Drahtgitter zur Untersuchung. Es wurde zu deren Herstellung sehr dünner Platin-, Kupfer-, Eisen-, Gold- und Silberdraht verwendet, welcher durch feine Bohrlöcher in Diamanten, bez. Rubinen gezogen worden war, mithin eine wohldefinirte, blanke, hochpolirte Oberfläche darbot. Leider gelang es uns nur, aus den drei zuerst genannten Metallen Draht von genau gleichem Durchmesser (2,5 mcm) zu beschaffen; für die Vergleichbarkeit der Resultate wäre es vortheilhafter gewesen, auch die anderen Metalle in derselben Drahtstärke zur Untersuchung heranziehen zu können. Der angegebene Werth dürfte die praktisch erreichbare untere Grenze für die Drahtstärke bilden, da das Ziehen noch feineren Drahtes in den für die Gitter erforderlichen langen Enden (bis zu 100 m) mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Auf die gute Oberflächenbeschaffenheit legen wir ein gewisses Gewicht, sodass wir die Benutzung von Wollastondraht nicht für zulässig halten; wir haben solchen von nur 1 mcm Durchmesser mikroskopisch untersucht und einen auffälligen Contrast mit den direct durch Diamant gezogenen Drähten beobachtet, deren Aussehen selbst bei stärkster Vergrösserung ein vollkommen sauberes bleibt. Aus demselben Grunde haben wir von dem einfachen Verfahren Abstand genommen, ein beliebiges Gitter mit verschiedenen Metallen galvanoplastisch zu überziehen. Wir befürchteten, dass sich der metallische Ueberzug gerade in dem engen Zwischenraume zwischen zwei Gitterdrähten, auf den es für die untersuchte Erscheinung ausschliesslich ankommt, nicht in solcher Beschaffenheit niederschlagen würde, dass er mit

polirtem massiven Metall ohne weiteres vergleichbar wäre. Auch wäre es nicht möglich, sich hierüber ohne weitgehende vergleichende Beobachtungen Sicherheit zu verschaffen.

§ 8. Die Herstellung guter regelmässiger Gitter aus so feinen Metalldrähten ist mit Schwierigkeiten verknüpft; sie ist nur durch die ausserordentliche Geschicklichkeit des hiesigen Institutsmechanikers Hrn. E. Nöhden möglich geworden, welcher mit dankenswerther Ausdauer ein Verfahren hierzu ersann und weiter entwickelte. Es werden dabei zwei genau gleiche Drahtenden bifilar auf einen doppelten Metallrahmen gewickelt. Die Drähte werden sorgfältig aneinandergeschoben, sodass es nach Fertigstellung kaum möglich ist, beim Hindurchblicken noch einen Lichtschimmer wahrzunehmen. Später wird dann das eine Drahtende durch Abwickeln wieder entfernt, das Uebrigbleibende in geeigneter Weise auf dem Doppelrahmen befestigt; endlich wird letzterer in seine beiden Theile zerlegt, sodass man immer zwei gleiche Gitter erhält. Offenbar wird bei diesem Verfahren die wahre Oeffnungsbreite b genau gleich dem Drahtdurchmesser d (vgl. § 29); die wahre „Gitterconstante", d. h. das periodische Intervall von Drahtaxe zu Drahtaxe $a = 2\,d = 2\,b$. Wird nun die Gitterebene gegen die Wellenfront geneigt, und zwar in der Weise, dass die Drahtrichtung dem Schnitte beider Ebenen parallel bleibt, so wird (l. c. Fig. 2, § 10) die scheinbare Gitterconstante a'

$$a' = a \cos \beta$$

und die scheinbare Oeffnungsbreite b'

$$b' = d(2 \cos \beta - 1).$$

Bei der oben angegebenen Neigung der Platte B gegen die Rohraxe (44,4°, Fig. 2, § 4) ist $\cos 45{,}6^0 = \sin 44{,}4^0 = 0{,}700$, sodass die scheinbare Oeffnungsbreite der drei feinsten Gitter ($d = 2{,}5$) bei Befestigung an jener Platte genau 1 mcm wurde. In Tab. 2 geben wir eine Zusammenstellung der auf der Theilmaschine ermittelten geometrischen Dimensionen der benutzten acht Gitter; die letzten drei dienten nur Controllzwecken. Die Gitterflächen hatten die Gestalt eines Rechtecks von 2—3 cm Seitenlänge, wurden aber stets durch kreisrunde Diaphragmen abgeblendet. Die Gitter wurden sämmtlich auf dem Spectrometer mit Natronlicht optisch untersucht, wie weiter unten

ausführlicher dargelegt werden soll (§ 28). Die relative Güte des Beugungsbildes, welches auf die Regelmässigkeit des Gitters schliessen lässt, haben wir durch Anbringen eines oder mehrerer Ausrufungszeichen (!) in Tab. 2 ungefähr charakterisirt. Die Regelmässigkeit der Eisengitter liess leider aus besonderen Gründen, u. a. wegen der krausen Beschaffenheit des hartgezogenen Drahtes, zu wünschen übrig.

Tabelle 2.

Gitter-Bezeichnung	Gerade; $\beta = 0^0$		Geneigt; $\beta = 45,6^0$		Bemerkungen
	a mcm	b mcm	a' mcm	b' mcm	
Pt 1!	5,00	2,50	3,50	1,00	Kupferhaltig
Cu 1!!	5,00	2,50	3,50	1,00	—
Fe 1	5,00	2,50	3,50	1,00	Sehr hartgezogen
Au 1!!!	6,62	3,31	4,64	1,33	Silberseele vergoldet
Ag 1!	9,12	4,56	6,39	1,83	= Ag II l. c. p. 548
Pt 2!!	9,60	4,80	6,72	1,92	angeblich rein
Cu 2!	10,50	5,25	7,35	2,10	—
Fe 2	12,18	6,09	8,52	2,43	etwas rostig

Orientirversuche.

§ 9. Bevor wir zur Ausführung der endgültigen Messungen schritten, haben wir uns durch orientirende Vorversuche davon überzeugt, dass unsere Apparate gut functionirten und eine Beobachtungsmethode ausgearbeitet, welche einwurfsfreie, wenn auch nicht sehr genaue Resultate zu liefern im Stande war.

Wir wollen zunächst erwähnen, dass es einer sorgfältigen Justirung und Centrirung aller den Strahlengang beeinflussenden Apparate von der Lichtquelle A bis zum Endpunkte der Strahlen am Bolometer B bedarf; eine Nichtbeachtung dieser Regel kann erhebliche Fehler nach sich ziehen. Waren die Apparate längere Zeit nicht benutzt worden, so wurde stets die gesammte Justirung erneuert; auf deren rein geometrisch-optische Einzelheiten gehen wir hier nicht näher ein. Wir wollen aber erwähnen, dass die Centrirung des Gitterträgers nur dann als ausreichend betrachtet wurde, wenn bei der Drehung des mit Blendung versehenen Rohres Q um seine Axe keine Ausschlagsänderung am Galvanometer eintrat, solange kein Gitter an den Endplatten befestigt war. Wurde

dann ein solches angebracht, so konnte man sicher sein, dass die bei der Drehung beobachtete Ausschlagsänderung lediglich eine specifische Wirkung des Gitters war.

Da die Intensität unserer Strahlungsquelle im sichtbaren Spectralbereiche noch verhältnissmässig gering war und wir ferner infolge unserer Versuchsanordnung genöthigt waren, in diesem Bereiche kleine Spaltblenden anzuwenden, so war es uns nicht möglich, für kleinere Wellenlängen als 0,08 mcm genaue Resultate zu erhalten. Die Intensitätscurve des Zirkonbrenners erreichte bei der von uns angewandten Dispersion ihr Maximum bei ca. 0,14 mcm und fiel dann anfangs rasch, später langsamer mit wachsender Wellenlänge ab[1]), sodass die Strahlung bei 0,5 mcm nur noch etwa 1,5 Proc. ihres Maximalwerthes aufwies. Diese Abnahme der Strahlungsintensität konnten wir durch Einsetzen immer grösserer Spaltblenden, welche ja bei diesen Wellenlängen statthaft wurden, theilweise compensiren, sodass wir, wenigstens bei Anwendung der Bogenlampe, bis zu nahe 1 mcm Wellenlänge noch hinreichend grosse Ausschläge zur Verfügung hatten. Dennoch haben wir unsere Versuchsreihen sämmtlich nur bis $\lambda = 0,6$ mcm fortgesetzt, da uns die Reinheit des Spectrums jenseits dieser Wellenlänge aus mehreren Gründen zweifelhaft erschien. Es können aber, wie sich weiter unten ergeben wird, geringe Mengen beigemischter diffuser Strahlung von kleinerer Wellenlänge die Resultate erheblich beeinflussen.

§ 10. Nachdem wir den Gang der Strahlen, sowie deren Intensitätsverhältnisse besprochen haben, bleibt noch deren Polarisationszustand zu erörtern übrig. Dieser wurde mittels eines in das Rohr Q centrisch eingesetzten Nicols untersucht.

Erstens wurde unter Anwendung des polarisirenden Glassatzes der Hauptschnitt des Nicols vertical gestellt und so justirt, dass die sichtbare Strahlung völlig ausgelöscht schien. Die bolometrische Messung zeigte dann, dass an allen Stellen des ultrarothen Spectrums die Intensität ebenfalls unmerklich

1) In der Nähe von $\lambda = 0,35$ mcm trat ein schwach ausgeprägtes Strahlungsminimum auf; wie wir uns überzeugten, rührte dies von der selectiven Absorption des polarisirenden Glassatzes G her und war nicht etwa eine Interferenzerscheinung, bedingt durch die, übrigens durchaus nicht planparallelen, Luftschichten zwischen den einzelnen Deckgläsern.

war, d. h. wir beobachteten allenthalben weniger als 1 pro Mille desjenigen Ausschlags, welcher bei horizontalem Hauptschnitt des Nicols erhalten wurde. Der Glassatz polarisirt daher die Strahlung jeglicher Wellenlänge nahezu vollkommen in der Horizontalebene, erfüllt also völlig seinen Zweck.

Zweitens wiederholten wir diesen Versuch unter Anwendung natürlichen Lichtes, oder vielmehr „natürlicher Strahlung", indem wir den Glasplattensatz G entfernten und die dioptrischen Theile (A, l_1, d, l_2) in diejenige Lage rückten, welche zuvor ihre virtuellen Spiegelbilder mit Bezug auf den Glassatz innegehabt hatten. Für eine mittlere Wellenlänge $\lambda = 0{,}3$ mcm erhielten wir nun z. B. bei verticalem Hauptschnitt des Nicols einen um 18 Proc. grösseren Ausschlag, als bei horizontalem. Dieser Unterschied rührt von der Brechung im Prisma P her, welche eine partielle Linearpolarisation $\perp$ zur Einfallsebene, also hier in der Verticalebene, zur Folge hat. Diese „Spectrometerpolarisation" bildet bei den Versuchen mit dem Glassatze keine Fehlerquelle [1]), da eine verticale Polarisationscomponente dabei überhaupt nicht auftritt, solange wenigstens durch die Gitter keine Drehung der Polarisationsebene erzeugt wird. Dies war aber bei der grossen Mehrzahl der Versuche nicht der Fall, bei denen wir die Drahtrichtung entweder vertical oder horizontal einstellten (vgl. indess §§ 14, 16).

Drittens machten wir eine ähnliche Bestimmung, indem wir eine vorderseitig versilberte Glasplatte anstatt des Glassatzes aufstellten. Der Ausschlag betrug nunmehr für dieselbe Wellenlänge bei verticalem Hauptschnitt des Nicols nur noch 15 Proc. mehr, als bei horizontalem. Ein Sechstel der verticalen Spectrometerpolarisation ist also aufgehoben durch eine dreiprocentige partielle Polarisation des Silbers in seiner horizontalen Einfallsebene (Incidenz 55°). Diese Substitution eines Silberspiegels an Stelle des Glasplattensatzes war bedeutend einfacher, als die Anwendung natürlicher Strahlung in der vorher beschriebenen Anordnung. Wir haben sie daher öfters angewandt, um uns davon zu überzeugen, dass die specifische

1) Sie verringert dagegen die Ausschläge um 18 Proc. gegen die Werthe, die man erhalten könnte, falls man die Einfallsebenen bei G und P „kreuzte"; die grössere Einfachheit der Anordnung bei durchweg horizontaler Einfallsebene überwiegt aber jenen Nachtheil bei weitem.

Wirkung der Gitter dann fast unmerklich wurde (vgl. die genaue Discussion § 18), während sie bei Anwendung des Glassatzes sehr beträchtlich sein konnte. Die lineare Polarisation der Strahlung ist daher Grundbedingung für das Eintreten der Erscheinungen, zu deren Besprechung wir nun schreiten.

§ 11. Wir haben in erster Linie die eingangs erwähnten Resultate, welche der eine von uns durch polarimetrische Messungen erhielt, mit unserer bolometrischen Methode bestätigt. Das Verhältniss der Galvanometerausschläge bei verticaler und horizontaler Richtung der Gitterdrähte ergibt direct das Durchlässigkeitsverhältniss n^2. Dieses wurde wie früher im sichtbaren Bereiche stets > 1 gefunden[1]) und die numerischen Werthe ergaben eine befriedigende Uebereinstimmung mit den auf optischem Wege ermittelten; da indess letztere Methode weit genauere Resultate zu liefern vermag, so haben wir die bolometrischen Bestimmungen auf das ultrarothe Bereich beschränkt.

Bei den ersten quantitativen Versuchen wurde das Bolometer auf eine bestimmte Stelle des Spectrums eingestellt, das Rohr *FF'* so gedreht, dass die Gitterdrähte horizontal, d. h. der Polarisationsrichtung   waren, und nun durch Aufziehen eines in den Strahlengang eingeschalteten, mit Schnurlauf versehenen Fallschirmes den Strahlen der Zutritt zu dem Bolometer gestattet. Der hierbei entstehende Galvanometerausschlag[2]) wurde notirt, der Fallschirm niedergelassen, das Gitter um 90° gedreht und so mehrere mal hintereinander in sämmtlichen vier Quadrantenstellungen des Gitters die durchgelassene Strahlungsintensität A_p bez. A_s gemessen. Dann wurde aus den verschiedenen Beobachtungen bei der gleichen Gitterstellung das Mittel genommen und schliesslich der Quotient $n^2 = A_s / A_p$ gebildet. Wir gewannen jedoch bald die Ueberzeugung, dass wir schneller und sicherer zum Ziele gelangten, wenn wir nur am Anfang und am Schluss einer jeden Versuchsreihe durch Messung einiger Ausschläge die Grösse A_p feststellten und uns im übrigen darauf beschränkten, nur die

1) Der Polarisation $\perp$ zur Drahtrichtung entspricht $n^2 > 1$; der Polarisation | zur Drahtrichtung entspricht $n^2 < 1$.

2) Ueber die Art, diesen zu bestimmen, vgl. Rubens, Wied. Ann. **37.** p. 256. 1889.

bei einer raschen Drehung des Gitters um 90° erfolgenden Ausschlagsänderungen möglichst genau zu bestimmen.

Da diese Differenzen meist beträchtlich kleiner sind, als die Ausschläge selbst, so ist an der genauen Messung der ersteren mehr gelegen, als an der Bestimmung der letzteren. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass auch hier stets in allen vier Quadrantenstellungen des Gitters beobachtet wurde. Bezeichnen wir diese mit 1, 2, 3, 4 und den Ausschlag, welchen man bei einer raschen Drehung aus einer beliebigen Stellung n in eine andere m erhält, symbolisch mit $(n \,.\, m)$, so muss bei richtigem Functioniren aller Apparate folgenden Bedingungen stets genügt werden:

$$(1 \,.\, 2) = -(2 \,.\, 3) = (3 \,.\, 4) = -(4 \,.\, 1),$$

oder:

$$(1 \,.\, 2) + (2 \,.\, 3) + (3 \,.\, 4) + (4 \,.\, 1) = 0.$$

Ferner:

$$(1 \,.\, 3) = (3 \,.\, 1) = (2 \,.\, 4) = (4 \,.\, 2) = 0.$$

Die Beachtung dieser Beziehungen ergab eine fortwährende Controlle der Justirung.

Hauptversuche.

§ 12. *Durchlässigkeitsverhältniss.* Wir beschreiben zunächst die Versuche zur Bestimmung des Durchlässigkeitsverhältnisses $\mathfrak{n}^2 = A_s / A_p$ als Function der Wellenlänge, welche uns das meiste Interesse zu bieten scheinen. Die für $\mathfrak{n}^2$ erhaltenen Werthe werden im Allgemeinen einen Fehler von zwei Einheiten der zweiten Decimalstelle nicht überschreiten, wenigstens in denjenigen Spectralbereichen, in denen die Strahlungsintensität nicht allzu gering wird. In Tab. 3 geben wir die Resultate der an den fünf Hauptgittern angestellten Beobachtungen, wobei jedes Gitter sowohl || zur Wellenfront, als auch um 45,6° gegen diese geneigt, untersucht wurde. Die mit einem Sternchen * versehenen Werthe im sichtbaren Bereiche sind bei Ag 1 den früheren Angaben (Tab. 2 loc. cit. p. 551) entnommen, bei den übrigen Metallen einer Fortsetzung der optischen Untersuchung von Gittern entlehnt, welche im hiesigen Institute ausgeführt wird und über die seiner Zeit ausführlicher berichtet werden soll. Der Inhalt der Spalten *A, B, C, D, E* der Tab. 3 ist in den entsprechend bezeichneten Fächern der

Tafel III graphisch dargestellt, indem das Verhältniss n^2 *als* Function der Wellenlänge λ aufgetragen ist.

Tabelle 3.

Metall	*A* Pt 1		*B* Ag 1		*C* Au 1		*D* Fe 1		*E* Cu 1	
β	0°	45,6°	0°	45,6°	0°	45,6°	0°	45,6°	0°	45,6°
l' (mcm)	2,50	1,00	4,56	1,83	3,81	1,33	2,50	1,00	2,50	1,00
λ (mcm)	n^2	n^2	n^2	n^2	n^2	n^2	n^2	n^2	n^2	n^2
(F) 0,049	1,036*	1,110*	1,019*	1,044*	1,014*	1,033*	1,025*	1,066*	1,017*	1,048*
(ia) 0,067	1,064*	1,186*	1,032*	1,087*	1,030*	1,068*	1,036*	1,096*	1,034*	1,098*
0,080	1,07	1,19	1,11	1,18	1,07	1,18	1,03	1,10	1,09	1,26
0,100	1,06	1,16	1,11	1,22	1,10	1,31	1,05	1,11	1,14	1,41
0,125	—	1,11	1,08	—	1,11	1,32	—	—	—	—
0,150	1,03	1,07	1,05	1,13	1,09	1,29	1,06	1,13	1,14	1,40
0,200	0,99	0,98	1,01	1,01	1,05	1,13	1,05	1,10	1,13	1,35
0,250	0,97	0,92	0,97	0,94	1,02	1,06	1,03	1,07	1,10	1,21
0,300	0,94	0,85	0,96	0,91	0,99	—	—	0,97	1,04	1,07
0,350	0,91	0,72	—	0,86	0,95	0,91	0,98	0,87	—	0,83
0,400	0,88	0,63	0,91	—	0,93	0,88	0,95	0,76	0,95	0,71
0,450	0,84	0,54	—	0,80	—	0,80	0,92	0,70	0,92	0,57
0,500	0,80	0,51	0,89	0,78	0,89	0,73	0,89	0,62	0,90	0,52
0,550	—	0,42	—	0,75	—	0,61	0,88	0,59	0,87	—
0,600	—	0,38	—	0,73	—	0,56	0,85	0,54	0,83	0,43

§ 13. Die Betrachtung der Tab. 3 und der Curven lehrt nun Folgendes:

Das Durchlässigkeitsverhältniss $n^2 = Q_s / Q_p$ (vgl. § 15) erreicht bei allen 5 Metallen im Ultrarothen ein *Maximum*, um darauf mit wachsender Wellenlänge stetig abzunehmen; dabei schneidet die Curve die Gerade ($n^2 = 1$) in einem *neutralen Punkte*, für den $Q_s = Q_p$ ist. Bevor die Wellenlänge den entsprechenden Werth erreicht, polarisirt das Gitter $\perp$ zu seiner Drahtrichtung ($Q_s > Q_p$); für grössere Wellenlängen dagegen $\parallel$ dieser Richtung ($Q_p > Q_s$). Es ist ferner zu erkennen, dass für jedes einzelne Gitter die Beobachtungen bei senkrechter und schiefer Lage qualitativ genau die gleichen Resultate liefern. Nur der durch die Ordinate gemessene quantitative Werth der Wirkung ist bei den schief gestellten Gittern, der geringeren scheinbaren Oeffnungsbreite entsprechend,

ein grösserer. Die Abscissen der beiden singulären Curvenpunkte sind aber in beiden Fällen innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler identisch und daher für das individuelle Verhalten des betreffenden Metalls characteristisch (vgl. § 19). Die Abscissen des Maximums (λ_M), sowie des neutralen Punkts (λ_N), sind in Tab. 4 in aufsteigender Reihenfolge für die fünf Metalle zusammengestellt.

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, ist das Verhältniss λ_M / λ_N innerhalb der Fehlergrenzen constant, d. h. die Wellenlänge λ_N beträgt bei sämmtlichen fünf Metallen das 2,35-fache von λ_M. Indessen möchten wir auf diese Beziehung kein allzu grosses Gewicht legen, da die Abscissen der singulären Punkte, namentlich des Maximumpunktes, nicht scharf zu bestimmen sind.

Was den sonstigen Verlauf der Curven anbetrifft, so erfolgt der Anstieg zum Maximum meist ziemlich plötzlich, dagegen der Abfall mehr allmählich. Das Intervall von der Wellenlänge Null durch Ultraviolett bis Blau haben wir in einer uns plausibel erscheinenden Weise überbrückt; die betreffenden punktirten Curvenstrecken sind aber dennoch als hypothetisch zu betrachten.

Tabelle 4.

Metall	λ_M mcm	λ_N mcm	λ_M / λ_N
Platin	0,08	0,19	0,42
Silber	0,09	0,21	0,43
Gold	0,12	0,28	0,43
Eisen	0,125	0,29	0,43
Kupfer	0,13	0,31	0,42

§ 14. *Veränderliches Polarisationsazimuth.* Nach dem Vorhergehenden verhalten die Drahtgitter sich wie unvollkommene Polarisatoren, welche die eine Polarisationscomponente nur abschwächen, nicht völlig auslöschen. Es muss daher für sie ein dem Malus'schen nachgebildetes Gesetz gelten, dessen Gleichung nun aber zwei Glieder aufweist. Bezeichnen wir das Polarisationsazimuth der auffallenden Strahlung, also in unserem Falle den Winkel zwischen der Drahtrichtung und der Horizontalen mit v; ferner sei die (dem Galvanometerausschlag proportionale) Intensität der durchgelassenen Strahlung im Centralbilde

A_p für $v = 0^0$ oder 180^0 (Drähte horizontal)

A_s „ $v = 90^0$ „ 270^0 (Drähte vertical)

Es folgt dann aus den allgemeinen Regeln für die Zerlegung bez. Zusammenstellung von Vectoren, dass bei beliebigem Polarisationsazimuth die Intensität A_v

(1) $$A_v = A_p \cos^2 v + A_s \sin^2 v$$

Diese Gleichung haben wir zum Ueberfluss mit den Beobachtungen verglichen. Dazu wurde das Gitter Cu 1 unter 40^0 Neigung zur Wellenfront auf dem Träger befestigt; es sei daran erinnert, dass das Neigen des Gitters nur ein bequemes Verengen der Oeffnungen bezweckt und damit auch völlig äquivalent ist. Mittelst der (§ 4) erwähnten Kreistheilung konnte dann auf beliebige Azimuthe eingestellt werden; dabei wurde das Rohr FF' durch 4 Quadranten gedreht und die Mittel aus den bei entsprechendem Azimuthe beobachteten Ausschlägen genommen; Tab. 5 enthält diese Mittelwerthe. Bei dieser Anordnung erleidet die Polarisationsebene durch das Gitter eine mit $\sin 2v$ proportionale Drehung (l. c. § 9); diese betrug in vorliegendem Falle für $v = 45^0$ etwa 7^0; die „Spectrometerpolarisation" verursachte hierbei noch keinen erheblichen Fehler (vgl. § 10).

Aus den beobachteten Ausschlägen bei 0^0 und 90^0 Azimuth wurden für zwischengelegene Azimuthe nach Gleichung (1) die Ausschläge berechnet. Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit der Beobachtung ist wohl durch Zufall fast vollkommen. Da ein Zweifel an der Richtigkeit der rein geometrischen Gleichung (1) von vornherein ausgeschlossen ist, so betrachten wir diese Uebereinstimmung als eine Controle für die Zuverlässigkeit unserer Anordnung und die Richtigkeit unserer Methode.

Tabelle 5.

$\lambda = 0{,}15$ mcm. Gitter Cu 1. $\beta = 40^0$.

Azimuth v	Galvanometerausschlag beobachtet	Galvanometerausschlag berechnet
0^0	211	—
30^0	226	225
45^0	240	240
60^0	255	255
90^0	269	—

§ 15. *Centrale Durchlässigkeit.* Wir haben bisher nur das Durchlässigkeitsverhältniss zwischen den $\perp$ bez. $\parallel$ zur Drahtrichtung polarisirten Strahlungscomponenten betrachtet. Es bietet aber auch theoretisches Interesse (vgl. § 29), festzustellen, welcher Bruchtheil der auffallenden Strahlung nach dem Durchgang durch das Gitter sich im einen wie im andern Falle zum Centralbilde vereinigt. Zur Beantwortung dieser Frage haben wir die Galvanometerausschläge verglichen, welche wir erhielten, wenn unter sonst genau gleichen Umständen, das Gitter in den Strahlengang eingesetzt oder herausgenommen war. Das Verhältniss der Ausschläge liefert direct den gesuchten Bruchtheil Q, welchen wir als die „centrale Durchlässigkeit" bezeichnen werden, weil dabei nur der ungebeugte Antheil der hindurchgegangenen Strahlung berücksichtigt wird. Durch geeignete Gruppirung der Beobachtungen konnten die langsamen zeitlichen Schwankungen der Energie des strahlenden Körpers eliminirt werden; übrigens wurde zu diesen Versuchen ausschliesslich der Zirkonbrenner verwendet.

In Tab. 6 sind diese, an den Gittern Pt 1 und Cu 1 angestellten Messungen verzeichnet. In der ersten Spalte eines jeden Faches sind die Werthe von $\mathfrak{n}^2$ aus Tab. 3 der besseren Uebersicht halber wiederholt. Es folgen die beobachteten Werthe der centralen Durchlässigkeit Q_p bei horizontaler, d. h. der Polarisationsebene $\parallel$, Drahtrichtung. Daraus findet man den entsprechenden Werth für Q_s durch Rechnung, indem, wie sich leicht nachweisen lässt,

$$Q_s = \mathfrak{n}^2 \, Q_p$$

diese berechneten Werthe sind in die dritte Spalte eingetragen, während in der vierten die arithmetischen Mittel $Q_m = (Q_p + Q_s) / 2$ verzeichnet sind. Es zeigt sich nun, dass diese mittlere centrale Durchlässigkeit in allen 4 Fällen innerhalb der Fehlergrenzen von der Wellenlänge unabhängig ist; dabei verdienen die Beobachtungen bei gerade gestellten Gittern ($\beta = 0^{\circ}$) (linke Tabellenhälfte) mehr Vertrauen als die bei geneigten (rechte Tabellenhälfte), da sich die Eliminirung der zeitlichen Intensitätsschwankungen im ersteren Falle besser bewerkstelligen liess.

Tabelle 6.

λ	Pt 1 $\beta = 0^0$			$b = 2{,}50$	Pt 1 $\beta = 45{,}6^0$			$b' = 1{,}00$
mcm	n^2	Q_p	Q_s	Q_m	n^2	Q_p	Q_s	Q_m
0,1	1,06	0,220	0,234	0,227	1,16	0,061	0,071	0,066
0,2	0,99	0,222	0,220	0,221	0,98	0,065	0,064	0,065
0,3	0,94	0,227	0,214	0,221	0,85	0,076	0,064	0,070
0,4	0,88	0,241	0,212	0,227	0,63	0,085	0,053	0,069
0,5	0,80	0,247	0,198	0,223	0,51	0,095	0,048	0,071
0,6	0,76(i)	0,256	0,194	0,225	0,38	—	—	—
Mittel				0,224				0,068

λ	Cu 1 $\beta = 0^0$			$b = 2{,}50$	Cu 1 $\beta = 45{,}6^0$			$b' = 1{,}00$
mcm	n^2	Q_p	Q_s	Q_m	n^2	Q_p	Q_s	Q_m
0,1	1,14	0,192	0,220	0,206	1,41	0,050	0,070	0,060
0,2	1,13	0,196	0,222	0,209	1,35	0,050	0,068	0,059
0,3	1,04	0,199	0,207	0,203	1,07	0,059	0,063	0,061
0,4	0,95	0,210	0,200	0,205	0,71	0,071	0,051	0,061
0,5	0,90	0,218	0,196	0,207	0,52	0,084	0,044	0,064
0,6	0,83	0,222	0,184	0,203	0,43	—	—	—
Mittel				0,207				0,061

§ 16. Jene mittlere centrale Durchlässigkeit Q_m ist, wie sich leicht zeigen lässt, auch diejenige, welche für auffallende natürliche Strahlung in Betracht kommt.

Die Benutzung natürlicher Strahlung erwies sich als unzweckmässig (§ 10); die Werthe Q_m gelten aber ebenso für eine Polarisation unter einem Azimuth von 45° zur Drahtrichtung. Denn setzen wir in Gleichung (1) (§ 14) $v = 45^0$, so wird

$$A_{45} = \frac{1}{2} A_p + \frac{1}{2} A_s$$

und dividiren wir diese Gleichung durch die Intensität der auffallenden Strahlung, so ergiebt sich

$$Q_{45} = \frac{1}{2} (Q_p + Q_s) = Q_m .$$

Wir haben daher die centralen Durchlässigkeiten der übrigen (geradegestellten) Gitter nur beim Azimuth 45° bestimmt; die Spectrometerpolarisation gab hierbei keine merklichen Fehler (§ 10). Die Werthe von Q_m für das Gitter Cu 1 (Tab. 7)

bestätigen die bereits in Tab. 6 gefundenen Zahlen, sowie deren Unveränderlichkeit mit der Wellenlänge. In Anbetracht dieser letzteren Eigenschaft haben wir uns dann bei den übrigen Metallen auf Messungen für einige wenige Wellenlängen beschränkt. Die Werthe von Q_m sind für die verschiedenen Metalle nicht sehr verschieden; aus einem Vergleiche der Zahlen für Cu 1 und Cu 2 scheint hervorzugehen, dass die Durchlässigkeit um so geringer wird, je feiner das Gitter ist. Für die theoretische Discussion dieser Ergebnisse verweisen wir auf §§ 26—30.

Tabelle 7.

Azimuth $v = 45°$. Neigung $\beta = 0°$.

λ	Pt 1	Ag 1	Au 1	Fe 1	Cu 1	Cu 2
	$b=2,50$	$b=4,56$	$b=3,31$	$b=2,50$	$b=2,50$	$b=5,25$
mcm	Q_m	Q_m	Q_m	Q_m	Q_m	Q_m
0,1	0,220	0,234	0,225	0,224	0,210	0,238
0,2	—	—	—	—	0,203	—
0,3	—	—	—	—	0,205	—
0,4	0,223	0,234	0,221	0,224	0,210	0,236
0,5	—	0,231	—	—	0,209	—
0,6	—	—	—	—	0,209	—
Mittel (Tab. 7)	0,222	0,233	0,223	0,224	0,208	0,237
Mittel (Tab. 6)	0,224	—	—	—	0,207	—

§ 17. *Veränderliche Oeffnungsbreite.* Ebenso wie es früher bei den optischen Messungen geschah (loc. cit. §§ 10. 11), haben wir auch jetzt untersucht, in welcher Weise das Durchlässigkeitsverhältniss von der scheinbaren Oeffnungsbreite abhängt, bez. ob es durch den Krümmungsradius des Drahtquerschnittes beeinflusst wird. Bei dieser Untersuchung bedienten wir uns der beiden Kupfergitter von verschiedener Feinheit, welche dazu auf der drehbaren Trägerplatte C (Fig. 2) befestigt wurden. Durch Aenderung der Neigung der Platte C gegen die Wellenfront war es möglich, die scheinbare Breite der Gitteröffnung innerhalb gewisser Grenzen zu variiren. Für zwei verschiedene Wellenlängen wurden nun bei einer Reihe von scheinbaren Oeffnungsbreiten Messungen angestellt; und zwar waren die Wellenlängen so gewählt, dass die eine unterhalb des neutralen Punktes ($n^2 > 1$), die andere oberhalb desselben ($n^2 < 1$) lag.

Tabelle 8.

Gitter	β	b' mcm	n^2 $\lambda = 0{,}15$ mcm	n^2 $\lambda = 0{,}50$ mcm
Cu 2	0°	5,25	1,04	0,92
"	30°	3,85	1,05	0,91
"	35°	3,35	1,06	0,89
"	40°	2,79	1,09	0,87
"	45°	2,17	1,13	0,84
Cu 1	0°	2,50	1,13	0,87
"	30°	1,83	1,17	0,82
"	35°	1,60	1,22	0,79
"	40°	1,33	1,28	0,75
"	45°	1,04	1,41	0,59

Die erhaltenen Resultate sind in Tab. 8 verzeichnet. Aus dieser geht hervor, in welcher Weise bei abnehmender scheinbarer Oeffnungsbreite das Durchlässigkeitsverhältniss sich nach oben oder unter hin von der Einheit entfernt. Auf Taf. III (Fach *H*) ist n^2 für die beiden Wellenlängen als Function von b' aufgetragen. Der hyperbelähnliche Charakter dieser Curven liess es aus praktischen Gründen erwünscht erscheinen, die Grösse n^2 nicht nur als Function von b', sondern auch in ihrer Abhängigkeit von den reciproken Abscissen $1/b'$ aufzutragen (in der Figur links). Die so erhaltenen Curven weichen von Geraden, welche durch den Coordinatenursprung gehen, immerhin schon erheblich ab, sodass der Ausdruck:

$$(n^2 - 1)\, b' = 2\, m\, b'$$

im allgemeinen keine Constante mehr ist. Zur besseren Uebersicht sind Curvenstrecken Ag — Li.α und Ag — F in die Figur eingezeichnet, welche in ähnlicher Weise die Spalten „Blau" und „Roth" der früher gegebenen optischen Tabelle (l. c. Tab. 2 § 10) darstellen; diese wurde damals folgendermaassen interpretirt:

„Aus einer Betrachtung der, für eine bestimmte Wellenlänge nahezu constanten, Producte $2\, m\, b'$ ist zu schliessen, dass der Coefficient $2\, m$ innerhalb der Beobachtungsfehler umgekehrt proportional der scheinbaren Oeffnungsbreite b' ist. Je grösser die Wellenlänge, umsomehr tritt jedoch noch ein gewisser Gang hervor in dem Sinne, dass $2\, m$ etwas rascher zunimmt, als $1/b'$."

Ein Blick auf die Curven zeigt, dass diese Folgerung auch jetzt nicht modificirt zu werden braucht. Der Geltungsbereich der umgekehrten Proportionalität ist schon durch die Bedingung eingeschränkt, dass 2m ein kleiner Bruch sein muss (vgl. § 25). Ebenso ist die früher aufgestellte Behauptung (l. c. § 11), „dass der Coefficient 2m innerhalb der Versuchsgrenzen nur von der scheinbaren Oeffnung abhängt, nicht von dem Krümmungsradius des Querschnitts der beiden sie begrenzenden Metalldrähte" auch jetzt noch richtig. Denn die Curven lassen sich ohne Unstetigkeit durch die den beiden ungleich feinen Gittern entsprechenden Punktreihen (Cu 1 : o, Cu 2 : ×) ziehen.

Controllversuche.

§ 18. Wie bereits erwähnt, haben wir uns häufig davon überzeugt, dass bei Vertauschung des Deckglassatzes gegen einen Silberspiegel die Wirkung des Gitters fast unmerklich wurde. Mit Hülfe des oben (§ 10) angegebenen Polarisationsverhältnisses 1,15 des Spectrometers lassen sich für gegebene Werthe von n^2 diejenigen Ausschlagsverhältnisse vorausberechnen, welche man erhalten muss, wenn man den Silberspiegel einsetzt. Die Rechnung ergibt, dass infolge dieser Vertauschung der scheinbare Werth von $(n^2 - 1)$ sein Zeichen wechseln und sich zugleich bedeutend verringern muss. Beispielsweise sind in Tabelle 9 einige solche Controllmessungen eingetragen, welche eine befriedigende Uebereinstimmung mit den berechneten Werthen ergeben.

Es wurden zu diesem Vergleiche solche Werthe von n^2 herangezogen, welche sich möglichst viel von der Einheit unterschieden. Wo dies in geringerem Maasse der Fall ist, werden unter Anwendung des Silberspiegels die Galvanometerausschläge bei verticaler bez. horizontaler Drahtrichtung nur noch Unterschiede aufweisen, welche innerhalb der Fehlergrenzen liegen; dies traf in den meisten Fällen zu.

Tabelle 9.

Cu 1. Ausschlagsverhältniss. $\beta = 45,6^{\circ}$.

Wellenlänge	Mit polarisirendem Glassatz (Tab. 3)	Mit Silberspiegel berechnet	Mit Silberspiegel beobachtet
0,15 mcm	$n^2 = 1,40$	0,97	0,97
0,50 „	$n^2 = 0,52$	1,05	1,06

§. 19. Ausser an den fünf Hauptgittern haben wir auch an den weniger feinen Gittern Pt 2, Fe 2, Cu 2, Controllmessungen angestellt; diejenigen an letzterem stellt die Curve (Taf. III Fach *F*) dar. Wir fanden dabei zwar geringere, jedoch qualitativ die gleichen Wirkungen wie bei den feineren Gittern; insbesondere war auch hier die Lage der beiden singulären Punkte für ein und dasselbe Metall innerhalb der Fehlergrenzen identisch. Soweit unsere Versuche überhaupt reichen, führen sie daher zu dem Ergebnisse, dass die Abscissen jener Punkte von der Oeffnungsbreite und dem Krümmungsradius des Drahtquerschnitts unabhängig sind, dass sie dagegen von der Natur des Metalls abhängen. Durch geringe Beimischung, sowie durch die Beschaffenheit der Oberflächenschicht scheinen sie indessen nicht wesentlich beeinflusst zu werden. Den Einfluss dieser Factoren auf die Ordinate haben wir vorläufig nicht untersuchen können, weil dies die Beschaffung einer grösseren Anzahl gleichdimensionirter Gitter voraussetzen würde. Nach den vorläufigen Ergebnissen der erwähnten, im Gange befindlichen, optischen Untersuchung scheint die Oberflächenbeschaffenheit im sichtbaren Bereiche der Strahlung, oder wohl allgemeiner vor dem neutralen Punkte, eine wesentliche Rolle zu spielen; dies ist bekanntlich nach den Versuchen des Hrn. Drude auch bei der Reflexion an Metallen in hohem Maasse der Fall.[1]) Dagegen scheint es uns wahrscheinlich, dass dieser Einfluss sich um so mehr verliert, zu je längeren Wellen man fortschreitet (vgl. § 23).

Im Anschlusse hieran sei erwähnt, dass es uns bisher ebenso wenig, wie früher (l. c. § 13) gelang, unsere feinsten Gitter in befriedigender Weise zu schwärzen. Neben dieser praktischen Schwierigkeit entsteht noch die theoretische, genau festzustellen, was den längeren Wellen gegenüber als „schwarz", d. h. als völlig absorbirend und nicht reflectirend, zu gelten hat. Unsere sämmtlichen Resultate beziehen sich daher ausschliesslich auf blanke Metalldrahtgitter, welche in der Regel bald nach der Fertigstellung untersucht wurden.

Von der Anfertigung grösserer Gitter aus Quarz- oder

1) Drude, Wied. Ann. **36.** p. 532. 1889 und **39.** p. 481. 1890.

Glasfäden [1]) haben wir Abstand genommen, da die optische Untersuchung eines wenige Millimeter breiten Gitters aus Glaswolle eine, im Vergleich zu den Metallen äusserst geringe Wirkung ergab, und weil ferner so dünne Glas- und besonders Quarzkörper in dem von uns untersuchten ultrarothen Bereiche noch nicht merklich absorbiren. [2])

§ 20. Die bei den bisher mitgetheilten Versuchen benutzte Anordnung war eine verhältnissmässig complicirte. Wir haben uns daher bemüht Anordnungen zu prüfen, welche eine einfachere, wenn auch nur qualitative Controlle, Demonstration oder Wiederholung der Versuche gestatten würden. Von diesen wollen wir eine beschreiben, wobei wir nochmals betonen, dass nur die bei den Hauptversuchen angewandte spectrometrische Methode uns rationell und einwurfsfrei erscheint, und dass die Complication derselben dagegen nicht in Betracht kommen darf.

Bei der vereinfachten Aufstellung kam zunächst an Stelle des Brenners in A (Fig. 1) ein Hohlcylinder aus berusstem Gusseisen; dieser wurde mittels eines Bunsen'schen Brenners auf

---

1) Vgl. C. V. Boys, Phil. Mag. (5) 23. p. 490. 1887; nach einer gefl. schriftlichen Mittheilung hat der Hr. Verf. die dort beschriebene Herstellung von Fadengittern seither nicht weiter verfolgt.

2) Noch sei erwähnt, dass wir im Anschlusse an die früher mitgetheilten Versuche mit Platinschichtgittern (l. c. § 14, 15) ein Silberschichtgitter untersucht haben. Das Metall war chemisch auf Deckglas niedergeschlagen und auf der Theilmaschine geritzt worden. Die Wirkung war aus mehreren Gründen eine unsichere; wir glauben aber annehmen zu können, dass sie im selben Sinne stattfindet, wie bei Drahtgittern, nur in schwächerem Maasse. Die Fizeau'schen Versuche über die Polarisation des Lichtes durch feine Risse in sehr dünnen Metallschichten sind neuerdings von Hrn. Ambronn (Wied. Ann. 48. p. 717, 1893) wiederholt und bestätigt worden; dabei kamen auch keilformige Spalte zwischen Nähnadeln zur Untersuchung. Zu diesem Aufsatze möchten wir bemerken, dass wir nirgends behauptet haben, dass bei unseren Drahtgittern der Sinn der Polarisation von der Oeffnungsbreite abhinge und dass die Erscheinung qualitativ durch das Verhältniss der Wellenlänge zur Oeffnungsbreite bestimmt sei, wie Hr. Ambronn l. c. p. 720 anzunehmen scheint (vgl. §§ 13, 19). In dem von uns untersuchten Bereiche hängt der neutrale Punkt nur von der Natur des Metalles ab; freilich beträgt die geringste von Hrn. Ambronn beobachtete Breite der Risse weniger als 0,01 mcm, während wir die scheinbare Oeffnungsbreite nicht unter 1 mcm herabdrücken konnten.

etwa 350° erhitzt. Ein Thermometer war in Messingfeilspähne eingebettet, welche den Hohlraum füllten und maass daher angenähert die Temperatur der gegen die Linse l_1 strahlenden geschwärzten Aussenfläche. Während das Spectrometer sich noch an Ort und Stelle befand, bestimmten wir dann die Intensitätsvertheilung im Spectrum, welche in Fig. 3 graphisch dargestellt ist. [1]) Die Curve (deren Ordinaten in willkürlichem Maasse aufgetragen sind) bezieht sich auf die vom heissen Körper ausgesandte und sodann am Glassatze reflectirte Strahlung, wie sie bei den Versuchen zur Verwendung kam. Sie ist ungefähr symmetrisch zur Abscisse $\lambda = 0{,}38$ mcm. Ausserdem haben wir noch mit der berussten Fläche eines Leslie'schen Würfels gearbeitet, welcher mittels siedenden Anilins oder Wassers auf 179° bez. 100° erwärmt werden konnte; indessen war dann, die Strahlung zu schwach als dass damit zuverlässige Resultate erhalten werden konnten.

§ 21. An Stelle des Spectrometercollimators wurde nun eins der Flächenbolometer aus Platinblatt eingesetzt, wie sie von den Hrn. Lummer und Kurlbaum construirt und kürzlich eingehend beschrieben wurden [2]); dieser Apparat war uns seitens der Physik.-Techn. Reichsanstalt in dankenswerther Weise zur Verfügung gestellt worden und bewährte sich sehr gut. Der Astasirung unseres Galvanometers entsprechend, bei welcher 1 Mikroampère einen Ausschlag von 10000 Scalentheilen hervorgerufen haben würde [3]), gab eine Hefner'sche Lampe in 1 m Entfernung vom Bolometer 2500 Scalentheile Ausschlag; dabei betrug der Hauptstrom im Bolometer etwa 1 Centiampère. Trotz dieser verhältnissmässig hohen Empfindlichkeit zeigte die Ruhelage eine befriedigende Constanz.

Nahm man an, dass diejenige Strahlung, welche Wellenlängen unter 0,25 mcm entsprach, gegen die Uebrige vernachlässigt werden konnte (vgl. Fig. 3), so war vor dem Flächenbolometer (also an der früheren Stelle des Collimatorspalts s) ein Diaphragma von 1,5 cm Oeffnung noch zulässig, während dasjenige in d 1 cm Weite besitzen durfte; es fiel dann auf

1) Vgl. Langley, Ann. Chim. et phys. (6) **9.** p. 462. 1886.

2) Lummer u. Kurlbaum, Wied. Ann. **46.** p. 204. 1892.

3) Die Spulen waren dabei hintereinandergeschaltet, der Gesammtwiderstand betrug also 80 Ohm.

das Bolometer nur das Centralbild, während das erste und alle weiteren Beugungsbilder abgeblendet waren.

Wir konnten auf diese Weise unsere Hauptergebnisse verificiren und erhielten z. B. für das Durchlässigkeitsverhältniss:

bei Pt 1 ($\beta = 45,$[illegible]^0): $n^2 = 0,75$; entspricht $\lambda = 0,36$ mcm
„ Cu 1 ($\beta = 45,6^0$): $n^2 = 0,54$; „ $\lambda = 0,48$ „

Die Wellenlängen sind diejenigen, welche nach den Curven der Tafel III den angegebenen Brüchen n^2 als Abscissen entsprechen. Ein Blick auf Fig. 3 zeigt, dass diese Werthe innerhalb des Bereichs der Annäherung liegen, welche man bei Anwendung der beschriebenen Versuchsanordnung erwarten darf. Sobald der Silberspiegel an Stelle des Glassatzes trat, war auch hier ein Unterschied der Ausschläge bei verticaler oder horizontaler Drahtrichtung kaum noch mit Sicherheit wahrnehmbar.

II. Theil.

Allgemeine Discussion.

§ 22. Im vorstehenden ersten Theile haben wir uns auf die Mittheilung unserer experimentellen Ergebnisse beschränkt. Im Folgenden wollen wir zunächst die gewonnenen Resultate soweit discutiren, dass daraus allgemeinere Schlüsse gezogen werden können. Daran schliessen sich einige Betrachtungen an, bei denen die Aufstellung mehrerer Nebenannahmen unerlässlich sein wird; wir möchten vorweg bemerken, dass der mehr oder weniger hypothetische Charakter der zu machenden Annahmen auf die Richtigkeit der bisher mitgetheilten Ergebnisse keinen Einfluss haben kann.

Wie bereits erwähnt, war es uns leider nicht möglich, Silber- und Golddraht von demselben Durchmesser (2,5 mcm) zu beschaffen, wie ihn die übrigen Metalldrähte aufwiesen; daher gelangten wir mit dem geneigten Silber- und Goldgitter als untere Grenze nur zu scheinbaren Oeffnungsbreiten $b' = 1,83$ bez. $b' = 1,33$ (vgl. Tab. 2). Dieser Umstand erschwert den Vergleich der für die verschiedenen Metalle erhaltenen Curven wesentlich, wenigstens was deren Ordinatenwerthe anbelangt. Diese Schwierigkeit liess sich zum Theil dadurch beseitigen, dass wir die Versuche heranzogen, durch welche wir die Beziehung zwischen dem Durchlässigkeitsverhältniss und der

scheinbaren Oeffnungsbreite kennen lernten (§ 17, Taf. III, Fach *H*). Unter Zugrundelegung der dort für Kupfergitter erhaltenen Curven konnten wir dann durch ein nicht näher zu erörterndes Verfahren[1]) auch für das Silber- und Goldgitter die Curven auf 1 mcm Oeffnungsbreite reduciren, sodass der wahre Verlauf von dem so gefundenen (in Fach *B* und *C*, Taf. III punktirten) kaum wesentlich abweichen dürfte. Die nach den von uns gemachten Erfahrungen völlig statthafte Annahme der Unveränderlichkeit der singulären Punkte kam uns dabei sehr zu statten.

Die uns nun zu Gebote stehenden fünf vergleichbaren Curven haben wir dann nochmals (Taf. III, Fach *G*) zusammen aufgetragen. Da diese sich alle auf die Oeffnungsbreite $b' = 1$ mcm beziehen, können die Wellenlängen als in Bruchtheilen der Oeffnungsbreite ausgedrückt betrachtet werden.

§ 23. Diese Curven zeigen ausser den schon hervorgehobenen Eigenthümlichkeiten eine auffallende gegenseitige Annäherung, je grösser die Wellenlänge wird. Bei $\lambda = 0{,}6$ mcm ist das Durchlässigkeitsverhältniss der einzelnen Metalle kaum noch verschieden.[2]) Wenn bei der Unsicherheit, welche der genauen Gestalt der Curven noch anhaftet, eine Vermuthung über ihren weiteren Verlauf überhaupt statthaft ist, so glauben wir, dass folgende Annahme die wahrscheinlichste ist, freilich ohne deren Richtigkeit irgendwie verbürgen zu können. Bei weiter zunehmender Wellenlänge werden die Curven sich der Abscissenaxe ($n^2 = 0$) weiter nähern, indem sie gleichzeitig mehr und mehr gegeneinander convergiren. Der Grenzfall entspräche einer vollkommenen Polarisation $\parallel$ der Drahtrichtung, welche von der Natur des Metalls nicht mehr abhängig wäre.

Die Eisencurve zeigt einen etwas abweichenden Verlauf; ob dieses immerhin nicht in wesentlichen Punkten abweichende

1) Es sei hier nur bemerkt, dass in Tab. 8 (§ 17) zufällig die Werthe $b' = 1{,}83$ (für Cu 1, $\beta = 30^{\circ}$) und $b' = 1{,}33$ (für Cu 1, $\beta = 40^{\circ}$) ebenfalls vorkommen; die zugehörigen Werthe von n^2 sind nur wenig von den bei Ag 1 und Au 1 für dieselben Wellenlängen beobachteten verschieden.

2) Wir fanden daher keine Veranlassung, Versuche für ein und dasselbe Metall bei verschiedenen Temperaturen anzustellen; umsomehr, als die mehrfach erwähnte, demnächst zu veröffentlichende, optische Untersuchung einen merklichen Temperatureinfluss nicht ergab.

Verhalten mit den ferromagnetischen Eigenschaften zusammenhängt, oder ob es der geringeren Regelmässigkeit des Eisengitters (§ 8) zuzuschreiben ist, müssen wir vorläufig dahingestellt lassen. Auch war es uns nicht möglich, zur weiteren Aufklärung dieser Frage genügend feinen Nickel-, geschweige denn Kobaltdraht zu beschaffen.

Was den übrigen Curvenverlauf anbetrifft, so wächst die Ordinate des Maximumpunktes in der Reihenfolge Fe, Pt, Cu, Ag, Au; dessen Abscisse dagegen, sowie die ihr proportionale Abscisse des neutralen Punktes, in der Reihenfolge Pt, Ag, Au, Fe, Cu, wie aus Tab. 4 zu ersehen war. Irgend ein augenscheinlicher einfacher Zusammenhang jener Grössen mit den optischen Eigenschaften (Brechungsindex, Extinctionsindex, Reflexionsparameter) einerseits, den electromagnetischen Bestimmungsstücken (Leitfähigkeit, Permeabilität) andererseits, scheint uns nicht vorzuliegen. Wir halten es trotzdem für wahrscheinlich, dass solche Beziehungen, wenn auch complicirterer Art, bestehen. Es erscheint uns nicht ausgeschlossen, dass sie auf theoretischem Wege aufgedeckt und an dem vorliegenden Beobachtungsmaterial geprüft werden könnten.

§ 24. Der geschilderte eigenthümliche Verlauf der Curven scheint uns die Vermuthung nahezulegen, dass man es, wenn auch nicht mit zwei grundverschiedenen Erscheinungen, so doch mit zwei ausgeprägten Stadien eines und desselben Phänomens zu thun hat.

Im ersten Stadium, welches etwa bis zum neutralen Punkte reicht ($n^2 > 1$), ist die Wellenlänge noch vergleichbar mit der molecularen Wirkungssphäre; hier handelt es sich unserer Ansicht nach um eine Polarisation in der Einfallsebene (⊥ zur Drahtrichtung), eine Erscheinung, welche mit dem Gouy-Wien'schen Phänomen in engem Zusammenhang stehen dürfte. Allerdings ist eine solche Polarisation bei *streifender* Incidenz früher nie beobachtet worden[1]) (vgl. l. c. § 13).

---

1) Eine etwaige Erklärung der geschilderten Erscheinungen durch Polarisation infolge multipler Reflexion scheint uns ebenso hinfällig wie früher (l. c. § 12). Denn ausser den schon damals erörterten Gegengründen ist die Reihenfolge Fe, Pt, Cu, Ag, Au nicht diejenige zunehmender Polarisation. Auch ist die Polarisation längerer Wellen ⊥ zur Einfallsebene (‖ den Drähten) in dieser Weise nicht zu erklären.

Im zweiten Stadium, welches vom neutralen Punkte aufwärts sich erstreckt, wird die Wellenlänge immer grösser; das moleculare Gefüge wird schliesslich so fein gegen dieselbe, dass es auf seine specifische Eigenschaften nicht mehr ankommt; die Metalle verhalten sich alle gleich und im entgegengesetzten Sinne wie früher.

Beide Stadien würden nach dieser Erklärung allmählich ineinander übergehen müssen: der neutrale Punkt entspräche der genauen Compensation der beiden entgegengesetzt gleichen Wirkungen.

§ 25. Im einen wie im anderen Stadium würde es sich um den Einfluss des Metalles auf den Schwingungszustand nahe seiner Grenzfläche bez. in der Uebergangsschicht zwischen ihm und dem umgebenden Medium handeln; die Aufstellung und mathematische Formulirung der betreffenden Randbedingungen wäre ein erster Schritt zur Entwickelung einer Theorie der vorliegenden Erscheinungen.

Früher (loc. cit. § 23) wurde betreffs dieser, bis jetzt nicht näher specificirbaren, Randstörung für die Lichtwellen die Annahme gemacht, dass sie sich wesentlich auf ein beschränktes Randgebiet erstrecke und dadurch erklärt, warum $(n^2 - 1)$ in erster Annäherung umgekehrt proportional der Oeffnungsbreite sein müsse. Dass dies für grössere Wellenlängen höchstens als rohe Annäherung gelten kann (§ 17), folgt schon daraus, dass bei unseren jetzigen Versuchen der Coefficient $2m = (n^2 - 1)$ durchaus nicht mehr ein kleiner Bruch ist. Indessen scheint uns nach wie vor im ganzen untersuchten Spectralbereiche die wirkliche oder scheinbare Oeffnungsbreite nur insofern eine Rolle zu spielen, als sich die Randwirkung auf die ganze durchgelassene Strahlung, welche der Oeffnungsbreite angenähert proportional ist, vertheilt. Damit stimmt überein, dass die singulären Punkte von der Oeffnungsbreite unabhängig, hingegen characteristisch für das Metall sind.

Unseres Erachtens wirkt jeder Rand unabhängig für sich, als ob der gegenüberliegende gar nicht vorhanden wäre; die Stärke dieser polarisirenden Wirkung nimmt mit der Entfernung vom Rande rasch ab und vertheilt sich auf den Wellenzug, welcher ihn streift und dessen Breite durch diejenige der Oeffnung bestimmt ist. Einen Beweis hierfür liefert die That-

sache, dass die Wirkung nicht auf die beiden Ränder einer und derselben gleichphasigen Wellenfront ausgeübt zu werden braucht. Denn eine geringe Neigung des Gitters, wodurch die Oeffnungsbreite noch nicht merklich verringert wird, der eine Rand dem anderen aber bald um mehrere Wellenlängen „voreilt“, hat auf die Erscheinung nicht den mindesten Einfluss. Wir hielten uns daher auch für völlig berechtigt, keinen Unterschied zwischen einer wahren Oeffnungsbreite *b* und einer scheinbaren, auf die Wellenfront sich projicirenden, *b'*, zu machen.

Einfluss der Beugung.

§ 26. Unsere Versuche wurden, wie erwähnt, ausschliesslich in der Weise angestellt, dass der Spectrometerspalt sich im Centralbilde befand. Von der bolometrischen Untersuchung der Beugungsbilder haben wir Abstand genommen, einmal der aus ihrer geringeren Intensität erwachsenden experimentellen Schwierigkeiten wegen, dann aber auch, weil eine solche umfassende Untersuchung sehr weit führen könnte, ohne entsprechendes Interesse zu bieten; denn wie wir sehen werden, tritt die Beugung um so mehr in den Hintergrund, zu je längeren Wellen man schreitet. Da aber doch andererseits bei manchen unserer Versuche die Wellenlänge noch nicht den hundertsten Theil der Gitterconstante erreichte, so können wir nicht umhin, die gewöhnliche Beugungstheorie in den Kreis unserer Betrachtungen zu ziehen.

Erinnern wir zunächst an die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung, wie sie von einem unendlich dünnen undurchsichtigen Schirm hervorgerufen wird, welcher von einer sehr grossen Anzahl äquidistanter, paralleler Spaltöffnungen durchbrochen und von einem kreisrunden Diaphragma eingefasst ist.[1]) Die Oeffnungsbreite sei wieder mit b, die Breite der undurchsichtigen Streifen mit d, die Summe $b + d$, d. h. die Gitterconstante, mit a bezeichnet. Wir verweisen für die Einzelheiten auf die bekannte Theorie[2]), sowie namentlich

---

1) Dieser theoretisch vorgeschriebenen Definition entsprechen angenähert nur die Metallschichtgitter, welche bedeutend geringere Polarisationswirkungen geben, als die Metalldrahtgitter (§ 19 Anm.)

2) Siehe Verdet-Exner, Wellentheorie § 80, Braunschweig 1881. Lord Rayleigh, Wave-theory (§ 14), Encycl. Britt. 9. Aufl. 24. p. 437.

auf eine jüngst erschienene Abhandlung des Hrn. Sirks[1]), worin er diese behufs Anwendung auf eine specielle praktische Frage umgestaltet und verallgemeinert hat; mit ihm führen wir das Oeffnungsverhältniss („coefficient de transparence générale") $b/a = \mathfrak{p}$ ein. Nennen wir die Strahlungsintensität im $m$ten Beugungsbilde (Hauptmaximum zweiter Klasse) A_m, im Centralbilde A_0; diejenige, welche an der Stelle des letzteren herrschen würde, falls das Gitter entfernt wäre, A; der Beugungswinkel sei mit γ bezeichnet.

§ 27. Es gilt nun das ebenso allgemeine wie einfache Gesetz

(2) $$A_0 = A\,\mathfrak{p}^2,$$

d. h. man bestimmt den schwächenden Einfluss, welchen das Gitter auf die Amplitude (resp. die Intensität) am Orte des Centralbildes ausübt, unabhängig von der Wellenlänge, durch seine rein geometrische Schattenwirkung, gemessen durch das Oeffnungsverhältniss $\mathfrak{p}$ (resp. durch deren Quadrat). Ferner ist:

(3) $$A_m = \frac{A_0}{m^2\,\mathfrak{p}^2\,\pi^2}\sin^2 m\,\mathfrak{p}\,\pi = \frac{A}{m^2\,\pi^2}\sin^2 m\,\mathfrak{p}\,\pi\,,$$

wobei die Lage dieses $m$ten Bildes durch folgende bekannte elementare Beziehung gegeben ist:

(4) $$\sin\gamma = \frac{m\,\lambda}{a}$$

Das $m$te Beugungungsbild fällt aus, wenn $m\,\mathfrak{p}$ eine ganze Zahl wird, weil dann $A_m = 0$

In dem besonderen Falle, wie er auch bei unseren Drahtgittern vorlag (wofern diese ‖ zur Wellenfront aufgestellt waren), dass $b = d = a/2$, also $\mathfrak{p} = 1/2$, werden die Gleichungen:

(2a) $$A_0 = \frac{1}{4}A\,.$$

(3a) $$A_m = \frac{4\,A_0}{m^2\,\pi^2}\sin^2\frac{m\,\pi}{2} = \frac{A}{m^2\,\pi^2}\sin^2\frac{m\,\pi}{2}$$

Demnach fallen dann die Beugungsbilder gerader Ordnungszahl aus, und diejenigen ungerader Ordnungszahl haben die Intensität $A/m^2\pi^2$. Wir erhalten also folgende Reihe

	Links					Central	Rechts				
m:	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
A_m:	$\frac{A}{25\pi^2}$	0	$\frac{A}{9\pi^2}$	0	$\frac{A}{\pi^2}$	$\left(\frac{A}{4}\right)$	$\frac{A}{\pi^2}$	0	$\frac{A}{9\pi^2}$	0	$\frac{A}{25\pi^2}$

1) J. L. Sirks, Sur l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires, placé devant l'objectif d'une lunette, sur la clarté de l'image principale d'une étoile (vgl. Nachtrag); Versl. en Meded. Akad. Amsterdam. (3) **9.** p. 307. 1892.

Diese ist nach links und rechts stark convergent und ihre Summe[1]) ist $A/2$, d. h. gleich der vom Gitter überhaupt durchgelassenen Strahlungsmenge, welche sich in diesem Falle zur Hälfte auf das Centralbild, zur Hälfte auf die Summe der ungeraden Hauptmaxima zweiter Klasse vertheilt.

Aehnlich lässt sich im allgemeinen Falle ($\mathfrak{p} \lesseqgtr {}^1/_2$) zeigen, dass von der durchgelassenen Strahlung ($\mathfrak{p} A$) der $\mathfrak{p}$te Theil sich ungebeugt fortpflanzt, dagegen der $(1 - \mathfrak{p})$te Theil der Summe der Beugungsbilder entspricht.

§ 28. Um zu prüfen, inwiefern diese zunächst für einen unendlich dünnen durchbrochenen Schirm abgeleiteten Beziehungen auch für unsere Gitter zutreffen, haben wir einige derselben mit Natronlicht optisch untersucht; dabei war das Gitter auf einem drehbaren Spectrometertische befestigt, sodass die Drahtrichtung vertical stand; der besseren Uebersicht halber schalten wir diese Versuche erst an dieser Stelle ein.

Gemäss der Theorie sind die zweiten, vierten etc. Hauptmaxima unsichtbar bez. äusserst lichtschwach. Bei Drehung des Spectrometertisches geht deren Helligkeit durch ein sehr flaches Minimum, wenn das Gitter durch die zur Collimatoraxe ⊥ Lage passirt, weil die Oeffnungsbreite dann selbst ein Maximum durchläuft.

Die Auslöschung des 3. Beugungsbildes lässt sich dagegen viel schärfer bestimmen und gewährt einen Anhaltspunkt für die Beurtheilung der Gitterdimensionen bez. der Anwendbarkeit der Theorie, wie Hr. Sirks l. c. gezeigt hat. Jene Auslöschung muss nach dem Vorhergehenden theoretisch eintreten, sobald $3\,\mathfrak{p}$ eine ganze Zahl wird; da $\mathfrak{p} < {}^1/_2$ sein muss, so reducirt sich diese Bedingung auf den Werth $\mathfrak{p} = {}^1/_3$.

Nun werden bei geneigtem Gitter die scheinbaren Werthe b' und a' (l. c. § 10)

$$b' = a \cos\beta - d$$

$$a' = a \cos\beta$$

folglich

(5) $$\mathfrak{p} = \frac{b'}{a'} = 1 - \frac{d}{a \cos\beta}.$$

1) Riemann-Hattendorf, partielle Differentialgleichungen 3. Aufl. p. 53, Braunschweig, 1882.

Falls $a = 2\,d$, wird also $\mathfrak{p} = {}^1/_3$ für

$$\beta = \arccos(^3/_4) = 41^0\,25'.$$

§ 29. Versuche mit dem Gitter Cu 2 ergaben nun Auslöschung des 3. Bildes für

$$\beta = 40^0\,50'.$$

Mit dem feineren Gitter Cu 1 für

$$\beta = 39^0\,57'.$$

Nehmen wir die Theorie als richtig an, so würde aus diesen kleineren Winkeln folgen, dass die wahre Oeffnungsbreite um 1—2 Proc. geringer wäre, als die Drahtdicke; das ist aber nach der Art der Herstellung ganz ausgeschlossen. Wir müssen daraus schliessen, dass die Theorie nur angenähert richtig sein kann, und zwar um so angenäherter, je weniger fein das Gitter. Die hübsche Methode des Hrn. Sirks durch Auslöschung bestimmter Beugungsbilder die Drahtdicke zu bestimmen, wird daher für weitmaschige Gitter vermuthlich richtige Werthe ergeben, darf aber auf unsere feineren Gitter nicht angewandt werden; vielmehr glauben wir am sichersten zu gehen, wenn wir $b = d$ annehmen, (vgl. § 8).[1])

Es ist unter dieser Voraussetzung für alle Gitter

|| zur Wellenfront ($\beta = 0^0$): $\mathfrak{p} = 0{,}500$ $\mathfrak{p}^2 = 0{,}250$.
Geneigt zur Wellenfront ($\beta = 45{,}6^0$): $\mathfrak{p} = 0{,}286$ $\mathfrak{p}^2 = 0{,}082$.

Diese von der Wellenlänge unabhängigen Werthe von $\mathfrak{p}^2$ sind nun die nach Gleichung (2) aus der Theorie hergeleiteten Werthe der centralen Durchlässigkeit Q_m für natürliches Licht, welche wir experimentell schon bestimmt haben (Tab. 6, 7).

Wir geben in Tab. 10 eine Zusammenstellung dieser theoretisch berechneten und der beobachteten Werthe; was letztere anbetrifft, so erinnern wir daran, dass sie ebenfalls von der Wellenlänge unabhängig gefunden wurden, und zwar im Bereiche $0{,}1 < \lambda < 0{,}6$ mcm.

Wie ersichtlich, ist die wahre Durchlässigkeit stets kleiner als die theoretisch berechnete; die Differenz wird geringer, je breiter die Oeffnung, wie die Werthe für die beiden Kupfer-

1) Falls etwa $b > d$, so würde die procentische Differenz den Werth von $\mathfrak{p}^2$ im selben Maasse vergrössern; denn

$$\Delta\mathfrak{p}^2/\mathfrak{p}^2 = 2\,\Delta\mathfrak{p}/\mathfrak{p} = 2\,\Delta d/a = \Delta d/d.$$

gitter zeigen; sie hängt ausserdem etwas von der Natur des Metalls ab. Auch hier wird die Theorie den Thatsachen zwar angenähert aber nicht vollkommen gerecht.

Tabelle 10.

Gitter	ϑ	b' mcm	p^2 berechnet	Q_m beobachtet	$\frac{Q_m}{p^2}$
Pt 1	45,6°	1,00	0,082	0,068	0,83
Pt 1	0°	2,50	0,250	0,224	0,90
Ag 1	0°	4,56	0,250	0,233	0,93
Au 1	0°	3,31	0,250	0,223	0,89
Fe 1	0°	2,50	0,250	0,224	0,90
Cu 1	45,6°	1,00	0,082	0,061	0,75
Cu 1	0°	2,50	0,250	0,207	0,83
Cu 2	0°	5,25	0,250	0,237	0,95

§ 30. Uebrigens ist schon früher (l. c. § 21) auf den auf diesem Gebiete herrschenden Mangel an Uebereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung hingewiesen worden [1]); es wurde betont, dass nur betreffs der Lage der Hauptmaxima bis jetzt eine Abweichung noch nie constatirt worden sei. Als Grund wurde angeführt, dass alle Theorien stillschweigend auf der Annahme fussen, dass die Wellenlänge äusserst gering sei im Vergleich zu den Dimensionen der beugenden Oeffnungen, wie dies u. A. Kirchhoff [2]) ausdrücklich hervorhebt. Ferner wird auch stets vorausgesetzt, dass die Natur des die Ränder bildenden Körpers einen specifischen Einfluss nicht ausübe, was zweifellos unrichtig ist.

In der That würde dann eine unbegrenzte Zahl von Beugungsbildern auftreten, wie dies auch bei der Summirung der (allerdings stark convergirenden) Reihen (§ 27) stillschweigend vorausgesetzt ist. Bei grösseren Werthen der Wellenlänge trifft dies aber durchaus nicht mehr zu, denn wenn wir zunächst noch die elementare Beugungsgleichung (4), $\sin\gamma = m\lambda / a$, auch bis zu den grössten Beugungswinkeln als gültig betrachten, so würde doch aus ihr schon folgen, dass, sobald $m\lambda > a$, $\sin\gamma > 1$ wird, folglich das betreffende Beugungsbild ins Imaginäre rückt. Vergrössern wir die Wellenlänge immer mehr, so verschwindet auf diese Weise ein Hauptmaximum

1) Ausser den l. c. angeführten Autoren sei hier noch auf eine neuere Arbeit von Paschen, Bolometrische Untersuchungen im Gitterspectrum, Wied. Ann. 48. p. 272. 1893 hingewiesen.

2) Kirchhoff, Wied. Ann. 18. p. 689. 1883.

zweiter Klasse nach dem andern, bis schliesslich, sobald $\lambda > a$, schon das erste Beugungsbild imaginär wird.

In diesem Grenzfalle pflanzt sich die sämmtliche überhaupt durchgelassene Strahlung nicht mehr in verschiedenen, scharf getrennten, Richtungen fort; sondern sie wird ein diffuses Strahlenbündel bilden, welches nur einen einzigen verwaschenen Bildfleck erzeugen wird. Wächst die Wellenlänge noch weiter, sodass λ gross wird gegen a, so wird schliesslich der Einfluss des Gitters auf den Strahlengang bez. die Gestalt der Wellenfront wieder geringer, bis er zuletzt unmerklich wird.

Die Theorie bezieht sich auf sehr dünne Schichtgitter; falls sie bei unseren Versuchen durchweg die Lage der Hauptmaxima noch richtig angab, wovon wir übrigens nicht sicher sein können, so existirten im ungünstigsten Falle ($\lambda = 0,6$, $a' = 3,5$) nur noch fünf Beugungsbilder zu jeder Seite des Centralbildes.

Aus alledem geht hervor, wie bei wachsender Wellenlänge die Beugung an Bedeutung einbüsst, bis sie schliesslich ganz wegfällt und das Gitter vorwiegend die Function eines Polarisators erfüllt. Im Folgenden wollen wir dies stets voraussetzen. Im Uebrigen können obige Ausführungen bestenfalls nur eine skizzenhafte Andeutung der wirklichen Vorgänge geben. Ihre verallgemeinerte Betrachtung führt zu dem Problem der Fortpflanzung von Wellenzügen durch Raumgebiete, in denen sie Hindernissen begegnen, welche mit der Wellenlänge vergleichbare Dimensionen aufweisen. Eine Bearbeitung hat diese Frage für polarisirbare Transversalwellen unseres Wissens bisher nicht erfahren; sie würde voraussichtlich mit erheblich Schwierigkeiten verbunden sein.

Pleochroitisches Krystallmodell.

§ 31. Die bolometrische Methode war nicht geeignet, uns darüber aufzuklären, ob zwischen den $\perp$ bez. $\parallel$ zur Drahtrichtung polarisirten Strahlungscomponenten neben Intensitätsdifferenzen auch Gangunterschiede entstanden. Früher war festgestellt worden, dass bei den verhältnissmässig groben Silberdrahtgittern der optische „Phaseneffect" jedenfalls nur ein geringer sein konnte (l. c. § 9). Wie die seitdem angestellten optischen Versuche zu zeigen scheinen, wird er bei

40*

feineren Gittern bereits merklicher und der Gangunterschied würde wahrscheinlich erhebliche Werthe aufweisen, wenn man mehrere hintereinander aufgestellte Gitter untersuchte.

In diesem Falle wäre übrigens die einfache Superposition der Wirkungen nicht mehr statthaft, da hierfür die Kleinheit derselben eine wesentliche Vorbedingung bildet (l. c. § 20). Vielmehr tritt an Stelle des Additionsgesetzes ein Exponentialgesetz, indem bei n hintereinander aufgestellten Gittern

$$(Q_p)_n = Q_p^n \qquad (Q_s)_n = Q_s^n$$

Folglich

$$(\mathfrak{n}^2)_n = \frac{(Q_s)_n}{(Q_p)_n} = \left(\frac{Q_s}{Q_p}\right)^n = (\mathfrak{n}^2)^n .$$

So würden z. B. fünf hintereinander aufgestellte Platindrahtgitter von 1 mcm Oeffnungsbreite für $\lambda = 0{,}6$ mcm theoretisch ein Durchlässigkeitsverhältniss 0,008 ergeben, sodass also die $\perp$ zur Drahtrichtung polarisirte Strahlungscomponente mit nur 8 pro Mille der Intensität der $\|$ jener Richtung polarisirten Componente hindurchgelassen werden würde, einer nahezu vollständigen Polarisation entsprechend. Gerade umgekehrt verhält es sich im sichtbaren Gebiete bez. in demjenigen Spectralbereiche, welcher unterhalb des neutralen Punktes liegt. Ein Drahtgitter, welches bei weissem Lichte zwischen gekreuzten Nicols bei 45° Azimuth betrachtet wird, gibt lebhafte Farbenerscheinungen; es verhält sich, wie ein schwach pleochroitischer Krystall. Der Pleochroismus wird aber ein sehr starker, sobald man diesen Ausdruck auch auf die Strahlung grösserer Wellenlängen ausdehnt, welcher eine sichtbare Farbe nicht mehr entspricht.

§ 32. Wir besitzen daher in feinen Drahtgittern, welche keine Beugungsbilder mehr erzeugen, ein vollständiges Analogon zu einer pleochroitischen Krystallplatte; etwa einer dünnen, gefärbten Turmalinplatte $\|$ der optischen Axe, welche ebenfalls das zu dieser ihrer Vorzugsrichtung $\perp$ polarisirte Licht vorwiegend durchlässt[1]); dabei bleibt der Gangunterschied beider Componenten auch ein verhältnissmässig geringer. Allgemein sind Doppelbrechung und Pleochroismus zusammengehörige Eigen-

---

1) Das Verhalten des Turmalins, sowie anderer Krystalle gegen Wärmestrahlen wird gegenwärtig im hiesigen Institut untersucht.

schaften, welche stets gemeinsam auftreten, von welchen aber die eine oder andere überwiegen kann. So bietet der Kalkspath in dieser Beziehung nur einen quantitativen Gegensatz zum Turmalin, indem seine geringe Absorptionsdifferenz gegen den Unterschied der beiden Brechungsindices völlig zurücktritt.

In der mehrfach erwähnten Abhandlung des einen von uns (l. c. §§ 1, 26) sind Gitter sowie anomal pleochroitische Krystalle unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte betrachtet worden. Dabei wurde hervorgehoben, dass die in beiden Fällen auftretende Vorzugsrichtung einmal durch die grobe makroskopische Structur, andernfalls durch das moleculare Gefüge bedingt sein könne. Ein weitergehender ursächlicher Zusammenhang wurde nicht postulirt, und wir möchten auch jetzt eine solche Hypothese noch nicht aufstellen. Hingegen scheint es uns von Interesse, die hier zu Tage tretende Analogie, wenigstens im Umrisse, etwas weiter zu entwickeln, indem wir zunächst ohne irgendwelche hypothetische Annahmen ein metallisches Modell eines trichroitischen rhombischen Krystalls zu construiren versuchen werden.

§ 33. Wir bemerken dazu, dass die kreiscylindrischen Gitterdrähte als Ovoide mit unendlicher Rotationsaxe betrachtet werden können; eine ähnliche Wirkung würde zweifellos erzielt werden, falls jeder Draht durch eine Anzahl aneinandergereihter endlicher Ovoide ersetzt würde. Diesen wesentlich ebenen zweidimensionalen Gebilden verleihen wir die dritte Dimension, sobald wir deren mehrere hintereinander aufstellen. Es bedarf danach wohl keiner weiteren Erörterungen, um darzuthun, dass die Eigenschaften des zu construirenden Modells einer der beiden folgenden Anordnungen innewohnen müssen.

Entweder einem regulären (nach drei $\perp$ Richtungen äquidistanten) Netze stark absorbirender dreiaxiger Ellipsoide, welche in ein durchlässiges Mittel eingebettet sind.

Oder einem rhombischen (nach drei $\perp$ Richtungen verschiedene Maschenweite zeigenden) Netze ebenso eingelagerter Kugeln.

Eine Combination beider Anordnungen würde selbstverständlich dasselbe leisten. Die Absorption würde abhängig sein, sowohl von der Fortpflanzungsrichtung wie von der Orientirung der Polarisationsebene, wie endlich auch von

der Wellenlänge. Dabei würden sich drei zu einander ⊥ ungleichwerthige Vorzugsrichtungen bez. Symmetrieaxen ergeben. Es sind das die charakteristischen Merkmale des nachzuahmenden rhombisch-trichroitischen Krystalls. Offenbar lassen sich ebenso Krystallmodelle höherer Symmetrie (hexagonal, tetragonal) oder niederer Symmetrie (monosymmetrisch, asymmetrisch) construiren.

§ 34. Den bisherigen Ausführungen wohnt ein hypothetischer Charakter, wie wir glauben, nicht inne; vielmehr sind sie auf die im Vorhergehenden mitgetheilten experimentellen Ergebnisse basirt. Zum Schlusse können wir aber nicht umhin, auf zwei auffallende Analogien mehr speculativer Art hinzuweisen.

Erstens hat bekanntlich Poisson eine, übrigens jetzt völlig unhaltbare, Theorie des Magnetismus aufgestellt, wonach Kugeln von unendlicher Permeabilität in ein magnetisch indifferentes Medium eingebettet sein sollten; und in einem Zusatze erörtert er die Möglichkeit, dass statt dieser Kugeln bei Krystallen Ellipsoide anzunehmen seien.[1])

Von Faraday wurde die Poisson'sche Theorie auf Dielectrica übertragen, welche er sich aus kugelförmigen leitenden Körperchen aufgebaut dachte (z. B. Schrot in Terpentinöl).[2]) Diese Annahme wurde dann von Mossotti, Clausius, Mascart und Joubert[3]) weiter entwickelt; diese letzteren zeigten, dass es genügt, wenn man den eingebetteten Kügelchen eine hohe Dielectricitätsconstante beilegt, ohne dass sie darum nothwendig gute Leiter zu sein brauchen. Macht man nun bei dieser Theorie noch dieselbe Nebenannahme, wie sie Poisson aufstellte, so postulirt man für das entsprechende äolotrope Dielectricum dieselbe Structur, zu der wir für das rhombisch-trichroitische Krystallmodell auf gänzlich verschiedenem Wege gelangten.

Zweitens ist in diesem Zusammenhange zu erwähnen, dass es bereits de Sénarmont[4]) gelang, künstlichen Pleo-

---

1) Poisson, Mém. de l'Inst. **5.** p. 258. 1822. Die entsprechenden, ihm völlig unbekannten Erscheinungen des Krystallmagnetismus wurden dann erst 1847 von Plücker entdeckt.

2) Faraday, Exp. Res. **1.** § 1679. 1838.

3) Mossotti, Mem. mat. e fis. Modena. (2) **14.** p. 49. 1850; Clausius, Mech. Wärmetheorie. **2.** Abschn. III. Braunschweig 1879; Mascart u. Joubert, El. et Magn. **1.** § 167. Paris 1882.

4) H. de Sénarmont, Compt. rend. **38.** p. 101. 1854.

chroismus zu erzeugen; dazu liess er das an sich farblose Strontiumnitrat aus einer mit Campecheholz versetzten Mutterlauge gefärbt auskrystallisiren. Seitdem haben sich eine Anzahl Forscher mit ähnlichen Versuchen beschäftigt[1]); es gelingt vielfach durch die in das Krystallgefüge mit aufgenommenen, daher irgendwie regelmässig gelagerten, feinsten farbigen Einschlüsse die in Rede stehende Eigenschaft nachzuahmen. Wahrscheinlich sind überhaupt sehr viele, wenn nicht alle, der natürlich vorkommenden Fälle von Pleochroismus auf dieselbe Ursache zurückzuführen. Der Vergleich mit den oben mitgetheilten Versuchen dürfte auf diese längst bekannte Gruppe von Erscheinungen ein unerwartetes Licht werfen.

Vergleich mit den Hertz'schen Gittern.

§ 35. Der gleich anfangs erörterte Gegensatz zwischen dem Sinne der Polarisation der Hertz'schen Gitter und demjenigen der unserigen im sichtbaren Spectralbereiche, welcher den Anstoss zur Ausführung der beschriebenen Versuche gab, dürfte nunmehr in einfacher Weise beseitigt sein, indem sich bei allen untersuchten Gittern der Sinn der Polarisation beim neutralen Punkte umkehrt. Wir glauben darin ein neues Zeichen für die Tragweite der Untersuchungen des Hrn. Hertz erblicken zu sollen. Denn während dieser Forscher sich bei der Mehrzahl seiner Versuche von dem Gedanken der Analogie der aufzufindenden Erscheinungen mit bekannten optischen Vorgängen (Fortpflanzung, Reflexion, Brechung, Interferenz des Lichtes) leiten lassen konnte, musste er die Polarisation der electromagnetischen Wellen durch ein Mittel bewirken, für welches seinerzeit kein optisches Analogon bekannt war.[2])

Um dieses aufzufinden, genügte es, den umgekehrten Weg zu beschreiten, indem die Kenntniss der neueren Erscheinungen als Richtschnur auf dem älteren Gebiete benutzt wurde. In dieser Hinsicht versagte die electromagnetische Theorie des Lichtes, oder allgemeiner der Strahlung, nicht, und unsere Versuche dürften daher einen erneuten Beweis für deren

1) Vgl. Kundt, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 622. 1874.

2) Wenigstens wenn von den Versuchen Fizeau's, v. Mohl's und Hofmeister's abgesehen wird; vgl. W. König, Verh. der phys. Ges. Berlin. 8. p. 36. 1889; auch Wied. Beibl. 13. p. 667. 1889. Ambronn, l. c. p. 718.

Fruchtbarkeit erbringen. In der Ausdrucksweise jener Theorie lassen sich schliesslich unsere Resultate folgendermaassen formuliren:

Solange die Wellenlänge einen bestimmten (soweit unsere Versuche reichen, von der Oeffnungsbreite unabhängigen, dagegen für das Metall charakteristischen) Werth nicht überschreitet, lässt das Gitter einen grösseren Bruchtheil der auffallenden Strahlung hindurch, wenn der electrische Vector der Drahtrichtung ∥ liegt; für grössere Werthe der Wellenlänge überwiegt dagegen die Durchlässigkeit, wenn der magnetische Vector diese Vorzugsrichtung besitzt.

Berlin, Phys. Inst. der Univ., 5. Juni 1893.

Nachtrag. Die Arbeit des Hrn. Sirks (p. 623) bezweckte die Bestimmung der Lichtschwächung durch Messingdrahtnetze, wie sie nach Kapteyn und Scheiner bei der photographischen Himmelsaufnahme benutzt werden. In ihrem diesbezüglichen Gutachten (l. c. p. 302) deuteten die Hrn. Lorentz und v. d. Sande-Bakhuyzen bereits auf Correctionen hin, deren Ursache mit den von uns beschriebenen Erscheinungen zusammenhängt. Wir haben diese Correction aus unseren Daten unter folgenden Annahmen, deren Berechtigung nach dem Vorigen zu beurtheilen ist, zu berechnen versucht (Tab. 11).

1) Die von Hrn. Sirks mittels Auslöschung des 5. Beugungsbildes bestimmten Dimensionen der (relativ weitmaschigen) Drahtnetze sind richtig.

2) Die Gesammtdurchlässigkeit von Kette und Einschlag ist auszudrücken als das Product derjenigen zweier entsprechender „gekreuzt" hintereinander aufgestellter Gitter. Diese Annahme macht auch Hr. Sirks.

3) Die Correction $1 - Q_m / \mathfrak{p}^2$ (Tab. 10) lässt sich aus dem Werthe 0,05 für Cu 2 (b = 5,25 mcm) berechnen, indem sie umgekehrt proportional der (grössern) Oeffnungsbreite der Messingdrahtgitter gesetzt wird.

Tabelle 11.

	d	b	a	$\mathfrak{p} = b/a$	$\mathfrak{p}^2$	$Q_m/\mathfrak{p}^2$	Q_m
1. Kette	16,2	27,4	43,6	0,627	0,393	0,990	0,389
2. Einschlag . . .	14,6	19,2	33,8	0,569	0,324	0,986	0,319
Product 1 × 2				0,357	0,128	—	0,124
Reciprokes Product				2,80	7,84	—	8,06
Logarithmus desselben				—	0,8943	—	0,9064
Log / 0,4 = Schwächung in „Grössen"				—	2,24	—	2,27

Die Helligkeit des centralen Sternbildes würde demnach um 2,27 Grössen geschwächt werden, statt um 2,24, wie Hr. Sirks ohne diese Correction fand, welche also keine sehr bedeutende ist.

2. *Die obere Grenze der Wellenlängen, welche in der Wärmestrahlung fester Körper vorkommen können; Folgerungen aus dem zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie; von Willy Wien.*

Die bisher sichergestellten Gesetze der Strahlung sind ausschliesslich aus dem zweiten Hauptsatze abgeleitet worden. Als Grundlage dienten bekannte Eigenschaften der Aetherwellen, ohne dass man auf die Bewegungen der Molecüle selbst und die Wechselwirkungen zwischen ihnen und dem Aether zurückzugehen brauchte. Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse ist diese rein thermodynamische Behandlungsweise die einzige, welche ganz frei von Hypothesen bleibt und deshalb sichere Resultate liefert. Andererseits muss sie sich darauf beschränken, die Gesetzmässigkeiten der Strahlung aufzufinden, soweit sie einzig und allein durch die Wärmebewegung als solche hervorgerufen wird, und kann niemals die Einzelheiten darstellen, welche wahrscheinlich durch besonderen Molecularbau oder durch zufällige Beschaffenheit der strahlenden Oberfläche bedingt sind. Es sind nach diesen Principien die Beziehungen zwischen Emission und Absorption, die Abhängigkeit von dem umgebenden Medium, die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur für *schwarze Körper* als physikalisch bekannt anzusehen. Die letzte Beziehung lässt sich auf beliebige Körper ausdehnen, wenn das Reflexionsvermögen als Function der Temperatur bekannt ist.

Dagegen ist die Energievertheilung im Spectrum bei *einer* Temperatur noch unbekannt und aus den erwähnten Beziehungen nicht zu gewinnen. Soweit ich sehe, ist diese letzte noch fehlende Lücke durch die gegenwärtige Kenntniss der Eigenschaften der Aetherwellen nicht ausfüllbar, weil hier Rechenschaft verlangt wird, in welchem Verhältniss der Intensität der strahlende Körper Strahlen verschiedener Wellenlänge aussendet. Um diese durch einen thermodynamischen Process zu geben, müssten wir Eigenschaften kennen, welche eine verschiedene Abhängigkeit der Strahlen verschiedener Wellenlänge von ihrer Intensität anzeigt.

Es lässt sich aber zeigen, dass solche Strahlen, *welche von Drahtnetzen vollständig zurückgeworfen werden, in der Wärmestrahlung nur unendlich kleine Intensitäten haben können.*

Bevor wir uns zu den Voraussetzungen und der Ableitung dieses Satzes wenden, wollen wir uns damit beschäftigen, aus dem Gesetze, welches die Abhängigkeit der Strahlung von dem umgebenden Medium ausspricht [1]), einige einfache Folgerungen zu ziehen, von denen wir später Gebrauch zu machen haben.

§ 1.

Vertheilung der Strahlung in Räumen, die mit dielectrisch polarisirbarer Substanz angefüllt sind.

Im Innern eines geschlossenen leeren Raumes, dessen Wände ein für alle möglichen Wärmestrahlen von Null verschiedenes Emissionsvermögen besitzen, und gleiche Temperatur haben, befindet sich eine dieser Temperatur entsprechende gleichmässig vertheilte Strahlung. Die Energiemenge dieser Strahlung ist nach einer von Kirchhoff aus seinem bekannten Satze gezogenen Folgerung so gross, als ob die Wände des Raumes vollkommen schwarz wären. Es lässt sich ohne weiteres einsehen, dass dieselbe Energiemenge vorhanden sein muss, wenn ein Theil der Wände vollkommen spiegelnd und nur der übrige entweder vollkommen schwarz ist oder für alle Strahlen ein endliches Emissionsvermögen besitzt. Ist der Raum kein Vacuum, sondern mit einer isolirenden Substanz erfüllt, so ist die Energiemenge nach dem erwähnten Gesetz eine grössere und zwar für jede Schwingungsdauer im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Wenn der Raum mit schwarzen Innenwänden theilweise Vacuum, theilweise mit dem Isolator angefüllt ist, so folgt weiter, dass die Energievertheilung auch jetzt sowohl im Vacuum als im Isolator die soeben festgesetzte ist. *Wir wollen sie als die normale bezeichnen.*

Dasselbe ist der Fall, wenn die dem Isolator anliegenden Wände vollkommen spiegelnd sind und die schwarzen Flächen nur an das Vacuum stossen.

---

1) v. Helmholtz, Physiol. Optik p. 171; Clausius, Mech. Wärmetheorie 1. p. 315.

Denn denkt man sich hinter dem Spiegel eine schwarze Fläche von der gleichen Temperatur, so würde, wenn in dem Isolator eine grössere Energiemenge als die normale herrschte, nach dem Fortziehen des Spiegels, wie aus dem vorigen folgt, nunmehr die normale Vertheilung sich herstellen, also ein Theil der Energie an die schwarze Fläche übergehen müssen; es würde sich diese also auf Kosten der gleichtemperirten andern erwärmen. Wenn andererseits die anfängliche Vertheilung so wäre, dass in dem Isolator eine geringere Energiemenge als die normale sich befände, so könnte man durch Fortziehen des Spiegels die normale herstellen und dabei würde die schwarze Fläche hinter dem Spiegel ein bestimmtes Wärmequantum abgeben. Nach Schliessung des Spiegels müsste sich dann wieder das anfängliche Gleichgewicht der Strahlung herstellen und dabei Wärme an die im Vacuum befindliche schwarze Fläche übergehen, die sich nun auf Kosten der andern erwärmen würde. Auch wenn der isolirende, feste Körper völlig frei begrenzt in dem Raum sich befindet und vom Vacuum umgeben wird, ist immer die Energievertheilung die angegebene. Ein solcher Körper ist von gleichmässiger Strahlung umgeben und der Druck auf seine Oberfläche hält ihn an jeder Stelle des Raumes im Gleichgewicht. Eine Bewegung desselben durch diesen Raum ist deshalb auch mit keiner Arbeitsleistung gegen den Druck der Strahlung verbunden. Die Veränderung der Farbe nach dem Doppler'schen Princip[1]) muss sich hier ebenfalls aufheben, weil eine solche Veränderung immer einer Arbeitsleistung gleichwerthig ist. Die Verkürzung der Schwingungsdauer auf der einen Seite wird von der Verlängerung auf der anderen in jedem Zeitintervall aufgehoben. Wäre nun die Energievertheilung zwischen dem Vacuum und dem isolirenden Körper nicht die normale, so könnte man ihn ohne angebbare Arbeitsleistung bis an die schwarze Fläche verschieben. Die sich dann herstellende normale Vertheilung würde, wie bereits erörtert, zu einer Erwärmung eines Theiles der Oberfläche des Raumes auf Kosten eines anderen führen.

---

1) W. Wien, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 9. Febr. 1893.

§ 2.
Voraussetzungen.

Bei den Betrachtungen, welche wir anstellen wollen, muss vorausgesetzt werden, dass die Strahlung jeder Wellenlänge von den einschliessenden Wänden vollständig zurückgeworfen wird. Nun ist der Vorgang der Reflexion immer mit einer geringen Absorption verbunden. Denkt man sich aber die Dimensionen der betrachteten Räume vergrössert, so steigert man die Dimensionen der Räume in der dritten Potenz, die spiegelnde Oberfläche aber nur im Quadrat der Lineardimensionen. Es ist also keine theoretische Grenze gegeben, die in einer bestimmten Zeit absorbirte Energie auf einen beliebigen Bruchtheil des ganzen Energievorrathes hinabzudrücken.

Wir setzen weiter voraus, dass bei Bewegung beliebiger, auch gasförmiger Körper in einem mit Strahlung erfüllten Raume keine andern ponderomotorischen Kräfte wirksam werden als die Maxwell'schen Druckkräfte.

Aus diesen Annahmen werden wir folgern, dass Wellenlängen, welche durch Drahtnetze nicht hindurchgehen, auch in der Wärmestrahlung nicht als endliches Energiequantum vorkommen können. Wenn die Hertz'schen Schwingungen von Drahtnetzen vollständig zurückgehalten werden[1]), so müssen wir annehmen, das die obere Grenze der Wellenlängen, welche von der Wärme hervorgebracht werden können, zwischen denen der Hertz'schen Schwingungen und der bisher beobachteten ultrarothen Strahlen liegt. Die Voraussetzung liegt also darin, dass die Durchlässigkeit des Drahtgeflechtes für Strahlung schnell mit wachsender Wellenlänge abnimmt. Von einer bestimmten Grenze an muss gleichzeitig die entsprechende Energie kleiner und kleiner werden.

§ 3.
Die Bewegung eines ideellen Gases in einem mit Strahlung von grosser Wellenlänge erfüllten Raume.

Durch die Eigenschaft der Drahtnetze, Strahlung von grosser Wellenlänge zurückzuhalten, ist offenbar die Möglich-

1) Hertz, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1888. p. 841; Stefan, Sitzungsber. d. Wien. Akad. 24. April 1890; H. Rubens und R. Ritter, Wied. Ann. **40.** p. 55. 1890.

keit geboten, die wägbaren Theile eines ideellen Gases durch die Zwischenräume des Netzes aus dem Raume austreten zu lassen, während die Strahlung gezwungen ist, zurückzubleiben. Nach unserer Voraussetzung wird hierbei keine Arbeit geleistet soweit die Strahlung in Betracht kommt. Wenn sich auf der anderen Seite des Netzes ein beweglicher Stempel befindet, so kann das hindurchgehende Gas eine seiner Ausdehnung entsprechende Arbeit leisten. Dann ist der Process umkehrbar.

Wenn nun auch von dem Drahtnetz die Schwingungen nicht hindurchgelassen werden, so muss doch die Möglichkeit offen gehalten werden, dass ein Theil der electrischen Energie, *soweit diese durch die dielectrische Polarisation vermehrt wird,* an den Gasmolecülen haftet und mit diesen fortgezogen wird. Das Verhältniss der durch Anwesenheit der Gasmolecüle vermehrten Energie zu der im Vacuum ist bei constant gehaltener electrischer Kraft gleich der dielectrischen Constante und in demselben Verhältniss steht die Dichtigkeit der normalen Strahlung in beiden Fällen. Diese ist doppelt so gross, als die der electrischen Energie. Wenn also auch die ganze, durch Polarisation erfolgte Vermehrung der Energie vollständig an den wägbaren Theilen haftete, so würde doch immer nur die Hälfte des Ueberschusses, den die Anwesenheit des Gases in der Dichtigkeit der Energie bedingt, von den Molecülen fortgezogen werden. Nun ist nach Boltzmann die dielectrische Constante proportional der Dichtigkeit des Gases. Die Dichtigkeit der Strahlung ist also in einem sich ausdehnenden Gase immer dann die normale, wenn die Dichtigkeit der Strahlung in demselben Verhältniss sich ändert.

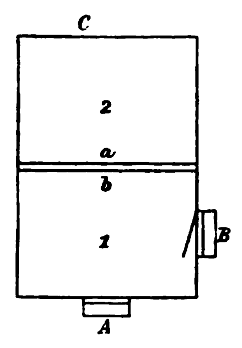
Wenn wir also im Stande sind, während das durch das Gitter strömende Gas den Stempel vor sich hertreibt, durch die vorausgesetzten Eigenschaften des Drahtnetzes auch nur die Hälfte des Ueberschusses der Energie, den die hindurchgegangenen Molecüle vorher bedingten, an dem Gitter zurückzuhalten, so haben wir diesseits des Gitters eine Dichtigkeit der Strahlung, welche grösser ist, als die normale. Wenn wir Körper herstellen könnten, welche durch blosse Erwärmung nur Strahlen von der betrachteten Wellenlänge aussenden, so besässen wir ein Mittel, einen solchen Körper auf Kosten

eines anderen von derselben Temperatur zu erwärmen, weil die betrachteten Vorgänge vollständig umkehrbar sind. Wir müssen aber auf die Anwesenheit der anderen Wärmestrahlen, welche von dem Drahtgitter hindurchgelassen werden, Rücksicht nehmen und deshalb einen etwas verwickelteren Process betrachten.

§ 4.

Ausscheidung der Strahlung von grosser Wellenlänge.

Wir denken uns einen Cylinder, in welchem sich ein beweglicher, für Strahlung vollkommen durchlässiger Stempel *a* befindet. Die Innenwände seien vollkommen spiegelnd; die Schlusswand *C* sei ebenfalls beweglich. Der Stempel *a* theilt den Raum in zwei Theile 1 und 2. Hinter *A* und *B* sollen sich schwarze Körper von unendlich grosser Wärmecapacität befinden, welche durch bewegliche lichtdichte Klappen in den Spiegeln vom Innenraum getrennt sind. Zwischen den Klappen und den schwarzen Körpern befinden sich für Strahlung vollkommen durchlässige Platten, welche den Raum gasdicht abschliessen. Der Raum zwischen diesen Platten und dem schwarzen Körper sei Vacuum; ebenso Raum 2. In Raum 1 dagegen soll sich ein ideelles Gas von beliebiger Temperatur befinden. Alle Spiegel und die durchlässigen Platten sollen schlechte Wärmeleiter sein, sodass das Gas durch Leitung weder Wärme abgibt noch empfängt. Da das Gas selbst vollkommen durchlässig für Strahlen ist, gibt es keine Wärme durch Strahlung ab und nimmt keine auf.



Anfangs sei die Klappe *B* geschlossen, *A* offen. Es stellt sich dann ein Gleichgewichtszustand der Energie her, indem in Raum 1 die dem dielectrischen Verhalten des Gases entsprechende normale Strahlung sich gleichmässig vertheilt, in 2 die dem Vacuum entsprechende sich ansammelt.

Wir schliessen jetzt *A* und gehen mit *a* gegen *C* hin. Das Gas folgt dem Stempel und leistet dabei eine bestimmte Arbeit auf Kosten seines Wärmevorraths. Dieser Process ist umkehrbar. Die Strahlung wird bei der Ausdehnung des

Gases ebenfalls Arbeit leisten, weil im Raum 1 die Dichtigkeit infolge der Anwesenheit des Gases eine grössere ist. Da diese Arbeitsleistung auf Kosten der Strahlung geschehen ist, wird ihre Dichtigkeit nicht mehr die normale sein; würden wir jetzt den Raum 1 mit dem schwarzen Körper in Austausch der Strahlung setzen, so würde ein Ausgleich stattfinden, der nicht mehr umkehrbar wäre. Wenn wir dagegen den Stempel *C* jetzt so weit vorschieben, dass die Dichtigkeit der Strahlung nunmehr die normale wird, so wird ein Oeffnen der Klappe *B* offenbar keine Veränderung der Strahlung hervorbringen, Dann sind die Vorgänge vollständig umkehrbar.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen denken wir uns den Stempel *a* wieder in seiner Anfangslage, und zwar belegt mit einem Drahtnetz, welches Strahlen, deren Wellenlänge eine gewisse Grenze überschreitet, vollständig zurückwirft. Die Drähte des Netzes sind der Strahlung kürzerer Wellenlänge gegenüber auch als spiegelnd anzusehen. Diese Strahlen gehen frei durch das Geflecht hindurch. Ein zweites frei bewegliches Drahtnetz *b* befinde sich zwischen *a* und dem Raum 1 (Figur p. 638) unendlich nahe an *a*. Dann vollziehen wir folgenden Kreisprocess.

I. Vorwärtslaufende Processe.

1. *Anfangszustand.* *B* ist geschlossen, *A* offen; der Stempel *a* liegt dicht an dem Netz *b*; in 1 befindet sich das Gas und die Gesammtstrahlung; in 2 nur die Strahlung kürzerer Wellenlänge.

2. *A* wird auch geschlossen; der Stempel *a* wird eine Strecke bewegt; dabei leistet Arbeit

a) die Strahlung kürzerer Wellenlänge entsprechend ihrer grösseren Dichtigkeit im Gase;

b) das Gas;

c) die möglicherweise von den Gasmolecülen hinübergezogene Strahlung grosser Wellenlänge (vgl. § 3), welche von dem Drahtnetz des Stempels *a* zurückgeworfen wird.

3. Der Stempel *C* wird so weit vorgeschoben, dass die durch die Arbeitsleistung 2a) verminderte Energie der Strahlung kurzer Wellenlänge wieder normale Dichtigkeit in 2 hat. Nach § 1 hat sie diese dann auch in 1.

4. Es wird B geöffnet. Die Strahlung kurzer Wellenlänge bleibt unverändert. Die Strahlung grosser Wellenlänge hat in 1 einen Ueberschuss über die normale Dichtigkeit (vgl. § 3). Dieser Ueberschuss Q geht an B über. Die Strahlung grosser Wellenlänge zwischen a und b bleibt unverändert.

II. Rückwärtslaufende Processe.

1. B wird wieder geschlossen. Der Stempel C in seine frühere Lage zurückgeführt; dabei wird die auf dem Hinwege geleistete Arbeit wiedergewonnen.

2. Das Gitter b wird so weit nach C bewegt, dass die Strahlung grosser Wellenlänge auf beiden Seiten gleich gross wird; dabei wird Arbeit gewonnen.

3. Das Drahtnetz b wird fortgezogen; der Stempel a in seine Anfangslage zurückgebracht; hierzu genügen die unter I. 2a), b), c) und II. 2. gewonnenen Arbeitswerthe, weil keine Strahlung ohne entsprechende Arbeitsleistung sich ausgedehnt hat.

4. b wird an seine erste Stelle gesetzt; A geöffnet, der Anfangszustand ist wieder erreicht.

Da die Ueberführung des Energiequantums Q von A nach B dem zweiten Hauptsatz widerspricht, müssen wir annehmen, *dass solche Strahlen, welche von dem Gitter vollständig zurückgehalten werden, überhaupt in der Wärmestrahlung keine endliche Intensität haben.*

Für die Ausstrahlung der Körper bei sehr niedriger Temperatur kann die gleiche Folgerung nicht mit Sicherheit gezogen werden. Es folgt dies schon aus der Veränderung der Wellenlängen nach dem Doppler'schen Princip, welche den durch Temperatur hervorgebrachten gleichwerthig sind; wenn die Temperatur sehr klein wird, müssen die Wellenlängen in der Nähe des Maximums der spectralen Energievertheilung sehr grosse Werthe annehmen. Wenn nun in dem oben dargestellten Processe die schwarzen Körper sehr tiefe Temperatur besitzen sollen, so würde zwischen ihnen und dem Gas eine sehr grosse Temperaturdifferenz bestehen bleiben, weil das Gas nicht soweit abgekühlt werden darf, ohne die vorausgesetzten Eigenschaften des ideellen Gases zu verlieren. Da ausserdem für sehr kleine Werthe der Temperatur nach

dem Stefan'schen Gesetz die ausgestrahlte Energie verschwindend klein ist gegen den Betrag bei höherer Temperatur, so kann das sonst verschwindende Ausstrahlungsvermögen des Gases selbst und namentlich auch der dem Gase anliegenden diathermanen Platten, welche mit dem Gase gleiche Temperatur haben müssen, gegen die Energie der Strahlung in Betracht kommen.

Dass den Hertz'schen Schwingungen gegenüber die festen Körper als stetige Massen und nicht wie bei den Lichtschwingungen als Molecülgruppen wirken, ist bereits von Bjerknes[1]) ausgesprochen. Es können dann auch durch die Molecularbewegungen der Wärme keine Hertz'schen Wellen ausgesandt werden. Es mag aber schliesslich noch besonders hervorgehoben werden, dass aus unseren Betrachtungen keineswegs eine Unstetigkeit des Verhaltens der Strahlen verschiedener Wellenlänge folgt. Es sollte nur gezeigt werden, dass die Eigenschaften langer Wellen uns zu der Annahme führen, dass in der Wärmestrahlung durchaus nicht Strahlen *jeder* Wellenlänge vorhanden sind, sondern dass die Energiecurve, als Function der Wellenlänge dargestellt, auf der Seite der grossen Wellenlängen schon im endlichen Gebiet stetig auf unendlich kleine Werthe herabsinkt.

1) Bjerknes, Wied. Ann. 48. p. 593. 1893.

---

3. *Mechanisches Modell zur Erläuterung der Inductionsgesetze; von H. Ebert.*

Durch Maxwell ist gezeigt worden, dass die Bewegungen im electromagnetischen Felde eines galvanischen Stromes mechanisch zu dem Typus derjenigen Bewegungen gehören, die wir heute im Anschluss an von Helmholtz „einfache Cykelbewegungen“ nennen, d. h. zu jenen Bewegungen, welche aus einem System in sich zurücklaufender Bewegungen bestehen, für welche jedes System von Axenbewegungen, die miteinander in irgend einer Weise gekoppelt sind, ein weiteres Beispiel liefert.[1]) Daher ist es auch möglich, rein electrische Vorgänge durch verhältnissmässig sehr einfache mechanische Modelle nachzuahmen. Hr. Boltzmann weist in der von ihm gegebenen Einleitung zu dem Catalog der für Nürnberg 1892 geplanten mathematischen Ausstellung darauf hin, dass solche mechanische Interpretationen noch eine tiefere, als nur rein didaktische Bedeutung haben, da schliesslich all' unser Naturerkennen auf das Wiedererkennen der einfachen *mechanischen* Gesetze in den Erscheinungen hinausläuft. Er selbst hat in seinem schönen Buche über die Maxwell'sche Theorie eine ganze Reihe solcher Modelle mitgetheilt, u. a. eines, welches das mechanische Analogon der electrodynamischen und Inductionsvorgänge bildet.

Dieses „Bicykelmodell“ ist ausnehmend scharfsinnig ausgedacht, indess ist es ziemlich complicirt, wodurch seine An-

---

1) Vgl. Maxwell, Treatise II, Capitel V—VIII; Boltzmann, Vorlesungen p. 5 und a. a. Stellen desselben Buches, 1891; H. Ebert, Wied. Ann. 48. p. 1—7. 1893. Die von O. Lodge in seinem Buche: „Modern views of electricity“ im X. Capitel geschilderten mechanischen Modelle des electromagnetischen Feldes sind ebenfalls Monocykeln.

schaffung und sein Verständniss erschwert wird. Ich darf daher vielleicht ein einfacheres Modell beschreiben, welches ich zur Erläuterung der Inductionsgesetze ausgeführt habe. Das Modell ist eine Verbesserung eines von Maxwell selbst construirten, welches im Cavendish Laboratory zu Cambridge aufbewahrt wird und in der 3. Auflage des Treatise II am Ende des VII. Capitels beschrieben ist; die beiden Cykeln, aus denen es besteht und die die inducirende und die inducirte Strombewegung darstellen, sind bei seinem und dem hier zu beschreibenden Modell durch ein Kegelradgetriebe miteinander gekoppelt.

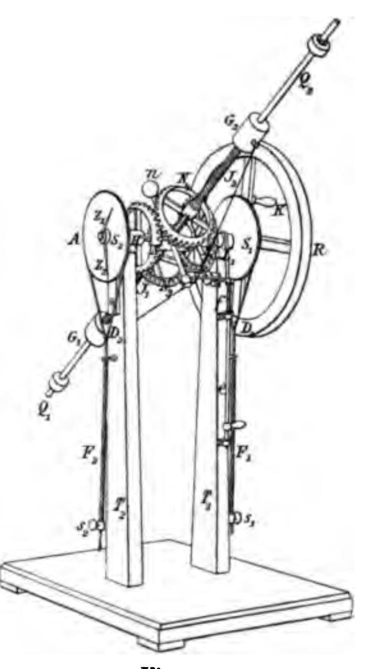


Fig. 1.

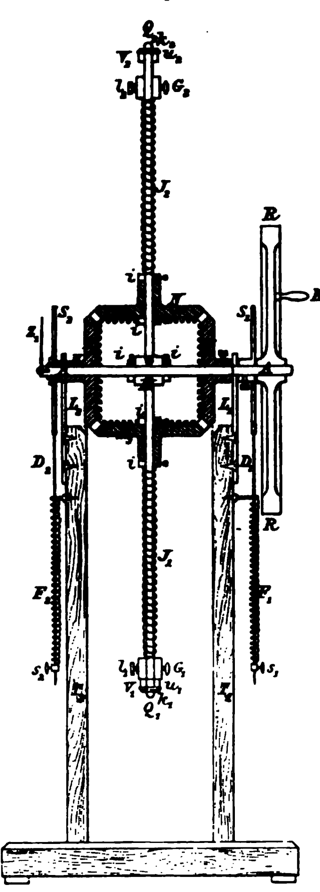
Fig. 1 zeigt den Apparat in perspectivischer Ansicht; Fig. 2 ist ein vertikaler Durchschnitt.

In den Lagern L_1 und L_2, die von den Trägern T_1 und T_2 getragen werden, dreht sich die Axe A. Mit derselben sind fest verbunden: 1. das Schwungrad R, welches die Kurbel K (den Antriebspunkt) trägt; 2. die Scheibe S_1; 3. das Kegelrad N_1 und 4. der schwarze Zeiger Z_1. In den Rand der Scheibe S_1 ist eine Nut eingedreht, in welche die Drahtschleife D_1 von der Feder F_1 verschieden stark hineingezogen werden kann, je nach der durch die Stellung der Schraube s_1 bestimmten Federspannung; hierdurch erfährt infolge gleitender Reibung die Scheibe S_1 bei der Drehung an ihrer Peripherie einen Widerstand W_1. Die Axe A mit R, S_1, N_1 und Z_1 bilden zusammen den ersten Cykel.

Auf dem linken Theile der Axe A sitzt, um diese frei beweglich, die Hülse H: sie trägt: 1. das Kegelrad N_2; 2. die Scheibe S_2 mit dem auf ihr befestigten rothen Zeiger Z_2. Die

Scheibe S_2 ist wie S_1 mit einer Bremsvorrichtung (D_2, F_2, s_2) versehen (Widerstand W_2). Die Hülse H mit N_2, S_2 und Z_2 bilden zusammen den zweiten Cykel.

Beide Cykeln sind durch einen einfachen Zwischenmechanismus miteinander in Beziehung gesetzt: um die Mitte der Axe A dreht sich frei das cylindrische Stück M. An diesem sind in gegenüberliegenden Punkten die Stangen Q_1 und Q_2 befestigt. Um diese drehen sich frei die Kegelräder N_3, resp. N_4, welche in N_1 und N_2 eingreifen.


Fig. 2.

Durch Stellringe *i*, Fig. 2, welche auf die Axen aufgeschraubt sind, wird bewirkt, dass die Theile M, H und die vier einander gleichen Kegelräder N sich um ihre resp. Axen drehen, aber nicht auf diesen verschieben können.

Durch diese Koppelung der beiden Cykeln wird den Stäben Q eine Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Axe A ertheilt, welche immer gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Winkel- (cyklischen) Geschwindigkeiten q_1 und q_2 der beiden einzelnen Cykeln ist.

Auf den Stäben Q_1 und Q_2 verschieben sich die Gewichte G_1 und G_2; je nach der Stellung derselben ist das Trägheitsmoment M des Zwischenmechanismus verschieden. Die Anordnung ist so getroffen, dass man während der Drehung die Entfernung r der Gewichte von der Axe vergrössern und verkleinern und damit das Trägheitsmoment M verändern kann.

a) Um r während der Drehung *vergrössern* zu können, werden auf die Stäbe Q_1 und Q_2 die Federn J_1 und J_2 ge-

schoben (vgl. Fig. 3, in der der mittlere Theil des Apparates noch einmal besonders abgebildet ist; die um Q_1 und Q_2 drehbaren Kegelräder N_3 und N_4 sind nur durch punktirte Linien angedeutet), dann die Gewichte G_1 und G_2, die mit Schrauben und Oesen versehen sind, zuletzt die Gummipolster V_1 und V_2, die sich gegen die Unterlegscheiben u_1 und u_2 mit dahinter durch die Stäbe Q_1 und Q_2 gesteckten Stiften k_1 und k_2 legen.

Um das Ende des in M befestigten, senkrecht zu Q_1 und Q_2 stehenden Stabes a dreht sich der Hebel b mit den Stiften

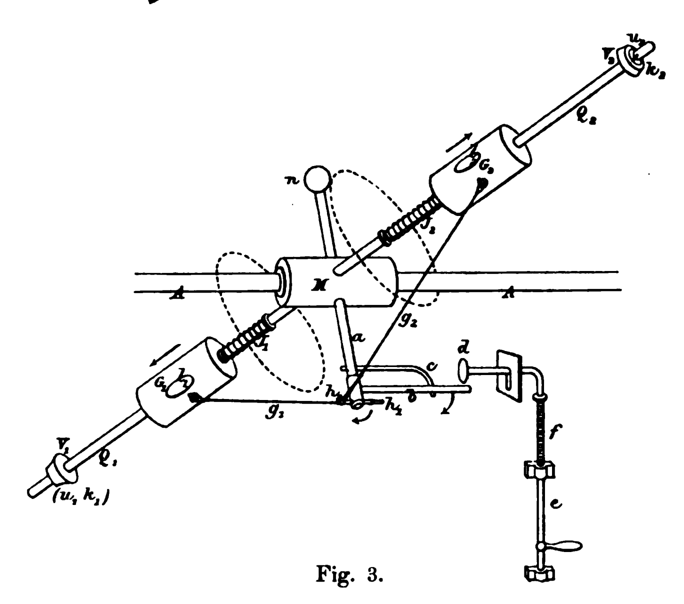


Fig. 3.

h_1 und h_2. Man schiebt die Gewichte möglichst nahe an die Axen A heran, indem man die Federn J_1 und J_2 zusammendrückt, schraubt sie fest, hängt die mit Haken und Schleifen versehenen Schnüre g_1 und g_2 mit ihren Haken in die Oesen der Gewichte und schiebt die Schleifen derselben über die Stifte h_1 und h_2. Legt man dann den Hebel b hinter den mit a fest verbundenen Arm c, so kann man die Klemmschrauben der Gewichte lösen, ohne dass sie sich von ihren Orten auf den Stäben Q_1 und Q_2 entfernen.

Die Gewichte werden frei und durch die Federn J_1 und J_2 nach Aussen getrieben, sowie man gegen die nach oben

treibende Feder f die am Träger T_1 (Fig. 1) bewegliche Stange e und damit die Scheibe d nach unten zieht; denn dadurch wird b etwas nach unten gedrückt und gleitet von dem Ende des haltenden Stabes c ab. Die Auslösung erfolgt gleichgültig in welchem Sinne man dreht.

b) Soll r während der Drehung *verkleinert* werden, so nimmt man die Stifte k_1 und k_2 aus den Stangen Q_1 und Q_2 heraus, nimmt V, G und J ab, schiebt zunächst die Gummipolster V auf die Stäbe, dann die Gewichte G, von denen man die Schnüre entfernt, schliesslich die Federn J und hält diese durch die Unterlegscheiben u, hinter denen man die Stifte k wieder befestigt. Man drückt die Federn J zusammen und schraubt die Gewichte in möglichst grosser Entfernung von der Axe A auf den Stäben Q fest. Um sie hier auch zu erhalten, nachdem man die Schrauben gelöst hat, sind an den Gewichten die etwas ausgestochenen Lager l_1 und l_2 (Fig. 2) befestigt. Zwischen ihre beiden Platten werden kleine Holzstäbchen gesteckt, die sich mit ihren anderen Enden gegen die Stifte h_1 und h_2 der Auslösevorrichtung stemmen. Wird durch Ziehen an e (Fig. 3) die Scheibe d heruntergedrückt, so fliegen die Holzstäbchen heraus, wenn der Arm b bei der Drehung an die Scheibe d kommt, und die Gewichte werden durch die Federn nach Innen getrieben.

Die in Fig. 1 und 3 sichtbare Kugel n dient zur Ausbalancirung.[1]) —

Stellt man die Bewegungsgleichungen für den hier beschriebenen Mechanismus auf, so erhält man zugleich in einfachster Weise die Inductionsgesetze aus den Grundgleichungen der Mechanik in folgender Weise:

Sind (in v. Helmholtz'scher Bezeichnungsweise) p_1 und p_2 die cyklischen Variablen. d. h. die Winkeldrehungen der beiden um dieselbe Axe drehbaren Systeme: (R, A, S_1, N_1, Z_1) und (N_2, H, S_2); $q_1 = (dp_1/dt)$ und $q_2 = (dp_2/dt)$ die cyklischen (Winkel-)Geschwindigkeiten, μ_1 und μ_2 die bezüglichen Trägheitsmomente, so sind die kinetischen Energien der beiden Cykel-

1) Dieser Dicykel (ich bilde das Wort Di- statt Bicykel nach Analogie von Mono- und Polycykel) wurde von Hrn. Böhner, Mechaniker des physikal. Instituts der Universität Erlangen gebaut und kostet 100 M.

bewegungen: $\frac{1}{2}\mu_1 q_1^2$ und $\frac{1}{2}\mu_2 q_2^2$. Sind m die Massen, r die Abstände der Gewichte G_1 und G_2 von der Axe, ist μ_3 das Trägheitsmoment aller übrigen Massen des Zwischenmechanismus (also von M, Q_1, Q_2, N_3, N_4, V_1, V_2, a, b, c, k), so ist das Gesammtträgheitsmoment des Zwischenmechanismus $\mathrm{M} = \mu_3 + 2mr^2$. Die kinetische Energie, die in ihm angehäuft ist, ist $\frac{1}{8}\mathrm{M}(q_1 + q_2)^2$ (vgl. p. 595). Die gesammte kinetische Energie des Systems ist

$$T = \tfrac{1}{2} L q_1^2 + \tfrac{1}{2} N q_2^2 + M q_1 q_2,$$

wenn wir setzen:

$$L = \mu_1 + \tfrac{1}{4}\mathrm{M}, \quad N = \mu_2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{M}, \quad M = \tfrac{1}{4}\mathrm{M}.$$

Die Momente sind:

$$\text{(1a)} \quad \begin{cases} s_1 = \partial T / \partial q_1 = L q_1 \qquad\qquad + M q_2 \\ s_2 = \partial T / \partial q_2 = \qquad\quad N q_2 \quad + M q_1 . \end{cases}$$

Da die potentielle Energie Φ im vorliegenden Falle in Bezug auf die cyklischen Veriabeln constant ist, so gibt die Lagrange'sche Bewegungsgleichung:

$$P = -\frac{\partial(\Phi - T)}{\partial p} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\Phi - T)}{\partial q}$$

für die beiden an den cyklischen Variabeln angreifenden Kräfte

$$\text{(1b)} \qquad P_1 = -\frac{d s_1}{d t}; \qquad P_2 = -\frac{d s_2}{d t}.$$

Die Gleichungen (1a) und (1b) umfassen die gesammten Inductionserscheinungen; es sind Maxwell's Gleichungen (Treatise II § 581—584, p. 226—228 der 3. Ausgabe), wo nur y_1' und y_2' für q_1 und q_2 geschrieben ist; q_1 ist identisch mit der Stromstärke des inducirenden, q_2 mit der des inducirten Stromes; P_1 und P_2 sind die in den entsprechenden Stromkreisen auftretenden electromotorischen Kräfte; L und N sind die Selbstinductionscoefficienten der beiden Stromkreise. M ist der Coefficient der wechselseitigen Induction.

Die Demonstration der Inductionsgesetze am Modell gestaltet sich dann folgendermaassen:

1. Die Gewichte G_1 und G_2 werden mittels der Schnüre g_1 und g_2 und des Hebels b in ihrer der Axe A nächsten Stellung festgehalten. Ist zunächst alles in Ruhe ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$) und dreht man an der Kurbel K Fig. 1 (Kraft P_1), so tritt in dem zweiten Cykel eine Kraft

$$P_2 = -\frac{d(M q_1)}{dt}$$

auf, welche den Zeiger Z_2 in Bewegung setzt. Die Grösse der Kraft ist durch die zeitliche Aenderung des Productes $M q_1$ bestimmt.

2. Die Richtung der Kraft P_2 im Vergleich zu P_1 lässt sich durch die gegenseitige Bewegung der beiden Zeiger Z_1 und Z_2 bequem verfolgen; sie ist der von P_1 entgegengesetzt. In der That, wenn M constant ist (Gewichte fest), so ist P_2 negativ bei zunehmendem q_1. Ist q_1 constant geworden, so ist $P_2 = 0$, der Zeiger Z_2 in Ruhe; wächst q_1 weiter, so tritt von neuem eine rückläufige Bewegung im zweiten Cykel auf (Induction eines entgegengesetzt gerichteten Stromes bei Entstehen und Verstärken eines Stromes).

3. Dreht man an K langsamer, so führt Z_2 eine der von Z_1 gleichgerichtete Bewegung aus. $d q_1 / d t$ ist negativ, P_2 positiv (Induction eines gleichgerichteten Stromes bei Schwächen oder Vergehen eines Stromes); die Stromstärke hängt caet. par. wieder nur von der zeitlichen Aenderung des Productes $M q_1$ ab. Bei constantem M ist P_2 um so grösser, je stärker die Geschwindigkeitsänderungen $d q_1 / d t$ im ersten Cykel sind.

4. Man dreht mit constanter Winkelgeschwindigkeit; dann ist $q_2 = 0$ und

$$P_2 = -q_1 \frac{dM}{dt}.$$

Nun führt man in der p. 596 beschriebenen Weise die Auslösung herbei, die Gewichte G_1 und G_2 fliegen nach aussen (ihr Abstand r von der Axe wird grösser); der Zeiger Z_2 bewegt sich stark zurück. Die verhältnissmässig grosse Masse des Schwungrades R erleichtert dabei das unveränderte Drehen an K und sichert die Constanz von q_1. Das Trägheitsmoment $M = \mu_3 + 2 m r^2$ des Zwischenmechanismus und damit M ist grösser geworden. dM/dt ist also positiv, es musste also in der That eine Kraft im zweiten Cykel auftreten, welche der im ersten wirkenden entgegengesetzt gerichtet ist (Induction eines entgegengesetzt gerichteten Stromes bei Vergrössern des wechselseitigen Inductionscoefficienten z. B. durch Nähern der aufeinanderwirkenden Leiterkreise, Einschieben von Eisenkernen u. dgl.).

5. Der vorige Versuch wird bei verschiedenen Drehungsgeschwindigkeiten q_1 vorgenommen; die Wirkung ist um so grösser, je schneller gedreht wird (je grösser die primäre Stromstärke ist).

6) Man befestigt mittelst der Stäbe wie es p. 597 angegeben ist die Gewichte möglichst weit von der Axe entfernt, dreht wieder constant ($q_2 = 0$) und löst die Gewichte aus: der Zeiger Z_2 bewegt sich ein grosses Stück gleichsinnig mit der Bewegung im ersten Cykel. M und M haben abgenommen, einem negativen Werthe von dM/dt entspricht in der That eine positive Kraft (Induction eines gleichgerichteten Stromes bei Verkleinern des wechselseitigen Inductionscoefficienten z. B. durch Entfernen der aufeinanderwirkenden Leiterkreise).

7. Auch dieser Versuch wird zweckmässig bei verschiedenen Drehungsgeschwindigkeiten q_1 vorgenommen um das Wachsen und Abnehmen der Wirkung mit q_1 (mit der inducirenden Stromstärke) zu zeigen.

Ferner nimmt man die Versuche 4—7 bei Drehungen in beiderlei Sinn vor, um die Unabhängigkeit von der Richtung der inducirenden Bewegung zu erläutern.

8. Wiederholt man die Versuche 1—3, wenn die Gewichte G_1 und G_2 in ihrer der Axe A fernsten Stellung sich befinden, so ist jetzt M grösser als vorhin. Die Wirkungen sind grösser bei gleichen Aenderungen der primären Winkelgeschwindigkeit q_1 ($P_2 = -M dq_1/dt$) bei dem grösseren Trägheitsmoment des Zwichenmechanismus (grössere electromotorische Kraft der Induction je grösser der wechselseitige Inductionscoefficient gemacht wird, z. B. durch Nähern der Spiralen, grössere Windungszahl, Sammeln der Kraftlinien durch geeignet angebrachte Eisenmassen.)

9. Man ersieht aus diesen Versuchen unmittelbar wie der Inductionscoefficient bei electrischen Vorgängen eine analoge Rolle spielt, wie das Trägheitsmoment bei mechanischen (daher werden rasch abklingende electrische Bewegungen, wie man sie u. A. zur Erzeugung Hertz'scher Oscillationen braucht, nur erhalten, wenn man Schliessungskreise von kleinen Selbstinductionscoefficienten anwendet etc.).

10. Die durch die Kräfte P_2 in den einzelnen Fällen in dem zweiten Cykel hervorgerufenen Bewegungen erlöschen ver-

hältnissmässig rasch in Folge der Reibung. Die Hauptwiderstände treten an den Peripherien der Scheiben S_1 und S_2 auf. Wir können sie durch Anziehen der Drahtschleifen beliebig verändern und mit ziemlicher Annäherung annehmen, dass sie der ersten Potenz der cyklischen Geschwindigkeit q_1 resp. q_2 proportional sind. Dann entsprechen diese Widerstände W_1 und W_2 vollkommen dem Ohm'schen Widerstande bei der Strombewegung.

Durch Aenderung der Stellungen der Schrauben s_1 und s_2 (Fig. 1) werden die beiden Cykel verschieden stark gebremst. Wiederholt man dann die Versuche 1—7, so ergeben sich die bekannten Beziehungen bei verschiedenen Widerständen im primären und secundären Bewegungskreise.

11. Oben haben wir immer nur den einzelnen Impuls, der an dem Zeiger Z_2 bemerkbar wurde, nach seiner ungefähren Grösse und Richtung (den Differentialstrom) in Betracht gezogen. Mann kann aber auch die gesammte Zeigerbewegung bei verschieden schnellem Andrehen oder Anhalten des ersten Cykels (den Integralstrom) ins Auge fassen. Bei einiger Uebung gelingt es leicht, dieselbe Endgeschwindigkeit q_1 auf sehr verschiedene Weise zu erreichen (wobei man sich etwa durch den Takt eines daneben gestellten Metronoms unterstützen lässt), indem man z. B. erst die Geschwindigkeit rascher steigert und dann langsamer oder erst langsam, dann rasch etc. Noch leichter ist es eine gewisse Geschwindigkeit in verschiedener Weise zu vernichten; immer ist die Integralbewegung dieselbe. (Der Integralstrom hängt caet. par. nur von dem Unterschied des Anfangs- und Endwerthes der Stromstärke ab). Sie ist grösser bei kleinem Widerstand etc. —

Man sieht, wie man mit diesem relativ einfachen Apparate alle Gesetze der electrischen Induction durch die entsprechenden ganz analog verlaufenden und durch dieselben Gleichungen dargestellten mechanischen Vorgänge der Dicykelbewegung illustriren kann.

Erlangen, Phys. Inst. d. Univ., Februar 1893.

4. *Electrische Schwingungen molecularer Gebilde; von H. Ebert.*[1])

Die Auffassung, dass die optischen Erscheinungen ihrem Wesen nach electrische sind, bricht sich mehr und mehr Bahn, seit die Maxwell'sche Theorie auf dem Gebiete der Electricitätslehre das Uebergewicht errungen hat. Eine einfache Uebertragung der ursprünglichen Maxwell'schen Feldgleichungen auf die von Lichtbewegungen durchsetzten Medien reichte freilich vielfach nicht aus, um die Erscheinungen vollkommen zu erklären; so boten sich Schwierigkeiten in allen den Fällen, wo die specielle Natur der Molecüle in Betracht kam.

Für eine Reihe von Phänomenen, so für die Absorptions- und Dispersionserscheinungen, genügte allerdings bereits eine Erweiterung der Maxwell'schen Feldgleichungen unter Zugrundelegung ganz allgemeiner Vorstellungen über die Beziehungen zwischen den schwingenden Molecülen und dem Aether, da diese Beziehungen hier erst eine Rolle bei der Bestimmung der Integrationsconstanten spielen.[2])

Bei einer Reihe anderer Erscheinungen dagegen ist es nothwendig, von vornherein bestimmtere Vorstellungen über die Art der Betheiligung der kleinsten Theilchen an den electromagnetischen Vorgängen des Feldes sich zu bilden und in die Betrachtungen einzuführen. Ich möchte mir in dieser Beziehung erlauben, eine Anschauung zu entwickeln, die ich zum Theil schon in anderer Form vor zwei Jahren l. c. ausgesprochen habe. Dieselbe stützt sich auf bekannte Thatsachen und möglichst einfache Voraussetzungen.

1. *Valenzladungen und Valenzschwingungen.* Dass die Molecüle, aus denen die Körper aufgebaut sind, electrische

1) Theilweise im Auszuge mitgetheilt in den Arch. de Genève (3) **25.** p. 489 vom 15. Mai 1891.

2) Vgl. die Arbeiten von F. Koláček, Wied. Ann. **32.** p. 224, 429. 1887; **34.** p. 673. 1888; D. A. Goldhammer, ebd. **47.** p. 93. 1892; H. v. Helmholtz, Berl. Ber. p. 1093. 1892; H. Ebert, Wied. Ann. **48.** p. 1. 1893; P. Drude, ebd. **48.** p. 536. 1893.

Kräfte auszuüben vermögen, wird durch die Electrolyse bewiesen, welche zeigt, dass jede Valenzstelle eines Atomes mit einer ganz bestimmten Quantität e positiver oder negativer Electricität geladen sein muss, mit der „Valenzladung".[1]) Die Grösse dieser Ladung berechnet Hr. F. Richarz[2]) aus den electrolytischen Bestimmungen der Hrn. F. und W. Kohlrausch zu

$$e = 12{,}9 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{sec}^{-1};$$

Hr. G. J. Stoney[3]) gibt dieselbe Electricitätsmenge, das „electron", zu rund

$$e = 3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

an, sich ebenfalls auf electrolytische Bestimmungen stützend. Hr. H. v. Helmholtz zeigte, dass die von diesen Ladungen ausgeübten electrischen Kräfte bei weitem unter den Atomkräften überwiegen.[4]) Daher werden die Molecüle auch hauptsächlich durch die electrostatische Wirkung der + Ladung des einen und der — Ladung des anderen Bestandtheiles zusammengehalten.

Gewisse Erscheinungen lehren nun, dass diese electrischen Ladungen an verschiedenen Stellen desselben Atomes und namentlich an den Valenzstellen chemisch verschiedener Atome verschieden stark haften und ihnen je nach Umständen eine verschieden starke *„Verschiebbarkeit"* zukommt; hierauf lassen sich vielleicht mit Armstrong z. B. auch die Erscheinungen der residuellen Affinität und der stabilen Molecularverbindungen zurückführen.[5]) Die Valenzladungen können sich also unter dem Einfluss von äusseren Kräften mehr oder weniger weit aus ihren Gleichgewichtslagen entfernen: dies muss bis zu einem gewissen Grade immer geschehen, wenn Atome oder zu Molecülen vereinigte Atomcomplexe in ihre gegenseitige Wirkungssphäre gerathen. Unter dem Einflusse der Wirkungen der Valenzladungen aufeinander stellt sich dann auf der freien Wegstrecke zwischen dem letzten und dem nächstfolgenden

1) Vgl. namentlich H. v. Helmholtz in der Faraday-Rede (1881). Vorträge und Reden. 2. p. 272. Braunschweig 1884.

2) F. Richarz, Sitzungsber. d. Niederrh. Ges. 12. Jan. 1891. p. 21.

3) G. Johnstone Stoney, Trans. Dubl. Soc. (2) 4. p. 563. 1891.

4) H. v. Helmholtz, l. c. p. 316.

5) Vgl. u. a. Henry E. Armstrong, Phil. Mag. (5) 25. p. 21. 1888.

Zusammenstosse der Gleichgewichtszustand zum Theil wieder her, im allgemeinen aber erst nach einer grösseren oder geringeren Zahl von „*Schwingungen*".

Beim nächsten Zusammenstoss, bei dem im allgemeinen die Verschiebung noch einen gewissen von Null verschiedenen Werth hat, werden diese Schwingungen wieder neu angeregt etc.

Die Verschiebungen der Valenzladungen haben also Schwingungen derselben zur Folge. Dadurch, dass die Ladungen derselben im Molecül ihre Lage verändern, wird das geändert, was man das „electrische Moment des Molecüls" nennen kann; denn positive und negative Ladungen werden abwechselnd in verschiedene Entfernungen von einander gebracht. Bewegen sich aber electrische Quantitäten periodisch relativ zum Aether, so rufen sie in diesem entsprechende Wellen electromagnetischer Strahlung hervor. Hierdurch ist ganz allgemein ein Zusammenhang hergestellt zwischen periodischen Vorgängen im Molecül und im Aether, auch wenn wir die electrische Auffassung zu Grunde legen.

Wir wollen zunächst zeigen, dass die durch die periodischen electrischen Molecülladungen hervorgerufenen Aetherbewegungen immer aufgefasst werden können als herrührend von einem System einfacher Hertz'scher Schwingungen.

2. *Oscillatoren von molecularen Dimensionen.* Die electrischen Polarisationszustände des Aethers gemessen durch die ihnen entsprechenden electrischen Momente an jeder Stelle des Raumes sind durch eine nach Ort und Zeit veränderliche Richtungsgrösse, durch einen Vector bestimmt[1]); wir können annehmen, dass auch bei den wechselnden electrischen Zuständen des Molecüls einige Richtungen vor anderen ausgezeichnet sind, auch bei ihnen sind also die electrischen Zustände durch Vectoren $ix + jy + kz$ darstellbar. Hier sind x, y, z im allgemeinen periodische Functionen der Zeit, z. B. solche, dass die betreffenden Vectoren Rotationen ausführen. Alle zu einem Molecül gehörigen Vectoren können wir zu einem einzigen $iX + jY + kZ$ zusammensetzen, welcher dann das electrische Gesammtmoment des Molecüls darstellt.

---

1) Vgl. H. Hertz, Wied. Ann. **40.** p. 580. 1890 oder Untersuchungen p. 211. 1892.

Dieser „Molecülvector“ erfährt infolge der Valenzschwingungen periodische Aenderungen, welche namentlich bei zusammengesetzteren Molecülen sehr complicirt sind; sie hängen von der Natur der vereinigten Atome sowie der Art ihrer Verkettung, kurz der Natur der Substanz ab.

Wir beschränken unsere Betrachtungen auf die Vorgänge, die sich in dem Molecül abspielen, während es sich auf seiner freien Wegstrecke befindet; dann können wir die periodischen Veränderungen in ihm immer durch eine endliche oder unendliche Summe einzelner harmonischer Aenderungen, d. h. durch eine Fourier'sche Reihe darstellen.

Dabei lassen wir dahingestellt, ob diese Entwickelung noch convergiren würde, falls wir sie auch über die Zeit des Zusammenstosses hinaus erstrecken wollten, was eine unbegrenzte Interferenzfähigkeit der emittirten Schwingungen zur Folge haben würde. Denn dann würden wir immer aus dem zu einem sehr langen Spectrum ausgebreiteten Gesammtlichte so schmale Spectralbezirke ausblenden können, dass die erhaltenen Elemente der gesammten Strahlung homogen genug wären, immer wieder Interferenzerscheinungen zu liefern selbst bei noch so hohen Gangunterschieden. In diesem Falle würde aber der Begriff der Cohärenz der Strahlen gegenstandslos werden, und man müsste, wenn man nur genügend starke Dispersionen anwendet, auch von zwei verschiedenen Lichtquellen Interferenzerscheinungen erhalten.

Es sei $\varepsilon . \sin \pi t / T$ ein Glied dieser Entwickelung, welches der Periode T entspricht. Ein solches Element des Schwingungszustandes stellt sich also als Moment in der Richtung des electrischen Molecülvectors dar, welches zwischen den extremen Werthen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ harmonisch hin- und herschwankt; es ruft eine electrische Aetherschwingung von der Periode T hervor, welche zu einer ganz bestimmten Spectrallinie Veranlassung gibt.

Ein besonders einfaches Beispiel stellt ein aus zwei entgegengesetzt geladenen Atomen bestehendes Molecül, z. B. das Molecül $(\underset{-}{Cl}\underset{+}{H})$ dar. Nach der hier vorgetragenen Anschauung strahlt dasselbe, weil sich die in ihm enthaltenen Valenzladungen $+e$ und $-e$ periodisch verschieben. Dass es über-

haupt strahlt, zeigen die Versuche über die strahlende Wärme der Gase, wenn es auch bis jetzt noch nicht gelungen zu sein scheint, lediglich durch Temperaturerhöhung ein unzersetztes Gas zum Aussenden von Lichtstrahlen zu bringen.[1])

In dem Momente ε ist also der eine Factor die Ladung e, der andere ist die maximale Entfernung, welche die beiden Ladungen bei der Schwingung von einander annehmen können. Eine obere Grenze hierfür ist offenbar der Molecüldurchmesser, definirt als Durchmesser der Wirkungssphäre des Molecüls. Setzen wir also $\varepsilon = e\,d$, so erhalten wir einen oberen Grenzwerth für das Moment.

Im allgemeinen ist $\varepsilon = k \,.\, e\,d$, wo k ein Factor kleiner als 1 ist, dessen Werth davon abhängt, wie sich die Verschiebungen auf dem Molecül vertheilen; setzen wir ihn $= 1$, so erhalten wir den oberen Grenzwerth; bei Berechnung der Grössenordnung der hier auftretenden Grössen können wir dies offenbar immer thun, da dieselbe hierdurch nicht wesentlich geändert wird. Unter dieser Voraussetzung kommen wir dann zu folgendem einfachen Bilde des electrischen Vorganges im Molecül.

Wir haben ein Gebilde von molecularen Dimensionen, auf dem sich die Electricitätsmengen $+e$ und $-e$ so nach dem Gesetze $\sin \pi\, t / T$ hin- und herbewegen, dass sie abwechselnd zusammenliegen und sich in ihrer Wirkung nach aussen vollkommen aufheben, sich dann von einander entfernen und im Maximum die Enden der Strecke d bis zu $+e$ resp. $-e$ laden etc., kurz, wir haben einen electrischen Doppel-

1) Nach Salet leuchtet Joddampf, wenn er erhitzt wird und gibt ein Emissionsspectrum, welches genau dem Absorptionsspectrum entspricht (Salet, Spectroskopie p. 373, Paris 1888). Wenn man auch hier die mit steigender Temperatur sich vollziehende Dissociation des Joddampfes als Ursache der Lichtemission heranziehen könnte, so zeigt doch die Wärmestrahlung der Gase, dass jedenfalls kein principieller Grund dagegen spricht, dass nicht gelegentlich die Temperaturerhöhung so weit getrieben werden kann, dass auch Strahlen kürzerer Perioden in genügender Menge ausgestrahlt werden. Den Schluss, den Hr. E. Pringsheim aus seinen schönen Versuchen zieht (Wied. Ann. **45.** p. 428. 1892): „Die Annahme, dass leuchtende Gase durch blosse Temperaturerhöhung leuchten können, ist eine weder aus experimentellen, noch aus theoretischen Gründen nothwendige Hypothese“, scheint mir daher in dieser Allgemeinheit etwas zu weitgehend.

punkt, dessen Moment $e\,d \sin \pi t/T$ mit der Periode T zwischen den extremen Werthen $+\,e\,d$ und $-\,e\,d$ harmonisch hin- und herschwankt. Hr. H. Hertz hat nachgewiesen, dass eine Electricitätsbewegung, wie die hier geschilderte, den allgemeinen Feldgleichungen der Maxwell'schen Theorie genügt und hat die Vertheilung der electrischen und magnetischen Kräfte in der Umgebung einer solchen „geradlinigen electrischen Schwingung" untersucht. Experimentell können wir den Vorgang im grossen durch einen Oscillator nachahmen, wie er in den verschiedensten Formen neuerdings so vielfach zur Erzeugung und zum Studium electromagnetischer Wellen, deren Länge nach Metern misst, verwendet wird.

Statt mit einem Oscillator kann man das Molecül auch mit einem polarisirten Theilchen vergleichen, an dessen um die Strecke d entfernte Enden abwechselnd die Electricitätsmengen $+\,e$ und $-\,e$ verschoben werden. Diese Vorstellung legt Hr. H. v. Helmholtz seinen Betrachtungen zu Grunde.[1])

Hr. Hertz hat gezeigt, dass die Energie, welche bei einer solchen electrischen Schwingung auf den umgebenden Aether übertragen wird und als Welle fortwandert, für jede Halbschwingung gleich ist

$$(1) \qquad \pi^4 e^2 d^2 / 3 \lambda^3,$$

wo λ die Länge der entsprechenden Welle ist. Unter Halbperiode ist hier die Zeit von einer maximalen Elongation bis zur nächsten zu verstehen.

Da e nur im Quadrat vorkommt, so macht es keinen Unterschied, wenn bei dem Molecül $+\,e$ immer nach der einen $-\,e$ nach der anderen verschoben wird, bei dem Oscillator dagegen dasselbe Ende abwechselnd mit $+\,e$ und $-\,e$ geladen erscheint.

Bei einem einzelnen Atom kann man ebensogut von Valenzschwingungen sprechen: da es nur *eine* Ladung von bestimmtem Vorzeichen hat, so ist es etwa mit einem Hertz'schen Oscillator zu vergleichen, dessen eine Seite zur Erde abgeleitet ist. Schwankt z. B. die Ladung $+\,e$ von einem Ende eines Durchmessers zum anderen und zurück, so wäre das Atom unter besonders einfachen Verhältnissen einem Oscillator zu vergleichen, dessen

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 48. p. 391 u. 392.

Enden abwechselnd bis zur Höhe $+\frac{1}{2}e$ und $-\frac{1}{2}e$ geladen werden. Hier würde der oben (p. 655) eingeführte Factor k, also selbst in dem Falle $=\frac{1}{2}$ zu setzen sein, wo die Schwingung sich über den ganzen Durchmesser erstrecken würde. Bei dem weiter unten zu behandelnden Beispiele des leuchtenden Natriumatoms, welches diesem Specialfalle schon ziemlich nahe kommen dürfte, setzen wir aber k ebenfalls gleich 1, da es uns hier nur auf Festhaltung der Grössenordnung ankommt.

3. *Numerische Controlle; Berechnung der Valenzladungen aus Strahlungserscheinungen.* Wir werden weiter unten sehen, wie die hier gegebene Auffassung der molecularen Leuchtbewegungen als Hertz'sche electrische Schwingungen eines sehr kleinen Oscillators qualitativ eine Reihe optischer Erscheinungen ungezwungen erklären lässt. Zunächst möchte ich aber zeigen, dass auch in quantitativer Hinsicht diese Auffassung den Thatsachen genügt. Eine Controlle unserer Annahme besteht offenbar darin, dass wir aus gemessenen Werthen der Strahlung mit Hilfe des aus der kinetischen Gastheorie wenigstens der Grössenordnung nach bekannten Moleculardurchmessers nach der Hertz'schen Strahlungsformel (1) die schwingende Electricitätsmenge e berechnen; wir müssen dabei auf eine Zahl geführt werden, welche der Grössenordnung nach mit den aus der Electrolyse gewonnenen, oben p. 657 angeführten Werthen übereinstimmt, aber kleiner als diese ist. Denn da in die Strahlungsformel eine Potenz des Productes von e und d eingeht, so muss e zu klein gefunden werden, wenn wir d zu gross annehmen. Nun ist der Durchmesser der Wirkungssphäre d, wie erwähnt, nur der obere Grenzwerth für die Valenzverschiebungen; berechnen wir also e aus der gegebenen Strahlung unter Einführung dieses oberen Grenzwerthes für die Valenzverschiebungen, so müssen wir kleinere Werthe, als die Electrolyse gibt, erhalten.

Eine solche Rechnung bei dem Beispiele eines in der Bunsenflamme verdampften Natriumsalzes wirklich durchzuführen, gestatten die von Hrn. E. Wiedemann für die bei diesem Leuchtprocess auftretende Strahlung bestimmten absoluten Werthe. Da wir sowohl hier wie weiter unten eine Reihe von Begriffen und Formeln brauchen, welche derselbe

für die „Mechanik des Leuchtens" aufgestellt hat [1]), möchte ich dieselben hier kurz recapituliren: Die Strahlungsintensität i für eine gewisse Wellenlänge hängt ab a) von der Energiezufuhr, welche die die Strahlung bedingenden intramolecularen Bewegungen erfährt, z. B. beim Zusammenstosse aus dem Energievorrathe der translatorischen, d. h. der Wärmebewegungen des Körpers, b) von der Schnelligkeit, mit welcher diese intramolecularen Bewegungen abklingen, in der Weise, dass

$$i = \frac{1}{b}(\varphi - C e^{-b t}) \tag{2}$$

ist, wenn φ das Verhältniss der durch die Energiezufuhr bedingten Intensitätsänderung zu dem Zeitelement dt ist, in dem sie sich vollzieht, b die für die „Abklingung" maassgebende Constante, offenbar der reciproke Werth der Zeit, in welcher die Einheit der Intensität abgegeben wird, wenn der strahlende Körper auf der Intensität Eins erhalten wird. Unter Intensität der Strahlung ist hier die Energiemenge E verstanden, welche die von den Körpermolecülen ausgehenden Lichtschwingungen mit sich führen, ebenso unter Intensität der Leuchtbewegungen ihre Energie.

Für b findet Hr. E. Wiedemann nach verschiedenen Methoden 10^8 oder Zahlen, die doch etwa in dieser Grössenordnung liegen (l. c. p. 233 ff.). Wenn man von der Erneuerung der intramolecularen Bewegungsenergie absieht und sein Augenmerk nur auf die Umwandelung derselben in Strahlung richtet, also $\varphi = 0$ setzt, so erhält man aus (2) für das „sich selbst überlassene Molecül"

$$E = E_0 e^{-b t}. \tag{3}$$

wo E_0 den Anfangswerth der intramolecularen Energie bezeichnet und die Zeit von dem Momente an gerechnet ist, in dem man die Energiezufuhr als abgeschnitten betrachtet. Die Energieabgabe ist wesentlich durch die Constante b bestimmt; dieselbe erscheint hier als das Reciproke der Zeit, in der der anfangs vorhandene intramoleculare auf Strahlung verwendete Energievorrath auf seinen $e$ten Theil herabgesunken ist.

Endlich wird ein wichtiger Begriff erhalten, wenn man nach dem Betrage des in einem Molecül überhaupt in Strah-

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 37. p. 177. 1889.

lung verwandelbaren Energievorrathes fragt. Hr. E. Wiedemann hat diesen Betrag den „Leuchtenergieinhalt L" genannt. Wir erhalten ihn, wenn wir die gesammte Strahlung addiren, welche von dem Molecül ausgeht, wenn es ohne Neuzufuhr von Energie aus seinem augenblicklichen Schwingungszustand sich selbst überlassen, allmählich in den der Ruhe übergeht; nach unendlich langer Zeit muss sich das vollzogen haben und wir erhalten:

$$L = \int_0^\infty E_0 \, e^{-bt} \, dt = \frac{E_0}{b} \tag{4}$$

Auch diese Grössen hat Hr. E. Wiedemann für verschiedene Fälle numerisch in absolutem Maasse bestimmt. So wurde für Natrium $L = 3{,}2 \,.\, 10^{-5}$ Grammcalorien oder in Ergs umgerechnet: $L = 1{,}34 \,.\, 10^3 \text{ cm}^2 \text{ g sec}^{-2}$ gefunden.

Wir wollen nun mit Hülfe dieser Zahlen die oben angedeutete Rechnung für das Natrium durchführen und zwar nach zwei verschiedenen Methoden, von denen die eine eine Schätzung der oberen Grenze der Interferenzfähigkeit des gelben Natriumlichtes benutzt, die andere dagegen nur Zahlen einführt, welche durch directe Messungen erhalten worden sind:

a) Wir bringen Na Cl in die Flamme eines Bunsenbrenners. Die während jeder halben Schwingung von jedem einzelnen Molecül nach allen Seiten hin ausgestrahlte Energiemenge ist nach Formel (1) p. 656:

$$\pi^4 e^2 d^2 / (3 \lambda^3) \text{ cm}^2 \text{ g sec}^{-2},$$

und die von einem Gramm ausgestrahlte Menge

$$S = \pi^4 N e^2 d^2 / (3 \lambda^3) \text{ cm}^2 \text{ g sec}^{-2},$$

wenn N die Zahl der Molecüle in der Gewichtseinheit bedeutet.

Das Licht der gelben Natriumlinien ist noch interferenzfähig bei Gangunterschieden von 200 000 Wellenlängen. Nach ebenso vielen Schwingungen muss die Energie der Oscillationen zahlreicher Molecüle des leuchtenden Natriumdampfes noch einen solchen Betrag haben, dass sie mit den um 200 000 Perioden früher ausgegangenen Strahlen noch deutliche Interferenzerscheinungen hervorrufen können. Nehmen wir also mit Hrn. E. Wiedemann an, dass nach 400 000 halben Schwingungen

die Energie nur auf die Hälfte ihres ursprünglichen Werthes herabgesunken sei, so ist

$$(5) \qquad 4 \cdot 10^5 S = \tfrac{1}{2} L,$$

wo L, der Leuchtenergieinhalt pro Gramm Natrium am Anfang der genannten Zeit gleich $1{,}34 \cdot 10^3$ cm^2 g sec^{-2} ist. Mit Rücksicht auf die Gleichung (5) ergibt sich hieraus $S = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ cm^2 g sec^{-2}. Nun ist $N = 6 \cdot 10^{20}$ (vgl. E. Wiedemann l. c. p. 213, wo das Gewicht des Natriumatoms zu $1{,}7 \cdot 10^{-21}$ g angegeben ist), $d = 10^{-8}$ cm und $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm, folglich

$$e = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\ \text{cm}^{3/2}\ \text{g}^{1/2}\ \text{sec}^{-1}.$$

Die Electrolyse gibt (vgl. p. 652)

$$e = 12{,}9 \cdot 10^{-11}\ \text{cm}^{3/2}\ \text{g}^{1/2}\ \text{sec}^{-1},$$

also in der That einen etwas grösseren, aber in der Grössenordnung noch vollkommen mit dem Unserigen übereinstimmenden Werth. Die hier durchgeführte, schon in der früheren Arbeit mitgetheilte, Rechnung benutzt eine Annahme über die obere Grenze der Interferenzfähigkeit des Natriumlichtes, welche einigermaassen hypothetisch erscheinen kann mit Rücksicht darauf, dass diese Grenze experimentell äusserst schwierig festzustellen ist; auch theoretisch ist die Frage noch als offen betrachtet worden, ob man bei immer weiter gesteigerter Dispersion des die Schwingungen auseinanderlegenden Apparates die Gangunterschiede bei hohen Interferenzen nicht immer weiter werde treiben können (vgl. w. o. p. 654). Ausserdem wurde d während der hier betrachteten Zeit, die zur Ausstrahlung nothwendig ist, constant gesetzt, was in erster Annäherung zur Berechnung der Grössenordnung als erlaubt gelten kann, da ja die Einführung von d überhaupt nur einen oberen Grenzwerth zu berechnen gestattet. Streng gültig ist aber diese Annahme nicht. Es war daher wünschenswerth, die Rechnung noch auf einem ganz anderen Wege und auf gänzlich einwurfsfreien Grundlagen zu wiederholen. Das Mittel hierfür gibt die von Hrn. E. Wiedemann für den „Leuchtenergieinhalt L" abgeleitete Formel (4), die weiter unten auch vom Standpunkte der electromagnetischen Lichttheorie abgeleitet werden wird.

b) Nach Formel (4) ist $L = E_0 / b$, d. h. der gesammte

in einem Molecül oder Atom zu irgend einer Zeit vorhandene und während der ungestörten Bewegung derselben als Strahlung erscheinende Betrag an Energie ist proportional der anfänglichen Strahlungsintensität und umgekehrt proportional der Abklingungsconstante b, welche die Dimension einer reciproken Zeit hat. Hierbei ist unter E_0 diejenige Energiemenge zu verstehen, welche in einer Secunde ausgestrahlt werden würde, wenn die Leuchtbewegungen durch irgend welches Mittel in derjenigen Intensität erhalten werden könnten, welche sie im Anfange des Strahlungsvorganges besassen. Im Anfange des Processes ist die Strahlungsintensität eines Grammes Natriumdampfes gleich S; da das Natriumatom insofern, als es zur Entstehung der von uns hier allein in Betracht gezogenen gelben Linie Veranlassung gibt, 10^{15} halbe Schwingungen in der Secunde ausführt, so ist bei uns $E_0 = 10^{15} S$. Wir haben also

$$e^2 \frac{10^{15} \pi^4 N d^2}{3 \lambda^3 . b} \mathrm{cm}^3 \mathrm{g} \sec^{-2} \frac{\sec^{-1} . \mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}^3 . \sec^{-1}} = L \mathrm{cm}^2 \mathrm{g} \sec^{-2}.$$

Setzen wir die oben angeführten Zahlen ein, so erhalten wir

$$e = 0{,}15 . 10^{-11} \mathrm{cm}^{3/2} \mathrm{g}^{1/2} \sec^{-1},$$

also einen Werth, der in der Grössenordnung mit dem vorigen übereinstimmt; der Sinn der Abweichung von dem aus der Electrolyse gewonnenen Werthe ist ebenfalls richtig; wir werden zu einem kleineren Werthe geführt, wie zu erwarten war.

Wir haben für b hierbei den Werth 10^8 zu Grunde gelegt; nach Hrn. E. Wiedemann ist $b < 10^9$ und $> 10^7$ (l. c. p. 234); eine geringe Unsicherheit in diesem Werthe macht nicht viel aus, da e im Quadrat in der Abklingungsformel auftritt. Aus diesen Berechnungen folgt also: *Mag man die Strahlungserscheinungen auf elastische Kräfte zurückführen, wo dann die materiellen Theile der Molecüle und Atome periodische Bewegungen ausführen, oder mag man sie auf electrische Kräfte zurückführen, wo dann die mit den Atomen verbundenen electrischen Valenzladungen das sich Bewegende sind, immer wird man auf dieselbe Grössenordnung der hierbei betheiligten Factoren geführt, sodass die electromagnetische Lichttheorie im Stande ist, nicht nur in qualitativer, sondern auch in*

quantitativer Beziehung vollkommen von den Erscheinungen der Mechanik des Leuchtens Rechenschaft zu geben.[1])

4. *Electrische und mechanische Auffassung der Leuchterscheinungen.* Der Grund dafür, dass wir die hier angedeutete electrische Auffassung der Leuchtprocesse an Stelle der gewöhnlichen mechanischen setzen können, ohne mit der Grössenordnung der in Frage kommenden Factoren in Widerspruch zu gerathen, liegt in der Grössenordnung der hierzu erforderlichen Electricitätsmengen einerseits und der bei den Leuchtprocessen betheiligten Massen andererseits. Hr. E. Wiedemann hat nachgewiesen, dass es bei den Leuchtprocessen nicht Schwingungen in den Aetherhüllen der Molecüle und Atome sein können, welche wir als Sitz der Energie, welche allmählich bei dem Strahlungsvorgang in den umgebenden Raum übergeht, betrachten dürfen, weil die bewegten Massen des Aethers viel zu klein ausfallen würden, um die Grösse der thatsächlich in der Energie der Strahlung wiedergefundenen kinetischen Energie zu erklären. Er zeigte, dass das Schwingende vielmehr von der Grössenordnung desjenigen Factors sein müsste, der als Masse in den Bewegungsgleichungen auftritt, dass es also in der Sprache der elastischmechanischen Optik die materiellen Molecüle selbst sein müssten, welche sich deformiren und durch ihre Schwingungen, als primäre secundär zu den Lichtschwingungen des umgebenden Aethers Veranlassung geben. Im Sinne der hier ausgeführten Uebertragung der Ergebnisse der electromagnetischen Lichttheorie auf die einzelnen Molecüle sind oscillirende Ladungen mit freier Electricität das Schwingende. Dass wir hierbei nur verhältnissmässig kleine Ladungen brauchen,

1) In einem am 21. März 1890 in der Royal Institution gehaltenen Vortrage über electromagnetische Strahlung gibt Hr. G. F. Fitzgerald (p. 5 u. vgl. auch Beibl. 17. p. 859. 1893) an, dass „die mögliche strahlende Kraft eines Atoms, wenn wir sie in der Voraussetzung berechnen, dass die Atomladung längs des Atomdurchmessers oscillire, billionenmal grösser sein kann, als Hr. E. Wiedemann für die Strahlung eines Natriumatoms im Bunsenbrenner gefunden hat.“ Leider fehlt jede nähere Angabe, sowohl über die Voraussetzungen, die sonst dieser Rechnung zu Grunde gelegt sind, als auch über diese selbst, sodass ein Vergleich mit der hier durchgeführten Berechnung, die auf keine derartigen Widersprüche führt, unmöglich ist.

deren Grösse mit anderen Erscheinungen z. B. denen der Electrolyse im Einklang steht, hat darin seinen Grund, dass für die hier in Frage kommenden Erscheinungen sehr kleine Electricitätsmengen schon grossen ponderablen Massen äquivalent sind, gerade so, wie die electrostatische Wirkung der Valenzladungen der gravitirenden Wirkung von ponderabelen Massen aufeinander entspricht, die viele mal grösser sind als die materiellen Träger der Valenzladungen selbst.[1])

Diese electrische Auffassung der Leuchterscheinungen hat vor der gewöhnlichen viele nicht unwesentliche Vortheile. Wir entgehen bei ihr z. B. einer Reihe von Schwierigkeiten, welche bei der elastischen Optik auftreten. Zunächst ist es schwierig, sich vorzustellen, dass das Atom, welches allen chemischen Eingriffen widersteht, gleichzeitig einen solchen Grad von Elasticität haben soll, dass es den häufig sehr verwickelten Schwingungscomplex liefern kann, der uns in dem Spectrum entgegentritt. Diese Schwierigkeit ist besonders gross bei den Metallen, die fast alle sehr complicirte und linienreiche Spectra liefern, und von denen sich andererseits nachweisen lässt, dass sie im Dampfzustande wohl alle in ihre einzelnen Atome zerfallen sind, wie dies für Hg und Cd schon länger bekannt war.

Ferner würde, worauf u. a. Lord Kelvin (Sir W. Thomson) hinweist, bei Atomen von so grosser Elasticität, dass wir ihren elastischen Deformationen die Spectra zuschreiben könnten, sehr bald die ganze translatorische Energie eines Gases in oscillatorische Energie der Molecüle, und zwar von immer höherer Schwingungszahl umgewandelt werden.[2])

5. *Grundgleichungen der Mechanik des Leuchtens vom Standpunkte der electromagnetischen Lichttheorie aus.* Wir wollen nun untersuchen, welche Bedeutung die oben definirten, die Leuchtprocesse bestimmenden Grössen, also namentlich die Abklingungsconstante b, in der electrischen Theorie haben und wie sich auch hier die Grundgleichungen der Mechanik des Leuchtens (p. 658) ergeben.

---

1) Vgl. H. v. Helmholtz, Vorträge und Reden 2. p. 316.

2) Sir William Thomson, Constitution of matter, p. 231. Nature Series. London 1889.

Die Hertz'sche Theorie gibt unmittelbar für eine sich selbst überlassene electrische Kraftcomponente X die Gleichung

$$(6) \qquad \varepsilon \frac{dX}{dt} = -4\pi\lambda X.\text{[1]}$$

Hier ist ε eine reine Zahl, die dielectrische Polarisirbarkeit des Mediums charakterisirend, und λ „die specifische electrostatisch gemessene Leitfähigkeit des Körpers", von der Dimension einer reciproken Zeit. Aus (6) folgt unmittelbar

$$(7\text{a}) \qquad X = X_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} t};$$

führen wir statt der Kräfte die ihnen proportionalen Polarisationen[2]) ein, so erhalten wir

$$(7\text{b}) \qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} t},$$

Relationen, die unmittelbar mit der Gleichung (3) p. 658 vergleichbar sind. Dort waren E_0 und E die zur Zeit $t = 0$ und $t = t$ im Molecül vorhandenen in Strahlung umwandelbaren Energiemengen der elastischen Deformationen, hier stehen die die Lage der Valenzladungen bestimmenden Kräfte zur Zeit $t = 0$ und $t = t$, bez. die Momente der dielectrischen Polarisationen der leuchtenden Theilchen in demselben Zusammenhange. An Stelle der Abklingungsconstante b ist hier der Ausdruck $4\pi\lambda/\varepsilon$ getreten; dies ist das Reciproke der Zeit, in der die sich selbst überlassene Kraft auf den $e$ten Theil ihres Anfangswerthes herabsinkt, die sog. „Relaxationszeit".

Auch bei der älteren, Maxwell'schen Fassung der Theorie, wo die Vorgänge der dielectrischen Polarisation und der electrischen Leitung zunächst gesondert zum Ausdruck gebracht werden, und die gesammte electrische Bewegung dann durch Superposition beider erhalten wird, gelangt man zu denselben Beziehungen:

Bei der absoluten Nulltemperatur liegen alle Valenzladungen in ihren Gleichgewichtslagen fest. Steigt die Temperatur, so entsteht Bewegung der einzelnen Ladungen gegeneinander, sie werden aus ihren Gleichgewichtslagen gestossen, Verschiebungen der Valenzladungen treten ein. Es sei $\mathfrak{X}$ der

1) Hertz, Wied. Ann. **40.** p. 587. 1890 und Untersuch. p. 218.
2) Hertz, Wied. Ann. **40.** p. 592 bez. Untersuch. p. 223.

Vector dieser Verschiebungen mit den von Ort zu Ort variabelen Componenten f, g, h. Die Valenzladungen üben Kräfte aufeinander aus; die Componenten f, g, h sind in der Maxwell'schen Theorie mit den Componenten P, Q, R der electrischen Gesammtkraft durch die Gleichungen:

$$(8) \qquad f = \frac{K}{4\pi} P, \quad g = \frac{K}{4\pi} Q, \quad h = \frac{K}{4\pi} R$$

verbunden (K Dielectricitätsconstante). Für die in Strahlung umwandelbare electrische innere Energie kommen nur die in jedem Augenblick vorhandenen Verschiebungen der Valenzladungen gegen einander in Betracht. Dem E der elastischen Auffassung in Formel (3) entspricht hier also die Raumvariation des Vectors $\mathfrak{D}$, d. h.

$$(9) \qquad H = -S(\nabla \mathfrak{D}),$$

wo ∇ die Vectorenoperation

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

bezeichnet.[1] Dies ist nichts anderes als des Ausdruck

$$(9a) \qquad H = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

d. h. die „wahre räumliche Dichte der Electricität“.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man von vornherein von dem specielleren Bilde eines dielectrisch polarisirten kleinsten Theilchens ausgeht, wie es z. B. H. v. Helmholtz in der oben citirten Arbeit p. 391 (vgl. p. 656) thut.

Es erübrigt nur noch, zu zeigen, dass für diese Grösse auch aus der Maxwell'schen Theorie eine analoge Gleichung wie (3) folgt. Für die Electricitätsbewegung gibt die Theorie ganz allgemein

$$u = CP + K/4\pi \,.\, dP/dt, \qquad v = CQ + K/4\pi \,.\, dQ/dt,$$
$$w = CR + K/4\pi \,.\, dR/dt,$$

wo C die Leitfähigkeit ist. Da die Componenten u, v, w der Continuitätsgleichung $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ genügen müssen, so erhalten wir durch Differentiiren und Addiren mit Rücksicht auf (8)

---

1) Maxwell, Treatise 2. § 619. p. 240 d. 2. Ausgabe 1881.

$$0 = 4\pi C/K(\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h/\partial z) + d/dt(\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h/\partial z),$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung der Klammerausdrücke nach (9a):

$$H = H_0 e^{-\frac{4\pi C}{K}t} \tag{10a}$$

und den Leuchtenergieinhalt wie oben:

$$L = H_0/b, \quad b = 4\pi C/K;$$

b ist also wieder gleich der Relaxationszeit. Es entsprechen sich also die Begriffe: Strahlungsintensität oder Energie der Leuchtbewegungen E der alten Theorie und durch dielectrische Polarisation pro Volumeneinheit verschobene Electricitätsmenge H oder „wahre Electricität“ oder Moment der dielectrischen Polarisation pro Volumeneinheit (vgl. auch Tumlirz, Electromagnetische Lichttheorie p. 9. 1883) der neuen, sowie Abklingungsconstante und Relaxationszeit.

Die electrische Theorie der Leuchterscheinungen führt hiernach zugleich zu bemerkenswerthen, einfachen Relationen zwischen den das Leuchten bestimmenden Grössen und den electrischen Constanten. Freilich beziehen diese sich zunächst auf das Molecül und sind so den gewöhnlichen Messmethoden nicht direct zugänglich. Aber es bietet sich hier umgekehrt ein Weg dar aus den so vollkommen studirten optischen Erscheinungen auf die noch unbekannten electrischen Eigenschaften der kleinsten Theile der Körper zurückzuschliessen. Dabei müssen den Grössen C und K diejenigen Werthe gegeben werden, die sie in der erweiterten Maxwell'schen Theorie[1]) haben, denn unsere Formeln gelten, wie oben schon gesagt, zunächst nur für eine bestimmte Schwingungszahl.

Zum Schluss möchte ich mir noch erlauben, über Anwendungen der hier entwickelten Anschauungen einiges anzudeuten.

6. *Anwendung auf die Luminescenztheorie.* Regen wir die electrischen Schwingungen primär an, indem wir z. B. über die Molecüle eines verdünnten Gases in einer Geissler'schen Röhre

1) Vgl. die Arbeiten von Goldhammer u. H. Ebert, Wied. Ann. 47. p. 93. 1892, und 48. p. 1. 1893.

electrische Entladungen hingehen lassen[1]), so können wir die oscillatorische Energie und damit die Energie der abgegebenen Strahlung erheblich über die Grösse hinaus steigern, welche sie nach Maassgabe der translatorischen Energie, d. h. der Temperatur des Gases haben könnte[2]); für alle Fälle, wo dieses der Fall ist, hat Hr. E. Wiedemann die zweckmässige Bezeichnung eingeführt: „die Molecüle luminesciren". Da nach der electromagnetischen Lichttheorie das Licht selbst nur aus Wellen electrischer und magnetischer Kräfte besteht, so können wir „Luminescenz" auch durch Belichtung erzeugen; falls die dabei erregten, das normale Maass überschreitenden Oscillationen im Molecül selbst oder bei den Zusammenstössen nicht zu schnell gedämpft werden, erhalten wir die Erscheinungen der „Photoluminescenz", d. h. der Fluorescenz im weitesten Sinne des Wortes.[3])

Viel heftiger als durch den Zusammenprall der Molecüle müssen die Valenzladungen erschüttert werden, wenn man den Bau des Molecüls durch chemische Einwirkungen vollkommen zerstört und unter der Wirkung chemischer Affinitäten neue Molecüle entstehen lässt. Werden Salzmolecüle, etwa die des NaCl unter dem Einfluss von Reductionsmitteln zerstört, indem man z. B. die Salzmolecüle in eine Bunsenflamme einführt, in der dann der in dieser enthaltene H reducirend wirkt, so werden hierbei Valenzschwingungen von solcher Amplitude erregt, dass auch die sehr hohen Oberschwingungen, die den Lichtschwingungen entsprechen, hinreichend kräftig sind, um die den Metallen eigenthümlichen Spectra zu ergeben bei Temperaturen, bei denen sonst noch kein Leuchten eintritt.[4])

1) Vgl. hierzu die Theorie von Hrn. E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 245. 1880, und **20.** p. 788. 1883; ferner E. Wiedemann und H. Ebert, Sitzungsber. der Physik.-Med. Soc. zu Erlangen 1892 u. 1893

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** p. 298. 1879.

3) Die Fälle der Balmain'schen Leuchtfarbe, die man gewöhnlich als Typus für die „Phosphorescenz" als einer nur graduell verschiedenen „Fluorescenz" anführt, gehören nicht hierher, da es nach den Untersuchungen von Hrn. E. Wiedemann wohl chemische, durch die Belichtung hervorgerufene Umsetzungen sind, welche die Energie für das Nachleuchten liefern (Wied. Ann. **37.** p. 222. 1889).

4) Schon früher hat Hr. E. Wiedemann das Leuchten der an ultravioletten Strahlen so reichen und doch verhältnissmässig so kühlen

Bei dieser Erregung von Valenzschwingungen von viel grösseren Amplituden, als der mittleren translatorischen Moleculargeschwindigkeit entspricht, durch chemische Einwirkungen (Chemiluminescenz) spielt die von H. v. Helmholtz aus Betrachtungen der Arbeitsleistungen bei der Electrolyse erschlossene Eigenschaft der Atome eine Hauptrolle, dass die Elementarquanta der Electricität $+e$ und $-e$ von den verschiedenen Atomen verschieden stark angezogen werden; Wasserstoff und die Metalle üben eine grössere Anziehung auf die $+e$, als auf die $-e$ aus; umgekehrt ziehen Sauerstoff und die Halogene die $-e$ stärker an und zwischen diesen sind wieder die Anziehungen verschieden.

7. *Anwendungen auf die geometrische Optik.* Betrachten wir die Lichtschwingungen als herrührend von molecularen Electricitätsbewegungen, die nach der Art der Bewegungen in einem Hertz'schen Oscillator verlaufen, so können wir hier die von Hrn. Hertz für diesen Fall entwickelten Formeln zur Anwendung bringen.[1])

Da wir uns bei allen optischen Untersuchungen in Entfernungen vom leuchtenden Molecül befinden, die sehr gross gegenüber den Dimensionen der Molecüle selbst sind, so können wir höhere Potenzen des reciproken Abstandes r von ihnen gegen die erste vernachlässigen. Sind die Componenten der electrischen Kraft Z und R, die der magnetischen P und N, so gelten für die durch r und ϑ (Poldistanz) bestimmten Raumpunkte die Formeln:

$$(11)\quad \begin{cases} Z = -e\,d\,\pi^2/\lambda^2 . \sin(r/\lambda - t/T)\,\pi \sin^2\vartheta/r \\ R = \quad e\,d\,\pi^2/\lambda^2 . \sin(r/\lambda - t/T)\,\pi \sin\vartheta \cos\vartheta/r \\ P = A\,e\,d\,\pi^2/(\lambda T) . \sin(r/\lambda - t/T)\,\pi \sin\vartheta/r \\ N = 0, \end{cases}$$

Flammen des Alkohols oder des Bunsenbrenners auf Chemi Luminescenz zurückgeführt, und zwar auch für den Fall, dass Natrium in der Bunsenflamme leuchtet (Wied. Ann. **37.** p. 182 und 215. 1889). Vgl. auch die Arbeiten von H. Ebert „Ueber das Leuchten der Flammen" (Sitzungsber. der Physik.-Med. Soc. zu Erlangen. **21.** p. 6. 1889; „Ueber das Wesen der Flammenstrahlung" (Eder's Jahrb. f. Photogr. u. Reprod. techn. **5.** p. 592. 1891, und E. Pringsheim, Wied. Ann. **45.** p. 428. 1892.

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 1. 1888 oder Untersuchungen p. 147.

wo λ die Wellenlänge, A die reciproke Lichtgeschwindigkeit ist. Die resultirende electrische Gesammtkraft ist

(12) $$e\,d\,\pi^2 \sin(r/\lambda - t/T)\,\pi \,.\, \sin\vartheta / r\,\lambda^2;$$

sie steht senkrecht zum Radiusvector r.

Schon aus der Form dieses Kraftgesetzes ergeben sich ganz allgemein bei seiner Anwendung auf Molecülschwingungen unmittelbar einige wichtige Consequenzen:

α) Die Ausbreitung der Wirkung erfolgt als reine Transversalwelle; die in die Richtung von r fallende longitudinale Componente, deren Auftreten in der elastischen Optik so grosse Schwierigkeiten macht und zur Einführung von Nebenhypothesen nöthigt, erscheint hier überhaupt nicht. Hierdurch zeichnet sich die electromagnetische Theorie wesentlich vor der elastischen, ganz abgesehen von der hier gegebenen specielleren Fassung aus, und es kann die Frage aufgeworfen werden, worin es ganz allgemein begründet liegt, dass bei dem Gleichungssystem der electromagnetischen Lichttheorie die Frage bezüglich der Longitudinalwelle überhaupt gar nicht auftritt. Da sie nicht erst a posteriori durch besondere ad hoc gemachte Nebenannahmen entfernt zu werden braucht, so muss der Grund ein tiefer liegender sein. Derselbe scheint mir auf Folgendem zu beruhen: Lord Kelvin hat gezeigt, dass ein „rotationeller", d. h. von Wirbelfäden erfüllter Aether, der sich im übrigen ganz wie eine incompressible Flüssigkeit verhält, sich periodisch wirkenden Kräften gegenüber ganz so wie ein elastischer *fester* Körper verhält, d. h. nur Transversalwellen zu Stande kommen lässt.[1]) Setzt man also voraus, dass der Aether mit in sich zurücklaufenden, d. h. mit „cyklischen Bewegungen" im Sinne des Hrn. H. v. Helmholtz erfüllt ist, so erhält er die Eigenschaft, nur transversale Lichtwellen fortzupflanzen („gyrostatischer Aether"). Nun ist aber die ganze Maxwell'sche Feldtheorie und somit auch die Hertz'sche, welche aus dieser durch rein formale Operationen folgt, auf der Voraussetzung begründet, dass den electrischen Erscheinungen irgendwelche „cyklisch" in sich zurücklaufende Bewegungen im Aether zu

1) Sir W. Thomson, Phil. Mag. (5) **24.** p. 342. 1887; vgl. auch G. F. Fitzgerald, Nature **40.** p. 32. 1889 u. Royal Institut. 21. März 1890. p. 8.

Grunde liegen.[1]) In dem allgemeinen mechanischen Typus der zu Grunde gelegten Bewegungen, nämlich des „cyklischen" (H. v. Helmholtz) oder des „gyrostatischen" (Lord Kelvin) liegt die Ursache des Nichtauftretens der störenden Longitudinalwelle.

Dass auch der „quasielastische" Aether bei dem die Deformationsarbeit nicht wie bei den gewöhnlichen elastischen Körpern durch Volumendilatationen und die Scheerungen (Axenwinkeländerungen), sondern durch die Verdrehungen bestimmt ist, zu diesem Typus gehört, ist leicht zu erkennen. Jede (Cykel-)Kreis-Bewegung setzt einer einfachen Translation keinen Widerstand entgegen, wohl aber einer Drehbewegung. Um also ein Volumenelement, welches mit solchen gyrostatischen Bewegungen erfüllt ist, zu drehen, muss eine Arbeit geleistet werden; dieselbe wird durch das Quadrat der herbeigeführten Drehung gemessen. Diese Quasielasticität wird also auch hier durch die cyklische Natur der zu Grunde liegenden Bewegungen bedingt. Daher gelangt man zu den Maxwell'schen Gleichungen, wenn man von diesem quasielastischen Aether ausgeht, wie durch die Untersuchungen von Lord Kelvin[2]) und der Hrn. A. Sommerfeld[3]), L. Boltzmann[4]) und R. Reiff[5]) gezeigt worden ist.

β) Da in constanten Entfernungen r die Kraft wie $\sin\vartheta$, d. h. wie der senkrechte Abstand von der Axe der Oscillation variirt, so wird sie für Punkte in der Richtung des Oscillators gleich Null; es fällt hier also die Frage nach der Art der Wirkung in der Richtung der Schwingung ganz fort, welche in den elastischen Theorien als Druckkraft erscheinen würde, deren Vorhandensein indessen schwierig mit den optischen Erscheinungen in Einklang zu bringen ist.

γ) Die Form des Ausdruckes (12) gibt verbunden mit dem Huygens'schen Princip den Satz, dass die Kraft der Schwingung einzelner Zonen der Wellenoberfläche wie der

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 47, p. 1. 1892 (namentlich p. 25 ff.) u. H. Ebert, Wied. Ann. 48. p. 1. 1893.

2) Sir William Thomson, Math. and. Phys. Papers 3. p. 442 ff.

3) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 46. p. 137. 1892.

4) L. Boltzmann, Wied. Ann. 48. p. 78. 1893.

5) R. Reiff, Elasticität u. Electricität, Freiburg i. Br. u. Leipzig 1893.

Cosinus des Winkels zwischen der Wellennormale und der Richtung, nach welcher man die Elementarwellen verfolgt, abnimmt; diesen Satz benutzen wir in der Theorie gewisser Beugungserscheinungen. Die Analogie der nach der Hertz'schen Formel ablaufenden electrischen Bewegungen mit der dynamischen Theorie der Beugung hat Hr. W. König[1]) genauer verfolgt.

Die vorstehenden Betrachtungen dürften zeigen, dass sich die hier vorgetragene electrische Theorie der Lichtschwingungen auf den verschiedensten Gebieten der Optik bewährt. Dieselbe legt nur bekannte Erscheinungen zu Grunde, indem sie von den durch die Electrolyse verbürgten electrischen Ladungen der kleinsten Theilchen ausgeht und auf diese die Hertz'schen Gleichungen für einen Oscillator molecularer Dimensionen anwendet; sie steht damit vollkommen auf dem Boden der Vorstellungen, die man sich in neuester Zeit über die Vorgänge im Felde rasch wechselnder electrischer Kräfte überhaupt gebildet hat.

Erlangen, März 1893.

1) W. König, Wied. Ann. **37**. p. 651. 1889.

---

5. *Ueber ein Photometer*[1]; *von E. W. Lehmann.*

(Mitgetheilt aus dem physikal. Laborat. der Univ. Erlangen.)

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1—12.)

I. Einleitung.

Bei jedem Photometer, das auf der Vergleichung der Erleuchtuug zweier Felder durch die beiden zu vergleichenden Lichtquellen beruht, sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Jedes der zu vergleichenden Felder darf nur Licht von einer der beiden Lichtquellen erhalten.

2. Die Grenze, in der die beiden Felder zusammenstossen, muss scharf sein und im Moment der Gleichheit möglichst verschwinden.

3. Die optischen Theile sollen unveränderlich sein, was z. B. bei einem Fettfleck nicht der Fall ist.

4. Die den beiden zu vergleichenden Lichtquellen zugekehrten Theile des Photometers müssen möglichst identisch, symmetrisch angeordnet und leicht vertauschbar sein.

5. Die Ablesungen müssen so geschehen können, dass sie selbst bei einer grossen Zahl von Einzeleinstellungen nicht viel Zeit beanspruchen und den Beobachter nicht ermüden.

Vergleicht man die Construction von Photometern bei denen zwei aneinander stossende Flächen ihr Licht in der einen oder anderen Weise von den beiden gegebenen Lichtquellen erhalten, so ergibt sich folgendes:

Bei dem Bunsen'schen Photometer werden Flächen benutzt, die das Licht diffus reflectiren und durchlassen, bei dem von Lummer und Brodhun solche, die das Licht diffus und total reflectiren.

Bei dem Joly'schen Photometer[2] kommt nur diffus zerstreutes Licht in Betracht. Die beiden letzteren Photometer genügen den obigen Bedingungen, welche von verschiedenen Seiten für die Genauigkeit der Messung mit diesen Instru-

1) Auszug aus einer Inauguraldissertation.

2) Eine Beschreibung des Apparates findet sich in E. Wiedemann u. H. Ebert, Physikalisches Praktikum 1. Aufl. p. 232.

menten aufgestellt worden sind. — Das in Fig. 1 beschriebene Photometer ist nach demselben Princip, wie dasjenige von Joly construirt. — Ich untersuchte dasselbe auf Anregung von Hrn. Dr. Ebert, von dem ich auch während der Untersuchung mannigfache Hülfe und Unterstützung erfahren habe.

Das Photometer genügt den zu Anfang erwähnten Bedingungen und hat neben dem relativer Wohlfeilheit noch eine Reihe von Vortheilen, auf die ich nach der Beschreibung des Apparates zurückkommen werde.

A. Beschreibung.

1. Photometer.[1]

In Fig. 1 bedeuten A und A_1 zwei rechtwinklig gleichschenklige Prismen; an denselben ist je eine Kathetenfläche $e e'$ und $e_1 e_1'$ matt geschliffen; mit ihren anderen Kathetenflächen $e i$ und $e_1 i_1$ werden sie auf eine planparallele Glasplatte so gekittet, dass die Kathetenflächen in einer Ebene liegen. Besonders ist darauf zu achten, dass die Prismenkanten $i i_1$ der Flächen $e i$ und $e_1 i_1$ möglichst scharf zusammenstossen. Die Hypotenusenflächen $d d_1$ der Prismen sind unter einem Winkel von 45° gegen die Platte b geneigt. — Die ganze Combination ist in einen Messingring eingepasst, welcher an der Seite der matten Prismenflächen bei c und c_1 je eine rechteckige Oeffnung besitzt. Dieser Ring ist von einem zweiten umschlossen, welcher in fester Verbindung mit dem Knopf B steht. Das Ganze ist von einem rechteckigen Kasten umgeben, welcher vor den Prismenflächen $e i$ und $e_1 i_1$ eine und seitlich bei k und k_1 je eine Oeffnung besitzt. In den seitlichen Oeffnungen befindet sich je eine Glasplatte, die aus demselben Stücke herausgeschnitten ist; vor den Prismenstücken $e i$ und $e_1 i_1$ ist ein Fernrohr mit einer Lupe w zur scharfen Einstellung angebracht. Der Knopf B dient dazu, eine Drehung der ganzen Prismencombination um die Horizontalaxe zu bewirken; dieselbe muss genau 180° betragen; dieses wird dadurch erreicht, dass zwei Messingstifte, fest verbunden mit dem rechteckigen Gehäuse, als Anschlag für

1) Dasselbe wird von Hrn. Böhner, Mechanikus des hiesigen physikalischen Institutes zum Preise von ca. 80 M. ausgeführt.

die Drehung der Prismencombination dienen. Das ganze Photometergehäuse ruht auf einer Säule, die senkrecht zur Photometerbank steht und die man heben und senken kann. Die Höhe derselben wird so gewählt, dass die durch die Mittelpunkte von c und c_1 gelegte Linie, welche wir kurzweg die Axe des Photometers nennen wollen, die zu vergleichenden Lichtquellen n und n_1 schneidet.

Zur Einstellung des Photometers wird folgendermaassen verfahren:

Man stellt das Photometer durch Heben oder Senken in einer für die Ablesung passenden Höhe ein und richtet die Axe des Photometers parallel zur Axe der Photometerbank. Die in geeigneter Weise befestigten Lichtquellen werden so über der Photometerbank aufgestellt, dass die Axe des Photometers durch die Mitte der Lichtquellen geht; hierauf verschiebt man das Photometer bis gleiche Helligkeit der beiden Prismenflächen erzielt ist.

Diese Construction des Joly'schen Photometers besitzt folgende Vortheile:

1. Bei *Drehung* der Prismen um die Horizontalaxe wird gleichzeitig die Lage der zusammenstossenden Kanten umgekehrt, sodass ein Fehler, hervorgerufen durch die Verschiedenheit derselben, eliminirt wird.

2. Die Diaphragmen und Prismen befinden sich in gleicher Sehweite (d. h. in gleicher Entfernung vom Beobachtungsort). Es werden hierdurch störende Irradiationserscheinungen vermieden. Bei Erfüllung dieser Bedingungen ist es relativ leicht zu beurtheilen, ob die beiden nebeneinander liegenden Flächen gleich hell erleuchtet sind. Es gelang mir mit diesem Instrument eine so grosse Empfindlichkeit zu erzielen, dass der mittlere Fehler der Messungen bei 40 Einzeleinstellungen und einer Leuchtkraft von 8 Amylacetatlampen im Abstand von 1200 mm unter 0,4 Proc. blieb.

2. Registrirvorrichtung.

Die Registrirvorrichtung (Fig. 2) gestattet die Lagen des Photometers zu verzeichnen, ohne dabei das Auge von dem Photometer selbst zu entfernen. Das Auge erhält also keine störenden Eindrücke und man erzielt die grösste Genauigkeit

der Einstellung, die überhaupt mit dem Apparat zu erreichen ist.

Mit dem Schlitten, an dem sich das Photometer befindet, ist unten ein viereckiges Holzbrett (15 cm . 10 cm) fest verbunden. In der Mitte desselben befindet sich ein kleines 15 mm weites, rundes verticales Loch (*b*), durch das ein Bleistift geschoben werden kann; unterhalb dieses Holzbrettes liegt eine mit der Photometerbank fest verbundene horizontale Platte vom Querschnitt (10 cm . 12 cm) in deren Mitte eine Nuth eingehobelt ist; in dieser Nuth gleitet eine Holzplatte *k*. Auf der oberen Fläche derselben ist ein Papierstreifen *p* aufgeklebt; vorne an derselben ist eine Schnur *i* befestigt, welche mit der Hand (oder mittelst Räderübersetzung) nach jeder Einstellung um einen bestimmten Betrag vorwärts bewegt werden kann.

Bei den Messungen wird das Photometer nach rechts oder links verschoben, bis die Prismenflächen gleiche Helligkeit zeigen; dann drückt man auf den Bleistift *b*, welcher die jeweilige Einstellung auf dem Papier *p* verzeichnet; hierauf wird das Prismensystem mittels des Knopfes *B* um die horizontale Axe gedreht, von neuem auf gleiche Helligkeit eingestellt und wieder auf den Bleistift *b* gedrückt, wodurch die neue Einstellung gegeben ist. Nach je zwei Einstellungen entsprechend der Drehung des Prismensystems um 180° wird durch Ziehen an der Schnur *i* das Holzbrett *k* ein wenig verschoben, damit die einzelnen Einstellungspunkte sich nicht überdecken. Fig. 3 gibt die Skizze eines Papieres mit einer Reihe von Einstellungen und zwar entsprechend den durch das Loch *b* gelegenen Punkten einer Anzahl von Ablesungen; sie lässt erkennen, wie die Abweichungen der Einstellungen von einander im Laufe der Beobachtungsreihe immer geringer werden und sich asymptotisch einem Grenzwerth nähern.

Aus den Entfernungen der einzelnen Punkte von der Mitte der Registrirvorrichtung findet man die mittlere absolute Einstellung des Photometers. Die Abstände der einzelnen Punkte werden mittels eines aufgelegten Maassstabes in Millimetern von der Mittellage abgelesen und notirt.

Bei dieser Art der Registrirung kann eine grosse Anzahl von Ablesungen in sehr kurzer Zeit ausgeführt werden. Man

braucht dann nur noch die Stellung der Lichtquellen abzulesen, während sich die jeweiligen Photometereinstellungen durch die Lage der Registrirvorrichtung und die Entfernungen der einzelnen Punkte von der Mitte derselben ergeben.

3. Anordnung der Versuche.

Zu den Versuchen dienten als Lichtquellen Glühlampen mit einer Normalspannung von 50 Volt; dieselben wurden mittels einer Serienmaschine gespeist, deren Schwankungen durch parallelgeschaltete Accumulatoren ausgeglichen wurden. Die nähere Anordnung zeigt Fig. 4.

In derselben bedeutet: D die Dynamomaschine, W und R Regulirwiderstände, E die Accumulatorenbatterie; das Ampèremeter a dient zur Messung des Hauptstromes. $c\,c_1$ sind Gefässe mit Quecksilber; an ihnen liegen an, einerseits der Kreis, welcher ein Wiedemann'sches Galvanometer (G) nebst Vorschaltwiderstand $r\,r$ enthält, andererseits ein Voltmeter von Hummel V_1 zur schnellen Ablesung der Spannung und ein solches von Kohlrausch (V_2). Das Galvanometer G wurde durch entsprechende Schaltung der Rollen und Compensation sehr empfindlich gemacht und zwar so weit, dass jede Stromschwankung erkannt wurde, welche die Leuchtkraft der Glühlampen um mehr als 0,3 Proc. änderte. Diese Grenze entsprach einer Veränderlichkeit der Stromstärke von 0,03 Proc., die sich mit technischen Messinstrumenten nicht hätte beobachten lassen. Bei den definitiven Versuchen war die Stromstärke constant. Die Lampen A und A_1 waren parallel zu einander geschaltet; die zu ihnen führenden Drähte zweigen bei $c\,c_1$ ab. Durch Einschalten eines Widerstandes x resp. x_1 konnte die Helligkeit der einen oder der anderen Lampe beliebig abgeschwächt werden; dadurch war ein Mittel gegeben unter den verschiedensten Umständen Helligkeitsvergleichungen auszuführen; dabei ging ich bis zu den Grenzen zwischen denen noch photometrirt werden kann. Auf die Lampen waren Diaphragmen mit einer Oeffnung von 12,2 cm^2 aufgesetzt, durch die, die vom unteren Theil der Lampen ausgesandten Strahlen abgeblendet wurden.

Bei späteren Versuchen wurde auch eine Schaltung (vgl. Fig. 5) verwandt, in welcher die beiden Lampen hintereinander lagen;

dann machten sich etwaige Schwankungen des Stromes in beiden Lampen gleichmässiger geltend. Trotz dieses Vorzuges wurde meist die erstere Schaltung verwandt, da sie die Regulirung der einzelnen Lampen für sich gestattete und somit für meine Zwecke geeigneter war.

B. Theoretischer Theil.

1. Photometer.

Um ein Urtheil über die Vertheilung der Lichtmenge im Photometer (vgl. Fig. 6) zu gewinnen, diente folgende theoretische Betrachtung. Die Lichtquelle links, etwa eine Glühlampe *A*, indicire auf der Glasplatte *G* pro Flächeneinheit eine Lichtmenge: J_1 und auf der Kathetenfläche *a* pro Flächeneinheit eine Licht menge: $\eta_1 . J_1 = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 . J_1$; hierin bedeutet:

ε_1 den Reflexionsfactor und ε_2 den Extinctionsfactor der Glasplatte.

Von dieser letzteren Lichtmenge wird wiederum ein Theil von *a* und *c* reflectirt, ein anderer im Prisma absorbirt. Die Fläche *b* reflectirt total, sodass durch *c* nur die diffus eindringende Lichtmenge:

$$\eta_1 . \alpha_1 . J_1 = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \alpha_1 J_1 = J_{d_1}$$

ins Fernrohr und somit ins Auge gesandt wird, wo α_1 der Diffusionscoefficient des einen Prismas bedeutet. Analog ergibt sich für die rechte Lichtquelle A_1:

$$J_{d_2} = \eta_1' . \alpha_1' . J_2 = \varepsilon_1' . \varepsilon_2' . \alpha_1' . J_2,$$

wo α_1' der Diffusionscoefficient des anderen Prismas ist. Nach der Einstellung auf gleiche Helligkeit ist somit:

$$J_{d_1} = J_{d_2} = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \alpha_1 . J_1 = \varepsilon_1' . \varepsilon_2' . \alpha_1' . J_2.$$

Durch directe Vergleiche der Helligkeitsverhältnisse vor und nach Einschaltung der Glasplatten und Prismen, hat sich ergeben, dass $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$ und α_1 nahezu α_1' ist, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Bei meinem Apparat war:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = 0{,}923. \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2' = 1$$

und

$$\alpha_1 = 0{,}21, \quad \alpha_1' = 0{,}20.$$

Es besteht somit die Relation:

$$J_{d_1} = 0{,}21 \,.\, 0{,}923 \,.\, J_1,$$

wo

$$J_1 = 8{,}38 \text{ Am.}$$

(wo Am. die indirecte Helligkeit der Amylacetatlampe bedeutet), also

$$J_{d_1} = 1{,}59 \text{ Am.}$$

Es gehen daher 81 Proc. der Lichtmenge durch den Apparat.

2. Empfindlichkeit des Apparates.

Es sei wieder J_1 die Intensität der linken Lichtquelle und J_2 diejenige der rechten, so besteht für die Helligkeit, welche durch das Fernrohr bei o auf c_1 resp. c gesehen wird, die Beziehung:

(1)
$$\frac{J_1}{x^2} \,.\, \varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \,.\, \alpha_1 = J_{d_1}$$

resp.

(2)
$$\frac{J_2}{(d-x)^2} \,.\, \varepsilon_1' \,.\, \varepsilon_2' \,.\, \alpha_1' = J_{d_2},$$

wo d den Abstand der beiden Lichtquellen von einander und x den Abstand einer der Lichtquellen vom Photometer bezeichnet.

Das Verhätlniss $J_{d_1} / J_{d_2} = A$ gibt ein Maass für den vom Auge empfundenen Helligkeitsunterschied der beiden zu vergleichenden Felder.

$$\frac{J_{d_1}}{J_{d_2}} = A = \frac{\dfrac{J_1}{x^2} \,.\, \varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \,.\, \alpha_1}{\dfrac{J_2}{(d-x)^2} \,.\, \varepsilon_1' \,.\, \varepsilon_2' \,.\, \alpha_1'}.$$

Da nun nach den Versuchen für unsere optische Vorrichtung $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = 0{,}923$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' = 1$ und nehmen wir α_1 rund α_1' zu 0,205 an, so besteht für die Berechnung der Empfindlichkeit die Relation:

$$\delta = \frac{\varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \,.\, \alpha_1}{\varepsilon_1' \,.\, \varepsilon_2' \,.\, \alpha_1'} = 1.$$

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $J_1 = J_2$, und

bedeutet δ die Verschiebung von der Stelle, wo $A = 1$ ist, so folgt bei Vernachlässigung von $(\delta / d)^2$ gegen δ / d

$$A_\delta = 1 - 8 . \frac{\delta}{d} .$$

Bei Einsetzung der Werthe für diesen Fall resultirt

$$A_\delta = 1{,}003 \text{ resp. } 1{,}006;$$

für Werthe von $d = 2200$ resp. 1200 mm, innerhalb deren die meisten meiner Beobachtungen lagen.

Um aus dem jeweiligen Fehler δ der Einstellung den Fehler der Intensitätsbestimmung zu berechnen, dient die gewöhnliche Formel:

$$J_1 = J_2 . \frac{\left(\frac{d}{2} - \delta\right)^2}{\left(\frac{d}{2} + \delta\right)^2} = J_2 . \left(1 - 8 \frac{\delta}{d}\right)$$

für $\delta = 1$ und $d = 1800$ wird:

$$J_1 = 1{,}016 . J_2 .$$

Dieses entsprach meinen Versuchen nicht genau, da $x > d / 2$ war und sich J_1 / J_2 zu 1,06 ergab; für $\delta = 2$ ergibt sich $J_1 = 1{,}022\, J_2$.

Nach Leonhard Weber[1]) ist der Empfindlichkeitscoefficient beim Bunsen-Photometer 2,2 bis 3,5, während an unserem Apparate derselbe 1 wird. Das hier beschriebene Photometer hat also eine etwa 3 mal grössere Empfindlichkeit als das Bunsen-Photometer.

3. Princip der Messung.

Sind H_l und H_r die im Fernrohr beobachteten Helligkeiten; ferner J_1 und J_2 die entsprechenden links und rechts vom Photometer befindlichen Lichtintensitäten, so bestehen folgende Relationen:

---

1) L. Weber, Wied. Ann. **31.** p. 676. 1887.

$$H_l = \frac{J_1}{a^2} \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \alpha_1$$

und

$$H_r = \frac{J_1}{a_1^2} \cdot \varepsilon_1' \cdot \varepsilon_2' \cdot \alpha_1'.$$

Für eine Einstellung auf gleiche Helligkeit, für welche $H_l = H_r$ wird, ist:

(1) $$J_1 = J_2 \cdot \frac{a^2}{a_1^2},$$

wo $a < a_1$ ist. Nach Drehung des Prismenpaares um seine Horizontalaxe (d. h. nach Vertauschung der Prismen) gilt für die Einstellung auf gleiche Helligkeit die Beziehung:

(2) $$J_1 = J_2 \cdot \frac{a'^2}{a_1'^2},$$

wo $a' < a_1'$ ist. Bezeichnen wir die Verhältnisse

$$\frac{a^2}{a_1^2}, \quad \frac{a'^2}{a_1'^2} \quad \cdots \quad \frac{a^{n2}}{a_1^{n2}}$$

mit V_1, V_2 ... V_n, so erhält man durch Bildung der Producte der einzelnen Beziehungen 1, 2 ... n folgende Formel:

(n) $$J_1 = \sqrt[n]{V_1 \cdot V_2 \ldots V_n} \cdot J_2.$$

Durch Vertauschung der Prismen und der aneinanderstossenden Kanten ergibt sich durch obige Formel (n) eine von der Beschaffenheit der Prismen unabhängige Beziehung zwischen den Lichtintensitäten J_1 und J_2. Je grösser die Anzahl der Einstellungen ist, um so genauer wird das Verhältniss $J_1 : J_2$.

C. Experimenteller Theil.

1. Das Verhältniss der Leuchtkraft der Amylacetatlampe und der Siemensplatineinheit (welche sich durch Umrechnung ergab), zur Glühlampe.

Viele Angaben über photometrische Messungen, namentlich über die Empfindlichkeit von photometrischen Apparaten enthalten keine genauen Daten über die absoluten Helligkeitswerthe bei denen gearbeitet wurde. In diesen Fällen ist es aber nicht möglich sich ein Urtheil über die Genauigkeit der

Apparate und Messungen zu bilden, da ja bekanntlich dieselbe von dem Helligkeitsgrade abhängt.

Ich habe daher das Verhältniss der Lichtstärke der Glühlampe zur Amylacetatlampe festzustellen gesucht; dazu habe ich die Lichtstärken der Glühlampen bei den von mir zu den definitiven Versuchen benutzten Spannungen bestimmt. Hierbei blieb das Photometer und die Glühlampe, welche vermittelst einer Stange fest verbunden waren, in constanter Entfernung; es wurde nur die Entfernung zwischen dem Photometer und der feststehenden Amylacetatlampe geändert; dazu verschob man das Photometer nebst der Glühlampe, welche man auf der Bank hin- und herbewegte bis gleiche Helligkeit der beiden Felder erreicht war. Wäre man bei der Messung einfach so verfahren, dass man die zu messenden Lichtquellen unbeweglich gelassen und mit dem Photometer die Stelle gleicher Helligkeit aufgesucht hätte, so wäre es nöthig gewesen für die Glühlampe das Entfernungsgesetz der Helligkeitsabnahme anzuwenden, was wegen der inneren Reflexe an den Glashüllen derselben nicht gestattet ist. Ferner hat man bei unseren Verfahren nur eine Entfernung zwischen Photometer und Glühlampe bei der ganzen Vergleichung zu messen. Ein weiterer Vortheil besteht darin, dass während derselben Beobachtungsreihe die Helligkeit der einen Photometerseite gleich bleibt. Dies bringt nicht nur eine grössere Sicherheit und Gleichmässigkeit beim Messen mit sich, da sich das Auge an eine andere Helligkeit stets von neuem gewöhnen muss, sondern bietet auch zugleich den Vortheil, dass die Einstellungsempfindlichkeit, die sich bekanntlich mit der Helligkeit ändert, immer dieselbe ist; dadurch wird die Discussion der Resultate sehr vereinfacht.

Es bleiben dann nur noch drei Ursachen, welche Veranlassung zu Fehlerquellen geben können.

1. Die stets unvermeidliche, wenn auch geringe Unsicherheit der Einstellung. Ueber diesen Fehler erhielt man ein Urtheil durch Ermittelung des mittleren Fehlers einer grossen Anzahl (50) Einstellungen, die schnell hinter einander ausgeführt wurden. Ich lasse dieselben hier folgen:

(Es bezeichnen: a die Einstellung auf der Bank, gerechnet von einem beliebigen Punkt, x die Differenz der jeweiligen (a) von der mittleren Einstellung.)

a	x	x^2	a	x	x^2	a	x	x^2
6	1	1	8	1	1	7	0	0
8	1	1	9	2	4	7	0	0
7	0	0	7	0	0	8	1	1
8	1	1	8	1	1	8	1	1
7	0	0	7	0	0	7	0	0
8	1	1	8	1	1	8	1	1
6	1	1	7	0	0	7	0	0
8	1	1	8	1	1	8	1	1
7	0	0	8	1	1	8	1	1
8	1	1	7	0	0	8	1	1
7	0	0	8	1	1	9	2	4
8	1	1	7	0	0	8	1	1
6	1	1	8	1	1	7	0	0
6	1	1	6	1	1	8	1	1
6	1	1	8	1	1	7	0	0
6	1	1	7	0	0	6	1	1
7	0	0	8	1	1			

Der mittlere Fehler ergab sich zu:

$$\sqrt{\sum \frac{x^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{40}{49}} = 0{,}9 \ ^{1)},$$

oder in Procenten 0,07 Proc. Die grösste Abweichung vom Mittel war 0,16 Proc.

2. Die Inconstanz der Glühlampe und der Amylacetatlampe. Erstere war Null, da die Stromstärke ganz constant blieb; letztere sehr unbedeutend. Aus den Versuchen von E. Liebenthal folgt, dass bei sonst gleichen äusseren Bedingungen die von der Lampe gelieferte Lichtmenge wesentlich nur von der Flammenhöhe abhängt. Die zur Vergleichung benutzte Amylacetatlampe ändert während einer Versuchsreihe — einer halben Stunde — ihre Höhe im Maximum um 0,4 mm.

3. Die unrichtige Messung der Entfernung zwischen Lichtquelle-Amylacetatlampe und Photometer. Dass man nicht einen Lichtpunkt, sondern einen gebogenen Kohlenfaden als Lichtquelle benutzt, hat bei den in Betracht kommenden Entfernungen keinen wesentlichen Einfluss, wovon man sich durch eine einfache Rechnung überzeugt.

Dieser Fehler kann durch genaue Ablesung auf ein Minimum reducirt werden.

---

1) n bedeutet die Anzahl der Einstellungen.

Man ersieht hieraus, dass die Fehlerquellen sehr klein sind.

Die folgende Tabelle enthält die Lichtintensitäten einer Glühlichtlampe ausgedrückt in Amylacetatlampen und Siemens-Platineinheiten, bei den jeweilig benutzten Spannungen.

Volt	Amylacetat-lampe	Siemens-Platineinheiten
50	8,4	14,8
47,5	6,15	10,8
45	5,84	10,26
42,5	4,18	7,24
40	2,98	5,23
35	1,70	2,98

Fig. 7 gibt die graphische Darstellung der Abhängigkeit der Lichtintensität von den jeweilig benutzten Spannungen; in derselben sind als Abscissen die Spannungen und als Ordinaten die Lichtintensitäten aufgetragen. Bei den späteren Messungen ging ich durch Abschwächen der rechten Lampe durch Einschalten von Widerständen mit der Leuchtkraft sehr herunter. Die Tabelle und Fig. 8 geben einen klaren Ueberblick über die Abhängigkeit der Leuchtkraft von dem jeweilig eingeschalteten Widerstande.

Ohm eingeschaltet	entspr.	Amylacetat-lampe	Siemens-Platineinheit
12,5		4,05	7,11
31,5		2,64	4,63
62,5		1,3	2,28
82,5		0,66	1,15

Bei den letzten Bestimmungen war das Helligkeitsverhältniss 1 : 13. Es ist dieses die äusserste Grenze bei der überhaupt noch sichere Vergleiche am Photometer möglich sind.

2. Vorversuche.

Bei den Vorversuchen wurde zuerst eine Hintereinanderschaltung der Accumulatoren im Parallelbetrieb zu der Maschine benutzt. Die Lampenspannung betrug 100 Volt, da die Lampen hintereinander geschaltet waren. Die Stromschwankungen waren sehr minimal etwa 0,09 Proc. Bei den späteren Messungen schaltete ich aber je 25 Accumulatoren hintereinander und beide Lampen parallel zu denselben und regulirte die Maschine so, dass sich eine Lampenspannung von 50 Volt ergab. Stromstärke und Spannung blieben voll-

ständig constant. Diese Schaltung behielt ich bei den späteren definitiven Versuchen bei, weil mir hierbei auch die Möglichkeit gegeben war, eine Lampe für sich durch Widerstände abzuschwächen.

Eine Aenderung der Helligkeit von 0,6 Proc. war ohne weiteres wahrnehmbar und der mittlere Fehler einer Einstellung blieb unter 0,3 Proc.

3. Versuche.

Die Vorsichtsmassregel, Photometer und Glühlampe in fester constanter Entfernung zu erhalten wandte ich überall da an, wo es sich um grosse Verschiedenheit der Farbentönung handelte, weil dann die Empfindlichkeit des Auges sehr unterstützt wurde, da die Helligkeit auf derselben Seite immer dieselbe blieb.

Die Versuche erstrecken sich auf eine Anzahl Messungen mit Lichtquellen in den verschiedensten Bereichen der Helligkeit.

Tabelle A gibt die Messungsresultate.

Tabelle A.

a	b	J	$M-J=x$	x^2	a	b	J	$M-J=x$	x^2
915	885	1,069	$0{,}0_25$	$0{,}0_425$	917	883	1,078	$0{,}0_24$	$0{,}0_316$
6	4	73	1	01	8	2	83	9	81
5	5	69	5	25	8	2	83	9	81
5	5	69	5	25	7	3	78	4	16
5	5	69	5	25	7	3	78	4	16
6	4	73	1	01	7	3	78	4	16
5	5	69	5	25	6	4	73	9	81
6	4	73	1	01	7	3	78	4	16
5	5	69	5	25	7	3	78	4	16
6	4	73	1	01	8	2	83	9	81
5	5	69	5	25	6	4	73	1	01
5	5	69	5	25	8	2	83	9	81
5	5	69	5	25	6	4	73	1	01
6	5	69	5	25	8	4	73	1	01
5	5	69	5	25	6	4	73	1	01
6	4	73	1	01	6	4	73	1	01
5	5	69	5	25	6	4	73	1	01
5	5	69	5	25	7	3	78	4	16
6	4	73	1	01	7	3	78	4	16
7	3	78	4	16	7	3	78	4	16

Mittel $M = 1{,}074$

Die Fig. 9 lässt erkennen, um wie viel die Einzelwerthe um das Mittel schwanken.

Stromstärke und Spannung blieben während des Versuches constant. Die Lichtquellen wurden mit 50 Volt betrieben. Die Abhängigkeit des mittleren resp. grössten Fehlers bei Vergrösserung des Abstandes der Lichtquelle (50 Volt) vom Photometer gibt folgende Tabelle und die graphische Darstellung (Fig. 10), in welcher als Abscissen die Abstände der Lichtquellen vom Photometer und als Ordinaten die jeweiligen mittleren resp. grössten Fehler aufgetragen sind.

Einzel-einstellung	Licht-stärke	Abstand des Ph. v. Lichtquell.	Mittlerer resp. grösster Fehler	Intensitäts-verhältniss	*m* (mittlerer Fehler
40	8,38	200 mm	1,5 resp. 1,9 %	1,077	± 0,0072
40	8,38	400 „	1,3 „ 1,8 %	1,076	± 0,0076
40	8,38	600 „	1,0 „ 1,3 %	1,074	± 0,0045
40	8,38	900 „	0,95 „ 1,2 %	1,072	± 0,006
40	8,38	1100 „	0,7 „ 0,9 %	1,070	± 0,005
40	8,38	1200 „	0,35 „ 0,8 %	1,067	± 0,003
40	8,38	1300 „	0,30 „ 0,56%	1,066	± 0,0027

Man ersieht aus Fig. 10, dass bei kleiner Entfernung zwischen Photometer und Lichtquelle sich die Curve asymptotisch der *B*-Axe nähert, d. h. der mittlere Fehler erreicht sein Maximum bei sehr kleiner Entfernung des Photometers von der Lichtquelle; entfernt man das Photometer allmählich von der Lichtquelle, so verringert sich der mittlere Fehler bis derselbe bei einer bestimmten Entfernung, die dem Punkt μ resp. μ_1 entspricht ein Minimum (bei einem Abstand von 1300 mm zwischen Photometer und Lichtquelle) erreicht.

Gehen wir jetzt über zu den Beobachtungen, welche bei verschiedenen Helligkeiten angestellt wurden. Analog dem Vorhergehenden lasse ich die Resultate tabellarisch folgen und füge eine graphische Darstellung bei, welche am besten einen Ueberblick über die Abhängigkeit des Fehlers von den Lichtstärken gestattet. In Fig. 11 seien als Abscissen die Lichtstärken in Amylacetatlampen und als Ordinaten die dazu gehörigen Fehler resp. die grössten Abweichungen aufgetragen. Die Entfernung des Photometers von der Lichtquelle betrug 900 mm.

Spannung in Volt	Lichtstärke in Amylacetatlampen	mittl. Fehler in Proc.	grösster Fehler in Proc.	Intensitätsverhältniss	Zahl der Einzeleinstellungen
35	1,7	1.26	1,9	1,21 ± 0,0153	50
40	2,98	2	2,8	1,12 ± 0,024	50
42,5	4,18	1,7	2,7	1,11 ± 0,018	50
45	5,84	1,4	1,9	1,11 ± 0,014	50
47,5	6,15	1,24	1,7	1,10 ± 0,018	50
50,0	8,09	0,3	0,55	1,10 ± 0,0027	50

Aus den Curven geht hervor, dass der Fehler der Messung bei geringen Lichtstärken nicht bedeutend ist; er erreicht etwa bei zwei Amylacetatlampen sein Maximum, fällt dann schnell und erreicht ein Minimum bei etwa 8,3 Amylacetatlampen (entsprechend 50 Volt Spannung an der Glühlampe).

Um zu prüfen, welche Genauigkeit selbst unter den ungünstigsten Bedingungen mit dem Photometer zu erreichen ist, wurden die folgenden Messungen bei starken Abschwächungen einer Lichtquelle durch entsprechende Widerstände in dem Stromkreise derselben angestellt. Folgende Tabelle gibt die Versuchsresultate:

Eingeschalteter Widerstand in Ohm	Mittlerer Fehler in Proc.	grösster Fehler in Proc.	Intensitätsverhältniss	Lichtstärke der abgeschwächten Lampe	Mittlerer Fehler m	Einzeleinstellungen
12,5	0,99	1,6 %	1 : 2,15	4,05	0,0215	50
31,5	1,58	2,2 %	1 : 3,24	2,64	0,0515	—
62,5	1,5	3 %	1 : 6,66	1,3	0,1	—
82,5	1,7	3,1 %	1 : 13,04	0,66	0,221	—

Weitere Versuche wurden durch Abschwächen des Lichtes mit Absorptionsgläsern angestellt. Die Glühlampen hatten die normale Spannung von 50 Volt; das Absorptionsglas wurde auf der linken Seite eingeschaltet.

Die Messung ergab folgendes:

	Extinct. Vermögen	Absorpt. V.
Absorpt.-Gl. I	$\varepsilon = \frac{0,155}{1,07} = 0,145$	0,855
Absorpt.-Gl. II	$\varepsilon = 0,60$	0,40

Die folgenden Zahlen Tab. B geben die Versuchsreihen mit Absorptionsglas II.

Tabelle B.

a	b	J	$M-J=x$	x^2	a	b	J	$M-J=x$	x^2
723	907	1,574	0,018	$0,0_3$ 324	724	906	1,566	0,910	$0,0_3$ 100
30	0	20	36	$0,0_2$1269	9	1	28	28	784
23	7	74	18	$0,0_3$ 324	2	8	82	26	676
8	2	35	21	440	9	1	28	28	784
3	7	74	18	324	2	8	82	26	676
8	2	35	21	441	9	1	28	28	784
2	8	82	26	676	3	7	74	18	324
4	6	43	13	169	8	2	35	21	441
3	7	74	18	224	2	8	82	26	676
4	6	43	13	169	3	7	74	18	324
3	7	74	18	324	30	0	20	36	$0,0_2$1296
7	6	43	13	169	24	6	43	13	$0,0_3$ 169
2	8	82	26	676	1	9	89	33	$0,0_2$1089
8	2	35	21	441	6	4	51	05	$0,0_4$ 25
2	8	82	26	676	8	2	82	26	$0,0_3$ 676
8	2	35	21	441	6	4	57	05	$0,0_4$ 25
4	6	66	10	100	1	9	89	33	$0,0_2$1089
4	6	43	13	169	9	1	28	28	$0,0_3$ 784
4	6	66	10	100	2	8	82	26	$0,0_3$ 676
9	1	28	25	784	7	3	48	13	$0,0_3$ 169
5	5	58	02	007	1	9	89	33	$0,0_2$1089
8	2	35	21	441	6	4	51	05	$0,0_4$ 25

Mittel $M = 1,556$

Die folgende Tabelle gibt das Resultat der Messungen mit Absorptionsgläsern:

	Mittl. Fehler	Mittl. resp. grösst. Fehler in Proc.		Intensitätsverhältniss	Einzeleinstellung	Spannung der Glühlampe
Absorpt.-Gl. I	0,026	1,7	2,5	1 : 6,42	50	50 Volt entspr. 8,2 Amylacetatlampen
Absorpt.-Gl. II	0,022	1,43	1,90	1 : 1,55	—	

Die vorhergehenden Resultate zeigen, dass selbst bei starkem Abschwächen einer Lichtquelle, sei es durch Absorptionsgläser, sei es durch Einschaltung von Widerständen, der procentuale Fehler immer klein bleibt.

Fig. 12 lässt erkennen, bei welchem Intensitätsverhältniss der procentuale Fehler ein Minimum oder ein Maximum erreicht. In Fig. 12 sind als Ordinaten die jeweiligen mitt-

leren resp. maximalen Fehler aufgetragen. Aus den Curven geht hervor, dass der mittlere und maximale Fehler bei grosser Verschiedenheit ($^1/_{13}$) der Intensität der Lichtquellen am grössten ist, dann langsam abnimmt bis er bei einem Intensitätsverhältniss von 1 : 2 sein Minimum erreicht und von hier an wieder langsam steigt, jedoch nicht wieder den vorhergehenden maximalen Werth erreicht. Der verhältnissmässig grössere Fehler bei grosser Verschiedenheit der Helligkeit der Lichtquellen ist durch die Verschiedenheit in der Farbentönung bedingt. Dieser Fehler wird jedoch bei einiger Gewöhnung des Auges an solche Farbendifferenzen auf ein Minimum beschränkt, denn wie das Resultat der Versuche zeigt, resultirt sogar bei einem Verhältniss von 1 : 13 nur ein Fehler von 1,7 Proc. im Mittel.

II. Resultate.

Aus den vorstehenden Versuchen geht hervor:

1. Innerhalb der Grenzen der gewöhnlich in der Praxis zur Verwendung kommenden Entfernungen ergibt sich der mittlere Fehler einer Ablesung bei 50 Einzeleinstellungen und einer Lichtstärke von 8,4 Amylacetatlampen zu 0,3 Proc.; die grösste Abweichung geht nicht über 0,56 Proc. hinaus; bei anderen Entfernungen der Lichtquellen vom Photometer, welche man in der Praxis unter besondern Umständen noch verwenden muss, ergaben sich Fehler der mittleren Einstellung (bei 50 Einzeleinstellungen) von 0,4, 0,7, 0,95 Proc. resp. 0,8, 0,9, 1,3 Proc. für die maximale Abweichung; hier bleibt der mittlere Fehler unter 1 Proc.

2. Beim Abschwächen der Helligkeit der Glühlampen durch Einschalten von Widerständen, d. h. bei Herabminderung der Spannung auf 47,5 bis 45,35 etc. entsprechend einer Lichtstärke von 6,15, 5,9, 4,0 und 1,8 Amylacetatlampen ergab sich der mittlere Fehler zu: 1,24, 1,4, 1,7, 2 Proc. und der grösste Fehler zu: 1,7, 1,9, 2,4, 2,6 Proc.

3. Weitere Versuche mit sehr verschiedenen Helligkeitsunterschieden ($^1/_2$, $^1/_{35}$, $^1/_6$) — und zwar dadurch, dass in den Kreis einer Glühlampe Widerstände eingeschaltet wurden — ergaben im Mittel einen Fehler von 0,99 Proc.; selbst bei einem Helligkeitscontrast der Lampen von 1 : 13 — wo

also die Färbungsunterschiede sehr beträchtlich waren, erreichte der Fehler schon sein Maximum bei 1,7 Proc.

4. Bei den Helligkeitsunterschieden der Lampen ($^1/_3$, $^1/_4$), welche durch Absorptionsgläser, die auf der einen Seite eingeschaltet wurden, hervorgerufen waren, ergab sich im Mittel ein Fehler von nur 1,4 Proc.; bei einem Intensitätsverhältniss von 1 : 6,4 betrug der maximale Fehler nur 1,5 Proc.

Man sieht daraus, dass das Photometer allen Anforderungen entspricht. Dasselbe ist einfach und wohlfeil und leistet sowohl den technischen, wie auch den physikalischen Anforderungen Genüge.

Neben der Art der Registrirung besitzt das Photometer noch die Vortheile leichter Herstellbarkeit, geringer Dimensionen, der Möglichkeit der Drehung des ganzen Apparates (um 180°) um die Horizontalaxe, wodurch die Fehler durch Verschiedenheit der Prismen und Kanten eliminirt werden, bequemer Einstellung und Brauchbarkeit innerhalb weiter Grenzen, sowohl für feine Messungen, als auch für solche in der Praxis.

Es sei mir an dieser Stelle noch gestattet, sowohl meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann als auch den Hrn. Privatdocenten Dr. Ebert und Dr. Knoblauch für freundliche Unterstützung meinen wärmsten Dank auszusprechen.

6. *Zur Theorie magnetooptischer Erscheinungen;* *von P. Drude.*

Neuerdings sind Beobachtungen von Zeemann[1]) über das Kerr'sche magnetooptische Phänomen angestellt, und zwar ausser bei Eisen auch bei Kobalt und Nickel. Da sich Zeemann der Meinung von Goldhammer anschliesst, dass diese Beobachtungen mit meinen früher gegebener Formelsystemen[2]) im Widerspruch ständen, so möchte ich hier kurz die Resultate mittheilen, welche ich bei der Berechnung jener Beobachtungen erhalten habe.

Ich kann leider nur eine einzige Beobachtungsreihe an Kobalt benutzen, da bei den Beobachtungen am Nickelspiegel die Angabe des Einfallswinkels fehlt. — Aber auch ohnehin würden die bei einem einzigen Einfallswinkel angestellten Beobachtungen nur eine wenig ausreichende Prüfung der Theorie bilden. — Die Gesichtspunkte, nach denen weitere Forschung vorzuschreiten hätte, treten aber auch schon an den Beobachtungen am Kobaltspiegel zu Tage.

Zeemann hat für D-Licht folgende Werthe des Haupteinfallswinkels $\bar{\varphi}$ und des Hauptazimuths $\bar{\psi}$ an Kobalt beobachtet:

$$\bar{\varphi} = 75^0\,58', \qquad \bar{\psi} = 29^0\,44'.$$

Ich fand früher[3]) an Kobalt:

$$\bar{\varphi} = 78^0\,5', \qquad \bar{\psi} = 31^0\,40'.$$

Die von mir angewandte Behandlung des Spiegels mit feinem Schmirgel hat Zeemann nicht benutzt, weil der Spiegel zu schlecht zur Beobachtung geworden sei. Es mag dies der Grund dafür sein, dass der von mir beobachtete Werth des Haupteinfallswinkels um mehr als 2^0 höher liegt, als der von

---

1) P. Zeemann, Metingen over het verschijnsel van Kerr. Dissert. Leyden, 1893.

2) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 353. 1892.

3) P. Drude, Wied. Ann. **42.** p. 186. 1891.

Zeemann beobachtete, da Verunreinigung stets in diesem Sinne wirkt.[1]) — Es ist natürlich zur Prüfung der Theorie nicht günstig, wenn der Spiegel merkbare Oberflächenschichten enthält, wofern man dieselben nicht auch theoretisch berücksichtigt. Indess mag dies zunächst unterbleiben, da die Rechnung dadurch weit complicirter, wenn auch wohl durchaus durchführbar, wird.

Aus den Beobachtungen von Zeemann folgt für den Brechungsexponenten n und den Absorptionscoefficienten $n\varkappa$ des Kobalt:

$$n = 2{,}03; \qquad n\varkappa = 3{,}24,$$

dagegen aus meinen Beobachtungen

$$n = 2{,}12; \qquad n\varkappa = 4{,}05.$$

Im Folgenden sind beide Werthsysteme zur Berechnung verwandt, und zwar sind die dabei erhaltenen Resultate durch die unteren Indices Z, resp. D gekennzeichnet.

Im Folgenden ist meine frühere Bezeichnungsweise[2]) angewandt. Dieselbe hängt mit der Zeemann'schen in folgender Weise zusammen (abgesehen vom Vorzeichen):

$$p_r = \psi^m_{la}, \qquad s_r = \psi^m_{ia}, \qquad p_e = \psi^m_{lp}, \qquad s_e = \psi^m_{ip}.$$

$$\gamma_0 = \psi^0_{lp}, \qquad \beta_0 = \psi^0_{ip}, \qquad \gamma = \psi^0_{la}, \qquad \beta = \psi^0_{ia}.$$

Die Beobachtungen Zeemann's beziehen sich auf weisses Licht. Da aber der Unterschied des Kerr'schen Phänomens zwischen D-Licht und weissem Licht bei Eisen unmerklich ist[3]), so kann man wohl auch hier, zumal bei der Unsicherheit des wahren Werthes von $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ bei dem von Zeemann benutzten Spiegel, die angegebenen Zahlen benutzen.

Durch Anwendung der früher von mir angegebenen Formeln[4]) erhält man nun aus den Beobachtungen, welche sich auf sogenannte polare Reflexion beziehen, die Mittelwerthe (falls dabei die Drehung $1' = 1$ gesetzt ist):

$$\left(\frac{b}{\tau}\right)_D = 86{,}7, \qquad \left(\frac{b}{\tau}\right)_Z = 72{,}5.$$

---

1) P. Drude, Wied. Ann. **39.** p. 488. 1890.
2) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 353. 1892.
3) Zeemann, l. c. p. 17.
4) l. c. Formel (69'), (70'), (78'), (79').

Berechnet man mit Hülfe dieser Werthe wiederum rückwärts die Beobachtungen, so ergeben sich folgende Resultate (φ bedeutet den Einfallswinkel):

φ	p_r			s_r			γ_0			γ		
		berechnet			berechnet			berechnet			berechnet	
	beob.	D	Z	beob.	D	Z	beob.	D	Z	beob.	D	Z
45°	+15,0′	+18,7	+18,8	+11,8	+14,4	+13,4	−1,4	−18,0	−16,4	+17,5	+38,6	+37
60°	+19,9	+20,0	+21,0	+12,7	+12,0	+10,7	+3,9	− 2,9	− 1,8	+16,5	+23,3	+23
73°	+18,3	+18,9	+18,4	+11,2	+ 8,2	+ 6,9	+8,7	+ 3,9	+ 4,6	+15,4	+16,6	+16

Wie die Tabelle lehrt, macht es keinen wesentlichen Unterschied, ob man die optischen Constanten n_D, $n\varkappa_D$ oder n_Z, $n\varkappa_Z$ benutzt.

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist gut hinsichtlich der sogenannten Minimumdrehungen p_r und s_r, dagegen nicht gut hinsichtlich der Nulldrehungen. Wenn auch bei letzteren der Beobachtungsfehler weit grösser, als der der ersteren sein wird[1]), so glaube ich doch nicht, dass diese allein die vorhandenen Abweichungen erklären. Dieselben sind nämlich in demselben Sinne, wenn auch in weit geringerem Maasse, bei den Righi'schen Beobachtungen an Stahlspiegeln vorhanden. Diese Abweichungen kennzeichnen sich dadurch, dass γ_0 nach der Theorie bei einem grösseren Einfallswinkel das Zeichen wechselt, als es nach der Beobachtung der Fall ist, und dass die absoluten berechneten Beträge von γ und γ_0 für kleinere Einfallswinkel die beobachteten übertreffen.

Es handelt sich nun darum, ob die gekennzeichneten Abweichungen fortfallen, wenn man mit Goldhammer[2]) zwei magnetooptische Constanten einführt. — Die zur Rechnung zu benutzenden Formeln lassen sich ohne weiteres aus meinen l. c. p. 388 ff. angegebenen Formeln (69), (70), (78), (79) ableiten, wenn man an Stelle der reellen Constanten b/τ setzt: $b\tau + i b'/\tau$.

1) Auf p. 37 gibt Zeemann an, dass an einem Kobaltspiegel (wahrscheinlich durch unrichtige Magnetisirung) die Werthe von ψ^0_{lp} und ψ^0_{ia}, welche sonst einander gleich sind, für $\varphi = 60^0$ bei grünem Licht betragen hätten: $\psi^0_{lp} = 8{,}0'$, $\psi^0_{ia} = 3{,}3'$.

2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 71. 1892.

Legt man nur die Werthe n_Z, $n\varkappa_Z$ der Rechnung zu Grunde, so ergeben sich als Mittelwerthe aus den Beobachtungen:

$$\frac{b}{\tau} = +66{,}2\,; \quad \frac{b'}{\tau} = +19{,}4.$$

Rückwärts berechnen sich die Beobachtungen mit Hülfe dieser Werthe wie folgt:

	p_r		s_r		γ_0		γ	
φ	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
45	15,0	18,8	11,8	14,9	− 1,4	− 2,5	17,5	20,6
60	19,9	19,6	12,7	12,5	+ 3,9	+ 4,7	16,5	14,4
73	18,3	14,7	11,2	8,6	+ 8,7	+ 7,2	15,4	11,5

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist entschieden besser, als ohne Zuhülfenahme von b'/τ; es ist ja auch selbstverständlich, dass mit zwei verfügbaren Constanten die Beobachtungen nie schlechter darstellbar sein können, als mit einer. Speciell ist es jetzt erreicht, dass γ_0 einen Zeichenwechsel erleidet für einen Einfallswinkel, der der Beobachtung entspricht. Jedoch völlig befriedigend ist die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung noch nicht, wie ein Blick auf die Werthe von γ lehrt. Während diese nach der Beobachtung mit Wachsen des Einfallswinkels von 45° auf 73° nur wenig abnehmen, ergibt die Rechnung eine Abnahme auf fast die Hälfte des Werthes bei 45°.

Ich glaube daher, dass diese Beobachtungen noch nicht genügen, um darüber zu entscheiden, ob die Einführung von einer oder von zwei magnetooptischen Constanten nothwendig und hinreichend ist. Erneute Beobachtungen würden sowohl bei möglichst viel verschiedenen Einfallswinkeln anzustellen sein, als auch wäre für möglichste Reinhaltung des Spiegels zu sorgen. Ich glaube in der That, dass entweder durch letzteres, oder durch Beobachtungsfehler die Zahlen Zeemann's etwas entstellt sein müssen. Auffallend ist nämlich, dass Zeemann für s_r keine gleichmässige Annahme bei wachsendem Einfallswinkel beobachtet, während dies nach Righi bei Eisen der Fall ist, und ebenso nach der Theorie (auch der Goldhammer'schen). — Ebenso hat Righi die nach der Rechnung folgende starke Abnahme von γ zwischen 45° und

73° beobachtet bei Eisen, während sie nach Zeemann nur sehr gering ist.

Die Verhältnisse können natürlich bei Kobalt etwas anders liegen, als bei Eisen; indess ist sicher, dass nach jeder Theorie die Nulldrehungen für kleine Einfallswinkel sehr gross werden müssen. Wenn die Erfahrung dem widersprechen sollte, so wäre es das nächste, mathematisch zu discutiren, ob die Anwesenheit von Oberflächenschichten diese Abweichungen erklären kann.

Wahrscheinlich ist dies wohl deshalb, weil bei Stahl, für welchen man leicht einen grossen Werth des Haupteinfallswinkels erreicht, d. h. Oberflächenschichten vermeidet, die Abweichungen zwischen allen bisher angestellten Beobachtungen und meiner Theorie, ausserordentlich gering sind.

Es würde also mit Freude zu begrüssen sein, wenn auch bei Nickel und Kobalt die Beobachtungen in der vollständigen Weise, wie z. B. die Righi'schen Beobachtungen am Stahl, ausgeführt und die Wirkungen von Oberflächenschichten auf diese magnetooptischen Phänomene in experimenteller und mathematischer Hinsicht untersucht würden. Erst dann kann man die Frage entscheiden, ob man zwei magnetooptische Constanten einführen muss, oder mit einer ausreicht.

Bezogen sich die vorigen Auseinandersetzungen auf den Vergleich der Resultate der Goldhammer'schen Theorie und der meinigen mit den citirten Beobachtungen, so möchte ich jetzt noch betreffs der Darstellung der ersteren Theorie einige Bemerkungen äussern, welche sich beziehen auf eine Entgegnung Goldhammer's[1]) gegen meine letzte, die magnetooptischen Erscheinungen betreffende Notiz.[2])

1. Ich vermuthete nicht, dass die 12 Gleichungen der p. 80 der Goldhammer'schen Arbeit (Wied. Ann. 46) durch Druckfehler entstellt waren und nahm daher an, dass Goldhammer die Continuität von U, V, W an Stelle der von U, V, W schliesslich setzte. Nach den Formeln (1) jener Arbeit muss ja nun allerdings bei Stetigkeit von f und V

1) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **48**. p. 740. 1893.
2) P. Drude, Wied. Ann. **48**. p. 122. 1893.

auch Q stetig sein. Die Stetigkeit von f stösst jedoch auf Widersprüche.

Die erste der dortigen Formel (19) ergibt nämlich (vorausgesetzt, dass sie keinen Druckfehler enthält) mit Berücksichtigung von (9):

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathfrak{B}^2 \Delta \mathrm{U} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right),$$

gültig im ganzen Raume. Daraus folgt, dass φ und U Exponentialfunctionen sind, deren Exponenten dieselben (linearen) Functionen der Coordinaten und der Zeit sind. Da nun (nach (10)) $\Delta \varphi = 0$ sein soll, so folgt $\varphi = 0$, folglich nach (18) $f' = 0$, also nach (17) $f = f''$. Da nun f'' unstetig ist, so muss es auch f sein, und daher nach (1) auch Q.

Enthalten dagegen die Formeln (19) den Druckfehler, dass auf ihrer linken Seite U statt U stehen soll, so würde folgen:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial t^2} = \mathfrak{B}^2 \Delta \mathrm{U} + \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right),$$

und zwei analoge Gleichungen. — Mit diesen drei Gleichungen ist aber schon für den Fall magnetisch nicht activer Medien die Stetigkeit an der Grenze von U, V, W und ihrer Derivirten nach x, y, z unvereinbar[1]), eine Thatsache, welche Goldhammer selbst bei Besprechung der electromagnetischen Theorie von Tumlirz erwähnt hat.[2])

2. Den Goldhammer'schen Nachweis, dass meine Formeln (66)[3]) mit den seinigen (30)[4]) identisch seien, halte ich deshalb nicht für richtig, weil bei den von Goldhammer angewandten Substitutionen H_2 an Stelle meines D_1, und H_1 an Stelle meines D_2 zu setzen wäre. Man erkennt dieses durch Berücksichtigung meiner Formeln (16).

Diese Schwierigkeiten vermeidet man, wenn man, wie ich es gethan habe, diejenigen Formeln in beiden Theorien miteinander vergleicht, welche die Amplituden der gebrochenen

---

1) Daher behauptete ich, dass die Grenzbedingungen (1) bis (12) mit (19) in Widerspruch seien, weil ich nicht den von Goldhammer jetzt richtig gestellten Druckfehler vermuthen konnte.

2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **47.** p. 266. 1892.

3) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 387. 1892.

4) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 81. 1892.

Wellen nicht mehr enthalten. Man gelangt dann zu der von mir erwähnten Zeichendifferenz in beiden Theorien. Da diesser Punkt bei der Kleinheit der magnetooptischen Constanten völlig unwesentlich ist, so glaube ich, dass es nicht im Interesse der Leser der „Annalen“ liegt, diese Rechnung in extenso vorzuführen.

Sieht man von dieser unwesentlichen Differenz ab, so gebe ich zu, dass man die Schlussresultate meiner Theorie als (formell) speciellen Fall der Resultate der Goldhammer'schen Theorie ansehen kann. — In formeller Hinsicht scheinen mir jedoch meine Formeln vor denen Goldhammer's den Vorzug einer bequemeren Anwendung auf die Beobachtungen zu besitzen. — Auf die Unterschiede beider Theorien, welche nicht formeller Art sind, will ich nicht eingehen, da sie für die Vorhersagung von Beobachtungen keine Bedeutung besitzen.

Göttingen, 3. Mai 1893.

7. *Bestimmung der Constanten der thermischen Dilatation und des thermischen Druckes für einige quasi-isotrope Metalle; von W. Voigt.*

(Im Auszuge aus den Nachrichten von der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen Nr. 5, 1893 mitgetheilt.)

Die im Folgenden mitgetheilten Messungen bilden ein Glied in einer längeren Reihe von Beobachtungen, deren Ziel ist, *an denselben, möglichst gut definirten Metallstücken eine grössere Anzahl von physikalischen Constanten zu bestimmen.* Nur so gefundene Zahlen können theoretisch verwerthet werden, insbesondere zur Beantwortung der Frage, ob zwischen den auf dieselbe Substanz bezüglichen *verschiedenartigen* Constanten numerische Beziehungen stattfinden.

Die untersuchten Metallstäbe sind dieselben, für welche ich bereits die Constanten der Elasticität und der inneren Reibung mitgetheilt habe[1]), ausgesägt aus vorsichtig gegossenen, im übrigen unbearbeiteten Blöcken. Die Bestimmung ihrer thermischen Dilatation geschah mit Hülfe des früher beschriebenen Apparates[2]), der schon zur Beobachtung einiger Krystalle gedient hat. Ich wiederhole hier nur kurz sein Constructionsprincip.

An der Wand des Beobachtungsraumes ist ein Gestell befestigt, welches eine vertical herabhängende messingene Schiene trägt. Das untere Ende des zu untersuchenden Stäbchens wird mittels einer feinen Körnervertiefung auf eine Messingspitze aufgelegt, welche sich am untersten Theile der Schiene befindet; auf dem oberen Ende des Stäbchens liegt in einer ähnlichen Vertiefung eine kleine Wippe, die ihren zweiten Stützpunkt an der Schiene hat und einen vertical gestellten Spiegel trägt. In demselben wird mit einem Fernrohr eine entfernte vertical aufgestellte Scala beobachtet. Ein zweiter, an der

---

1) Vgl. W. Voigt, Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. **38.** 1892, und Wied. Ann. **47.** p. 671. 1892; **48.** p. 674. 1893.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **43.** p. 831. 1891.

Schiene selbst befestigter Spiegel gestattet, etwaige Veränderungen in deren Stellung in Rechnung zu ziehen.

Besteht Stab und Schiene aus verschiedener Substanz, so ändert sich die Neigung des beweglichen Spiegels mit der Temperatur; und zwar wird die einer Temperaturdifferenz ϑ entsprechende Verschiebung σ der von unten nach oben numerirten Millimeterscala im Fernrohr gegeben sein durch

$$\sigma = \frac{2\,L\,E}{H}(\alpha - \alpha_m)\,\vartheta = \beta\,\vartheta, \tag{1}$$

falls L die Länge des Stabes, H den Hebelarm der Wippe, E die Entfernung der Scala vom Fernrohr, α den thermischen Dilatationscoefficienten des Stabes, α_m denjenigen der Messingschiene bezeichnet.

Die Beobachtungstemperatur wurde dadurch geändert, dass der ganze Apparat mit der Wippe bis hart unter den beweglichen Spiegel abwechselnd in ein kaltes und ein warmes Bad von Paraffinöl getaucht wurde; diese Bäder konnten, ohne den Apparat zu erschüttern, durch eine geeignete mechanische Vorrichtung — einen auf Rollen längs der Wand vertical verschiebbaren Schlitten — von unten her dem Apparat entgegengehoben und in der gewünschten Lage durch ein Gegengewicht festgehalten werden. Die Flüssigkeit wurde durch Turbinenrührer in mässiger Circulation erhalten; da das kältere Bad meist eine nur wenig tiefere Temperatur besass, als die Luft des Beobachtungsraumes, das wärmere sich über einer kleinen Gasflamme befand, ausserdem die kupfernen Gefässe mit Filz überzogen waren, so gelang es leicht, die Temperaturen längere Zeit bis auf 0,1° C. constant zu halten. Eine grössere Genauigkeit war nicht nöthig, weil sich bald zeigte, dass die verschiedenen Stäbe aus derselben Substanz keineswegs sehr genau übereinstimmendes Verhalten zeigten, die ganze Bestimmung also nur mässig genaue Werthe liefern konnte. Aus demselben Grunde ist die Untersuchung der Abhängigkeit der thermischen Dilatation von der Temperatur weniger ausführlich behandelt und theilweise ganz unterblieben.

Bezüglich der Berechnung sei bemerkt, dass, wenn man den Dilatationscoefficienten als lineäre Function der Temperatur ansetzt, was innerhalb des benutzten mässigen Bereiches zulässig ist, der einem Temperaturzuwachs $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ ent-

sprechende Zuwachs l der Stablänge direct den Werth des Dilatationscoefficienten α für die mittlere Temperatur $\vartheta_m = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ bestimmt; denn aus

$$l = L_2 - L_1 = L_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \alpha(\vartheta)\, d\vartheta = L_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (\alpha_0 + \alpha_1 \vartheta)\, d\vartheta,$$

$$= L_0 \left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right)(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

folgt

$$(2) \qquad \frac{l}{L_0 \vartheta} = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} = \alpha(\vartheta_m).$$

Die Vortheile des Apparates gegenüber dem bekannten sinnreichen von Fizeau liegen vor allen Dingen in der Benutzung von zwei Flüssigkeitsbädern, die sich leicht auswechseln lassen und dadurch eine schnelle Veränderung der Temperatur erlauben, auch mehr Garantie für eine zuverlässige Temperaturbestimmung bezüglich des untersuchten Körpers bieten, als Luftbäder; ferner in der Anwendung der Ablesung an einer Scala gegenüber der mühsamen dauernden Abzählung der wandernden Interferenzstreifen. Gegenüber dem dilatometrischen Verfahren, bei dem die gesuchte Grösse durch die Differenz zweier wenig verschiedener Ablesungen bestimmt wird, bietet die benutzte Methode eine grössere Sicherheit.[1])

Zum Graduiren des Apparates diente die Beobachtung eines schönen, von Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Bad Homburg hergestellten Stabes von Bergkrystall, parallel der krystallographischen Hauptaxe orientirt, von ca. 11 cm Länge.

Die mit ihm erhaltenen Ablesungen sind so mitgetheilt, dass in der ersten Columne die Temperaturänderung ϑ, in der zweiten die ihr entsprechende beobachtete Verschiebung σ der Scala im Fernrohr aufgeführt ist, in der dritten deren berechneter Werth σ_b, der mit Hülfe des aus allen Messungen einer Reihe bestimmten $\beta = \sigma / \vartheta$ erhalten ist. ϑ_m ist, wie oben, die mittlere Temperatur, d. h. das arithmetische Mittel der erreichten Grenztemperaturen. Zur Be-

1) Hervorzuheben ist die Bequemlichkeit und der im Verhältniss zu den guten Leistungen niedrige Preis des Apparates, die ihn als Uebungsgegenstand für das Laboratorium sehr empfehlen. Die Unsicherheit der für einen und denselben Stab gefundenen Werthe α beträgt nur einige pro Mille.

stimmung der Temperaturen diente ein Geissler'sches Normalthermometer, dessen Theilung innerhalb des benutzten Temperaturintervalles und bei der gebrauchten Anordnung um den 0,0089ten Theil zu gross war; die deswegen nothwendige Correction ist aber nicht an den einzelnen Beobachtungen, sondern erst an den Endresultaten angebracht.

Quarz $L = 10{,}98$.

$\vartheta = +\ 53{,}9$	$\sigma = -\ 12{,}94$	$\sigma_b = 12{,}76$
$-\ 53{,}4$	$+\ 12{,}50$	$12{,}63$
$+\ 53{,}6$	$-\ 12{,}50$	$12{,}66$
$-\ 53{,}2$	$+\ 12{,}48$	$12{,}55$
$+\ 53{,}7$	$-\ 12{,}82$	$12{,}70$
$\vartheta = +\ 56{,}9$	$\sigma = -\ 13{,}51$	$\sigma_b = 13{,}45$
$-\ 56{,}1$	$+\ 13{,}11$	$13{,}26$
$+\ 58{,}2$	$-\ 13{,}84$	$13{,}76$
$-\ 57{,}5$	$+\ 13{,}82$	$13{,}60$

$\beta = -\ 0{,}2366, \quad \vartheta_m = 38{,}2.$

Die einzelnen Beobachtungen dieser Reihe stimmen unter sich zwar weniger gut, aber durch die grosse Zahl der Messungen erhält das Endresultat doch eine ziemlich bedeutende Sicherheit.

$\vartheta = +\ 32{,}35$	$\sigma = -\ 7{,}40$	$\sigma_b = 7{,}45$
$-\ 32{,}30$	$+\ 7{,}41$	$7{,}44$
$+\ 28{,}00$	$-\ 6{,}47$	$6{,}45$
$-\ 27{,}85$	$+\ 6{,}42$	$6{,}42$

$\beta = 0{,}2303, \quad \vartheta_m = 26{,}1.$

$\vartheta = +\ 26{,}0$	$\sigma = -\ 5{,}96$	$\sigma_b = 5{,}84$
$-\ 34{,}0$	$+\ 7{,}55$	$7{,}64$
$+\ 28{,}0$	$-\ 6{,}43$	$6{,}29$
$-\ 27{,}7$	$+\ 6{,}12$	$6{,}22$
$+\ 26{,}5$	$-\ 5{,}90$	$5{,}95$

$\beta = -\ 0{,}2247, \quad \vartheta_m = 14{,}1.$

Macht man für β den Ansatz

$$\beta = \beta_0 + \beta_1\, \vartheta_m,$$

so findet sich

$$\beta_0 = -\ 0{,}2176, \quad \beta_1 = -\ 0{,}000492$$

und folgende Vergleichung

beobachtet	0,2366	0,2303	0,2247
berechnet	0,2365	0,2305	0,2246

Nach Anbringung der Thermometercorrection werden diese Resultate

$$\beta_0 = -\ 0{,}2157, \quad \beta_1 = -\ 0{,}000488.$$

Nun ist nach (1) der Ausdehnungscoefficient der Messingschiene gegeben durch

$$\alpha_m = \alpha_q - \beta \frac{H}{2 L E}, \tag{3}$$

falls α_q den linearen Ausdehnungscoefficienten des Quarzes parallel der Hauptaxe bezeichnet. Benutzt man, dass bei dem angewandten Apparate

$$H = 0,622, \quad E = 591,5$$

war, und dass die neuesten Beobachtungen von Benoît[1])

$$\alpha_q = (7,111 + 0,01712\,\vartheta_m)\,10^{-6}$$

ergeben haben, so erhält man als die Constante des Apparates

$$\alpha_m = (17,44 + 0,0405\,\vartheta_m)\,10^{-6},$$

oder, wenn man die Temperatur 30° C. zu Grunde legt, um nicht den Fundamentalwerth durch Extrapolation zu gewinnen, und beachtet, dass dies α_m, wie oben gezeigt, den linearen thermischen Ausdehnungscoefficienten bei der Temperatur $\Theta = \vartheta_m$ angibt:

$$\alpha_m = \big(18,65 + 0,0405\;(\Theta - 30)\big)\,.\,10^{-6}.$$

Mit dieser Zahl sind die mit den Metallen angestellten Beobachtungen berechnet, von denen ich hier nur die Endresultate angebe, indem ich bezüglich der Einzelheiten auf den ersten Abdruck dieser Untersuchung verweise.

Allgemein bemerke ich, dass die Uebereinstimmung sowohl der direct beobachteten σ mit den berechneten σ_b bei *demselben* Stab, als auch die der schliesslich folgenden Ausdehnungscoefficienten α für *verschiedene* Stäbe derselben Substanz bei den verschiedenen Metallen ziemlich verschieden ausgefallen ist.

Die Differenzen zwischen den σ und den σ_b rühren zum Theil von Erschütterungen des Apparates durch an dem leider ungünstig gelegenen Beobachtungsraume mitunter nahe vorbeifahrende Lastwagen her, zum Theil aber unzweifelhaft von einer Art thermischer Nachwirkung, die einen *absolut* stationären Zustand auch nach stundenlangem Verweilen in derselben Temperatur nicht eintreten liess; letztere war bei den

---

1) J. R. Benoît, Trav. et Mém. bur. intern. **6.** p. 119, 121. 1888.

stark ductilen Metallen (Kadmium, Silber, Zinn u. dgl.) am stärksten, diese gaben daher mitunter auch bedeutendere Werthe der Differenzen $\sigma - \sigma_b$.

Die Abweichung der Endwerthe α für verschiedene Stäbe desselben Materials scheint einerseits eine Folge der mangelhaften Isotropie, andererseits die Wirkung der verschiedenen mechanischen Einwirkung bei der Herstellung der Stäbe zu sein. In der That sind dieselben bei den grobkrystallinischen und den stark ductilen Metallen im allgemeinen am grössten.

Bei den Ablesungen hat Hr. Drude mir treulich geholfen.

Aluminium.[1])

Nr. 1.	β[2]) = + 0,1000,	ϑ_m = 31,1,	L = 11,10,	α = **23,40** . 10^{-6}.
„ 2.	β = + 0,0939,	ϑ_m = 38,9,	L = 11,09,	α = **23,66** . 10^{-6}.
„ 5.	β = + 0,0947,	ϑ_m = 44,0,	L = 11,03,	α = **23,69** . 10^{-6}.
„ 6.	β = + 0,0951,	ϑ_m = 38,0,	L = 11,06,	α = **23,46** . 10^{-6}.
„ 5.	β = + 0,0877,	ϑ_m = 13,6,	L = 11,03,	α = **22,13** . 10^{-6}.
„ 6.	β = + 0,0855,	ϑ_m = 15,4,	L = 11,06,	α = **22,09** . 10^{-6}.

Hieraus folgt als definitiver Werth

$$\alpha = (23,06 + 0,061\ (\Theta - 30)) . 10^{-6},$$

und daraus die Zusammenstellung:

beob.	23,40	23,66	23,69	23,46	22,13	22,09
ber.	23,12	23,61	23,92	23,55	22,06	22,16

Diese Zahlen stimmen weniger genau, als einige der folgenden Reihen; da aber die Vergleichung der einzelnen σ und σ_b nur geringe Differenzen gab, so ist die Ursache der Abweichungen nicht in den Beobachtungen, sondern in dem Material zu suchen.

Bronze.

Nr. 8.	β = − 0,0173,	ϑ_m = 37,4,	L = 10,95,	α = **18,13** . 10^{-6}.
„ 14.	β = − 0,0173,	ϑ_m = 40,3,	L = 10,96,	α = **18,25** . 10^{-6}.
„ 14.	β = − 0,0215,	ϑ_m = 18,5,	L = 10,96,	α = **17,17** . 10^{-6}.

Hieraus folgt

$$\alpha = (17,75 + 0,0503\ (\Theta - 30)) . 10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	18,13	18,25	17,17
ber.	18,12	18,27	17,17

1) Wegen der genaueren Charakterisirung der untersuchten Metalle sei verwiesen auf Wied. Ann. 48. p. 675. 1893.

2) Die angegebenen Werthe β sind noch mit dem Thermometerfehler behaftet, die α hingegen corrigirt.

Kadmium.

Nr. 2.	$\beta = +0{,}110$,	$\vartheta_m = 43{,}0$,	$L = 10{,}98$,	$\alpha = \mathbf{24{,}4 \cdot 10^{-6}}$.
„ 4.	$\beta = +0{,}132$,	$\vartheta_m = 41{,}0$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{25{,}3 \cdot 10^{-6}}$.
„ 4.	$\beta = +0{,}131$,	$\vartheta_m = 18{,}3$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{24{,}4 \cdot 10^{-6}}$.

Die Abhängigkeit des Dilatationscoefficienten von der Temperatur versteckt sich hier unter den Beobachtungsfehlern; wir setzen für 30° als angenähert richtig

$$\alpha = \mathbf{24{,}7 \cdot 10^{-6}}.$$

Eisen.

Nr. 1.	$\beta = -0{,}139$,	$\vartheta_m = 35{,}9$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{12{,}16 \cdot 10^{-6}}$.
„ 2.	$\beta = -0{,}157$,	$\vartheta_m = 39{,}6$,	$L = 11{,}14$,	$\alpha = \mathbf{11{,}69 \cdot 10^{-6}}$.
„ 5.	$\beta = -0{,}147$,	$\vartheta_m = 36{,}5$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{11{,}97 \cdot 10^{-6}}$.
„ 6.	$\beta = -0{,}148$,	$\vartheta_m = 38{,}0$,	$L = 11{,}00$,	$\alpha = \mathbf{11{,}92 \cdot 10^{-6}}$.
„ 5.	$\beta = -0{,}1526$,	$\vartheta_m = 15{,}5$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{10{,}85 \cdot 10^{-6}}$.
„ 6.	$\beta = -0{,}1507$,	$\vartheta_m = 16{,}0$,	$L = 11{,}00$,	$\alpha = \mathbf{10{,}95 \cdot 10^{-6}}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (\mathbf{11{,}58 + 0{,}048\ (\Theta - 30)}) \cdot \mathbf{10^{-6}},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	12,16	11,69	11,97	11,93	10,85	10,95
ber.	11,86	12,04	11,89	11,96	10,89	10,91

Die Uebereinstimmung ist recht befriedigend, obgleich das benutzte Eisen nicht eben feinkörnig war.

Gold.

Nr. 1.	$\beta = -0{,}0965$,	$\vartheta_m = 35{,}6$,	$L = 10{,}90$,	$\alpha = \mathbf{14{,}26 \cdot 10^{-6}}$.
„ 2.	$\beta = -0{,}0952$,	$\vartheta_m = 33{,}4$,	$L = 10{,}90$,	$\alpha = \mathbf{14{,}24 \cdot 10^{-6}}$.
„ 1.	$\beta = -0{,}0927$,	$\vartheta_m = 15{,}6$,	$L = 10{,}90$,	$\alpha = \mathbf{13{,}64 \cdot 10^{-6}}$.
„ 2.	$\beta = -0{,}0863$,	$\vartheta_m = 15{,}8$,	$L = 10{,}90$,	$\alpha = \mathbf{13{,}95 \cdot 10^{-6}}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (\mathbf{14{,}14 + 0{,}0239\ (\Theta - 30)}) \cdot \mathbf{10^{-6}},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	14,26	14,24	13,64	13,95
ber.	14,27	14,22	13,80	13,80

Kupfer.

Nr. 1.	$\beta = -0{,}034$,	$\vartheta_m = 39{,}1$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{17{,}41 \cdot 10^{-6}}$.
„ 2.	$\beta = -0{,}035$,	$\vartheta_m = 38{,}3$,	$L = 11{,}03$,	$\alpha = \mathbf{17{,}33 \cdot 10^{-6}}$.
„ 5.	$\beta = -0{,}033$,	$\vartheta_m = 35{,}0$,	$L = 11{,}00$,	$\alpha = \mathbf{17{,}29 \cdot 10^{-6}}$.
„ 6.	$\beta = -0{,}031$,	$\vartheta_m = 36{,}0$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{17{,}43 \cdot 10^{-6}}$.
„ 5.	$\beta = -0{,}0345$,	$\vartheta_m = 15{,}5$,	$L = 11{,}00$,	$\alpha = \mathbf{16{,}43 \cdot 10^{-6}}$.
„ 6.	$\beta = -0{,}0315$,	$\vartheta_m = 12{,}2$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{16{,}44 \cdot 70^{-6}}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (\mathbf{17.09 + 0.0404\ (\Theta - 30)}) \cdot \mathbf{10^{-6}},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	17,41	17,33	17,29	17,43	16,43	16,44
ber.	17,46	17,43	17,29	17,38	16,50	16,37

Die Uebereinstimmung ist sehr befriedigend.

Magnesium.

Nr. 2. $\beta = +0{,}0159$, $\vartheta_m = 32{,}3$, $L = 11{,}03$, $\alpha = \mathbf{26{,}26}\,.\,10^{-6}$.
„ 5. $\beta = +0{,}162$, $\vartheta_m = 40{,}0$, $L = 11{,}00$, $\alpha = \mathbf{26{,}73}\,.\,10^{-6}$.
„ 6. $\beta = +0{,}156$, $\vartheta_m = 33{,}0$, $L = 11{,}02$, $\alpha = \mathbf{26{,}15}\,.\,10^{-6}$.
„ 5. $\beta = +0{,}1496$, $\vartheta_m = 15{,}4$, $L = 11{,}00$, $\alpha = \mathbf{25{,}15}\,.\,10^{-6}$.
„ 6. $\beta = +0{,}149$, $\vartheta_m = 16{,}5$, $L = 11{,}02$, $\alpha = \mathbf{25{,}16}\,.\,10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (26{,}05 + 0{,}064\,(\Theta - 30))\,.\,10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	26,26	26,73	26,15	25,15	25,16
ber.	26,20	26,69	26,24	25,12	25,19

Die Uebereinstimmung ist trotz der Weichheit des Materials sehr gut.

Nickel.

Nr. 2. $\beta = -0{,}115$, $\vartheta_m = 32{,}0$, $L = 11{,}07$, $\alpha = \mathbf{13{,}32}\,.\,10^{-6}$.
„ 3. $\beta = -0{,}117$, $\vartheta_m = 38{,}7$, $L = 11{,}04$, $\alpha = \mathbf{13{,}48}\,.\,10^{-6}$.
„ 4. $\beta = -0{,}120$, $\vartheta_m = 46{,}5$, $L = 11{,}08$, $\alpha = \mathbf{13{,}68}\,.\,10^{-6}$.
„ 5. $\beta = -0{,}114$, $\vartheta_m = 34{,}0$, $L = 11{,}01$, $\alpha = \mathbf{13{,}42}\,.\,10^{-6}$.
„ 5. $\beta = -0{,}1160$, $\vartheta_m = 14{,}3$, $L = 11{,}01$, $\alpha = \mathbf{12{,}53}\,.\,10^{-6}$.
„ 6. $\beta = -0{,}1170$, $\vartheta_m = 15{.}5$, $L = 11{,}00$, $\alpha = \mathbf{12{,}53}\,.\,10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (13{.}15 + 0{.}0413\,(\Theta - 30))\,.\,10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	13,48	13,68	13,42	13,32	12,53	12,53
ber.	13,51	13,83	13,31	13,23	12,50	12,55

Silber.

Nr. 1. $\beta = +0.0105$, $\vartheta_m = 40{,}6$, $L = 11{,}03$, $\alpha = \mathbf{19{,}58}\,.\,10^{-6}$.
„ 2. $\beta = +0{,}013$, $\vartheta_m = 33{,}8$, $L = 11{,}04$, $\alpha = \mathbf{19{,}42}\,.\,10^{-6}$.
„ 5. $\beta = +0{,}0145$, $\vartheta_m = 35{,}0$, $L = 11{,}04$, $\alpha = \mathbf{19{,}66}\,.\,10^{-6}$.
„ 6. $\beta = +0{,}0135$, $\vartheta_m = 31{,}9$, $L = 11{,}03$, $\alpha = \mathbf{19{,}37}\,.\,10^{-6}$.
„ 5. $\beta = +0{,}0145$, $\vartheta_m = 15{,}7$, $L = 11{,}04$, $\alpha = \mathbf{18{,}76}\,.\,19^{-6}$.
„ 6. $\beta = +0{,}0091$, $\vartheta_m = 15{,}7$, $L = 11{,}03$, $\alpha = \mathbf{18{,}51}\,.\,10^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = (19{,}25 + 0{,}043\,(\Theta - 30))\,.\,10^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	19,58	19,42	19,66	19,37	18,76	18,51
ber.	19,71	19,41	19,60	19,38	18,63	18,63

Die Uebereinstimmung ist im ganzen recht gut.

Stahl ($L\,S\,84\,R$).

Nr. 1.	$\beta = -0{,}156$,	$\vartheta_m = 35{,}7$,	$L = 11{,}09$,	$\alpha = \mathbf{11{,}55} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 2.	$\beta = -0{,}150$,	$\vartheta_m = 35{,}0$,	$L = 11{,}10$,	$\alpha = \mathbf{11{,}82} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 5.	$\beta = -0{,}149$,	$\vartheta_m = 35{,}2$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{11{,}81} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 6.	$\beta = -0{,}149$,	$\vartheta_m = 36{,}7$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{11{,}87} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 5.	$\beta = -0{,}1532$,	$\vartheta_m = 16{,}2$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{10{,}85} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 6.	$\beta = -0{,}1577$,	$\vartheta_m = 15{,}2$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{10{,}60} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.

Hieraus ergibt sich

$$\alpha = \left(\mathbf{11{,}47} + \mathbf{0{,}0519}\ (\Theta - \mathbf{30})\right).\mathbf{10}^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	11,55	11,82	11,81	11,87	10,85	10,60
ber.	11,77	11,73	11,74	11,82	10,75	10,70

Die Uebereinstimmung ist ziemlich bedeutend.

Stahl ($L\,S\,84\,E$).

Nr. 3.	$\beta = -0{,}154$,	$\vartheta_m = 36{,}1$,	$L = 11{,}03$,	$\alpha = \mathbf{11{,}62} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 4.	$\beta = -0{,}152$,	$\vartheta_m = 39{,}6$,	$L = 11{,}05$,	$\alpha = \mathbf{11{,}87} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.

Die Beobachtungen sind nicht weiter geführt, weil nach den vorstehenden Zahlen offenbar diese Stahlsorte sich nicht merklich anders verhält, als die vorige.

Wismuth.

Nr. 1.	$\beta = -0{,}106$,	$\vartheta_m = 35{,}0$,	$L = 10{,}95$,	$\alpha = \mathbf{13{,}82} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 2.	$\beta = -0{,}102$,	$\vartheta_m = 36{,}0$,	$L = 11{,}00$,	$\alpha = \mathbf{14{,}07} \,.\, \mathbf{10}$.
„ 3.	$\beta = -0{,}1085$,	$\vartheta_m = 15{,}8$,	$L = 11{,}00$,	$\alpha = \mathbf{12{,}93} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.

Hieraus folgt

$$\alpha = \left(\mathbf{13{,}67} + \mathbf{0{,}052}\ (\Theta - \mathbf{30})\right).\mathbf{10}^{-6},$$

und die Zusammenstellung:

beob.	13,82	14,07	12,93
ber.	13,93	13,98	12,93

Zink.

Nr. 1.	$\beta = +0{,}118$,	$L = 11{,}02$,	$\alpha = \mathbf{24{,}2} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 2.	$\beta = +0{,}136$,	$L = 11{,}01$,	$\alpha = \mathbf{25{,}1} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 3.	$\beta = +0{,}182$,	$L = 10{,}92$,	$\alpha = \mathbf{27{,}3} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.
„ 4.	$\beta = +0{,}109$,	$L = 10{,}57$,	$\alpha = \mathbf{24{,}0} \,.\, \mathbf{10}^{-6}$.

Die enorme Verschiedenheit der gefundenen Werthe dürfte sich hier wohl am natürlichsten durch das sehr grobe krystallinische Korn des benutzten Zinkes erklären und würde dann auf eine starke Abhängigkeit der thermischen Dilatation von der Richtung gegen die Krystallaxen deuten. Die Abhängigkeit derselben von der Temperatur zu untersuchen, hatte

unter diesen Umständen keinen Zweck; eben deshalb sind die Werthe α auch statt für die wirklichen ϑ_m, welche um 36° lagen, sogleich für den Normalwerth 30° berechnet; man wird

$$\alpha = 25{,}1 \,.\, 10^{-6}$$

als einen angenäherten Werth benutzen können.

Zinn.

Nr. 1.	$\beta = +\,0{,}066$,	$L = 10{,}95$,	$\alpha = 21{,}8 \,.\, 10^{-6}$.
„ 2.	$\beta = +\,0{,}105$,	$L = 10{,}94$,	$\alpha = 23{,}6 \,.\, 10^{-6}$.
„ 5.	$\beta = +\,0{,}073$,	$L = 10{,}54$,	$\alpha = 22{,}1 \,.\, 10^{-6}$.
„ 7.	$\beta = +\,0{,}059$,	$L = 10{,}93$,	$\alpha = 21{,}5 \,.\, 10^{-6}$.

Von diesen Zahlen gilt dasselbe, wie von den für Zink erhaltenen; die Abweichungen dürften hier aber durch die mechanische Bearbeitung der Stäbe bedingt sein. Der Mittelwerth

$$\alpha = 22{,}2 \,.\, 10^{-6}$$

wird für $\Theta = 30^0$ als angenähert richtig angenommen werden können.

Die vorstehend bestimmten thermischen Dilatationscoefficienten können nun in Verbindung mit den früher erhaltenen Elasticitätsmoduln[1]) dazu benutzt werden, die wichtigen *Constanten des thermischen Druckes* für die untersuchten Körper zu berechnen.

Die thermischen Drucke sind die Ergänzungen, welche zu den gewöhnlichen elastischen Drucken $X_x \ldots X_y$ hinzukommen, wenn die Temperatur variirt wird. Beschränkt man sich auf *kleine* Temperaturänderungen, so kann man sie mit denselben proportional setzen, also für isotrope Körper die *gesammten* Drucke $\Xi_x \ldots \Xi_y$ schreiben:

$$(4) \quad \begin{cases} -\Xi_x = -(X_x + q\vartheta) = c\,x_x + c_1 y_y + c_1 z_z - q\vartheta \\ -H_y = -(Y_y + q\vartheta) = c_1 x_x + c\,z_y + c_1 z_z - q\vartheta \\ -Z_z = -(Z_z + q\vartheta) = c_1 x_x + c_1 y_y + c\,z_z - q\vartheta \end{cases}$$

aber

$$-H_z = -Y_z = \frac{c - c_1}{2} y_z, \qquad -Z_x = -Z_x = \frac{c - c_1}{2} z_x,$$

$$-\Xi_y = -X_y = \frac{c - c_1}{2} x_y,$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 706. 1893.

woraus folgt:

$$(5)\quad \begin{cases} -x_x = s\,\Xi_x + s_1 H_y + s_1 Z_z - \alpha\vartheta, \\ -y_y = s_1 \Xi_x + s\,H_y + s_1 Z_z - \alpha\vartheta, \\ -z_z = s_1 \Xi_x + s_1 H_y + s\,Z_z - \alpha\vartheta, \\ -y_z = 2(s-s_1)H_z, \quad -z_z = 2(s-{}_1)Z_x, \quad -x_y = 2(s-s_1)\Xi_y, \end{cases}$$

und zwischen α und q der Zusammenhang besteht:

$$(6)\qquad q = \alpha(c + 2c_1), \quad q(s + 2s_1) = \alpha.$$

Ist der Körper keinen äusseren Kräften, sondern nur einer constanten Temperaturänderung ϑ ausgesetzt, so wird

$$x_x = y_y = z_z = \alpha\vartheta,$$

α ist also der lineäre, 3α der kubische thermische Dilatationscoefficient; es hat keine Schwierigkeit, denselben mit der Temperatur variirend zu denken.

Nach Formel (6) kann der Coefficient q des thermischen Druckes aus den Constanten α der thermischen Dilatation und dem Compressionsmodul $s_3 = 3(s + 2s_1)$ berechnet werden.

Die Bedeutung von q wird am anschaulichsten, wenn man die äusseren Kräfte bestimmt, welche nöthig sind, um bei einer Temperaturänderung die Dimensionen des Körpers ungeändert zu erhalten. Dies geschieht nach (5) durch einen äusseren normalen Druck p, dessen Grösse ist:

$$p = \frac{\alpha\vartheta}{s + 2s_1} = q\vartheta.$$

$1/3(s + 2s_1) = K$ ist der *„Compressionswiderstand“* identisch mit der sonst wohl „Elasticitätsmodul“ genannten Grösse.

Fragt man nach dem Druck p' auf die Grundflächen, der erforderlich ist, um bei einem Cylinder die Länge trotz erlittener Temperaturänderung ungeändert zu erhalten, so findet man ähnlich:

$$p' = \frac{\alpha}{s}\vartheta = q'\vartheta.$$

$1/s = E$ ist der *„Dehnungswiderstand“*, welcher sonst auch „Elasticitätscoefficient“ genannt wird.

Beide Constanten q und q' haben ein praktisches Interesse, da sie, wie man sagt, die Kraft messen, mit welcher ein beliebiger Körper nach allen Seiten oder ein Cylinder nach

der Axe bei wachsender Temperatur sich auszudehnen strebt. Ihre Zahlenwerthe, nebst denen von K und E, gibt die folgende Tabelle, und zwar der Anschaulichkeit halber in Grammen als Kraft- und Millimetern als Längeneinheiten; zu Grunde gelegt ist der Werth von α für die Temperatur von 30°.

	$\alpha_{30} . 10^{+6}$	$K . 10^{-6}$	q	$E . 10^{-6}$	q'
Al	23,06	4,83	384	6,57	151
Br[1])	17,75	8,94	476	10,6	188
Cd	24,7	?	?	7,07	174
Fe	11,58	7,90	275	12,8	148
Au	14,14	7,47	317	7,58	107
Cu	17,09	4,95	252	10,85	185
Mg	26,05	2,80	219	4,26	111
Me[2])	18,65	6,10	341	9,22	172
Ni	13,15	17,00	672	20,3	267
Ag	19,25	7,08	409	7,79	150
St[3])	11,47	14,6	502	20,4	234
Bi	13,67	2,50	102	3,19	44
Zn	25,1	10,1	760	10,3	259
Sn	22,2	?	?	5,41	120

Zu dieser Tabelle ist zu bemerken, dass die Constante K nicht direct beobachtet ist, sondern sich aus den Resultaten der Biegungs- und Drillungsversuche ziemlich ungenau bestimmt.

Da der Druck von einer Atmosphäre nahe 10 g pro Quadratmillimeter beträgt, so kann man q und q' durch Division mit 10 sogleich angenähert auf Atmosphären reduciren.

Die erhaltenen Werthe von q und q' variiren in ziemlich weiten Grenzen; merkwürdig sind die extremen Stellen, die von Wismuth einerseits, von Zink andererseits eingenommen werden. Stahl liefert keineswegs die grössten thermischen Drucke, sondern wird hierin, ausser von Zink, auch von Nickel übertroffen.

Göttingen, Februar 1893.

1) Bronze. 2) Messing. 3) Stahl.

8. *Die specifischen Wärmen c_p und c_v einiger quasi-isotroper Metalle; von W. Voigt.*

(Aus den Nachr. von der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Nr. 6, 1893.)

Die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen bilden die Fortsetzung der früher veröffentlichten Untersuchungen [1]), welche den Zweck haben, für gewisse leidlich gut definirte Substanzen eine möglichst grosse Zahl physikalischer Constanten zu gewinnen.

Die specifischen Wärmen c_p bei constantem Druck wurden nach der *Mischungsmethode* bestimmt. Das aus dünnem Kupferblech gefertigte Calorimeter war an gespannten Seidenfäden aufgehängt und mit einem Kupfermantel umgeben, um den Wärmeaustausch mit der Umgebung möglichst zu verringern; ein kleiner Turbinenrührer erhielt die Calorimeterflüssigkeit in lebhafter Circulation. Infolge dessen geschah der Ausgleich der Temperatur zwischen dem eingeworfenen Körper und der Flüssigkeit ausserordentlich schnell und fast ohne Nebenverlust, und dieser Umstand dispensirte von der Anwendung der strengen Theorie, die man Hrn. F. Neumann [2]) verdankt. Es genügte vollständig das folgende angenäherte Verfahren.

Die Anfangstemperatur der Calorimeterflüssigkeit wurde ein wenig unterhalb der Temperatur des Beobachtungsraumes gebracht, sodass nach Einführung des untersuchten Körpers die Temperatur des Calorimeters ein Maximum etwas oberhalb der Temperatur der Umgebung erreichte und dann allmählich fiel.

Das Maximum würde etwas höher gewesen sein, wenn gar keine Wärmeabgabe an die Umgebung stattgefunden hätte; es war also wegen dieses Umstandes zu corrigiren, durch Zufügung desjenigen Temperaturfalles, welchen das Calorimeter erlitten haben würde, wenn man es die Zeit hindurch, welche

1) W. Voigt, Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Göttingen **38.** 1892; Wied. Ann. **47.** p. 671. 1892; **48.** p. 674. 1893; **49.** p. 396. 1893.

2) Vgl. Pape, Pogg. Ann. **120.** p. 337. 1863.

die Erreichung des Maximums erforderte, bei dem arithmetischen Mittel derjenigen Temperaturen, die es wirklich in jener Periode besass, der Ausstrahlung überlassen hätte.

Die Correction bestimmte sich folgendermaassen.

Direct beobachtet wurde der Temperaturfall τ des Calorimeters pro Minute *vor* Einführung des untersuchten Körpers und τ' längere Zeit *nach* Erreichung des Maximums, wo dann das Gefälle wieder constant war; ausserdem die ungefähre Zeit T, die von der Einführung bis zur Erreichung des Maximums verfloss. Die beiden Temperaturfälle (der erste negativ und meist fast verschwindend, der zweite positiv) betrugen stets nur wenige Hundertel Grad, die Zeit T bis zur Erreichung des Maximums meist nahe eine Minute.

Durch besondere Messungen, bei denen die Temperatur von Viertelminute zu Viertelminute abgelesen wurde, liess sich constatiren, dass die mittlere Temperatur des Calorimeters während der Periode des Ausgleichs nahe $= \frac{1}{4}(3\vartheta' + \vartheta)$ betrug, falls ϑ die Anfangs-, ϑ' die Maximaltemperatur bezeichnet. Hiernach betrug also, falls T genau eine Minute war, die anzubringende Correction $\frac{1}{4}(3\tau' + \tau)$, und war im anderen Falle nur im Verhältniss des geänderten T zu verkleinern oder zu vergrössern. Ich habe mich überzeugt, dass dies Verfahren innerhalb der Grenzen der directen Beobachtungsfehler ($0{,}005^0 - 0{,}01^0$) mit dem Resultate der Theorie übereinstimmt.

Die Vorwärmung des untersuchten Körpers geschah in dem bekannten Neumann'schen „Hahn", der indess eine nicht unwichtige Abänderung erlitten hatte, welche die Bequemlichkeit seiner Anwendung vergrössert (vgl. Fig. 1).

Es stand nämlich der *innere* Theil (J), das sogenannte „Hahnküken" *fest*, der *äussere*, der Mantel (A), wurde *gedreht*; die Oeffnung (die „Kammer" K), welche den Körper aufnahm, durchsetzte den inneren Theil vollständig von oben bis unten, und hierdurch war erreicht, dass man die Neufüllung des Apparates vornehmen konnte, ohne ihn vom Gestell zu nehmen und umzukehren; die ursprüngliche Neumann'sche Anordnung gestattet dies nicht.

Um die in der Kammer befindlichen Körper nicht mit dem Schmiermittel, welches sich zwischen den beiden Theilen

des Hahnes befand, in Berührung kommen zu lassen, war die Kammer nach unten durch eine leichte, fallthürartige Klappe *k* geschlossen, die sich von selbst öffnete, wenn durch Drehung des Mantels dessen Oeffnung (*O*) unter die Klappe gelangte, und sich von selbst schloss, wenn man den Mantel zurückbewegte.

Das in der Kammer befindliche Thermometergefäss *t* war meist ganz von den eingeführten Metallstücken umgeben, gab also deren Temperatur ziemlich genau an. Um einen etwaigen

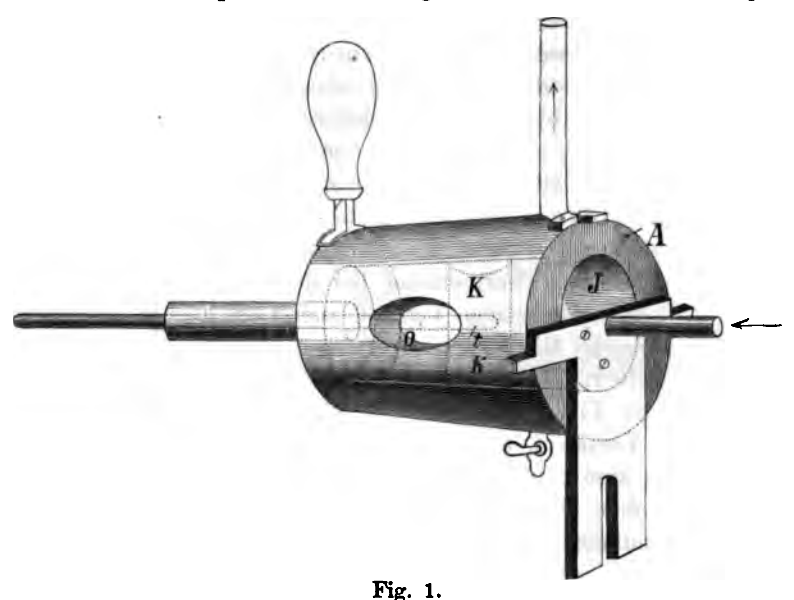


Fig. 1.

Fehler zu verringern, wurden die Metallstücke in einem Luftbade vorgewärmt und bald auf *höherer*, bald auf *niedrigerer* Temperatur, als dem jeweiligen Siedepunkte des Wassers, in die Kammer eingeführt. Ein Einfluss dieses Umstandes auf die Beobachtungsresultate hat sich nicht constatiren lassen; man kann also ziemlich sicher sein, dass die Temperatur der erhitzten Körper richtig bestimmt ist.

Liess man die Metallstücke aus der Kammer in das Calorimeter fallen, so spritzte meist ein nicht bestimmbares Quantum der Flüssigkeit heraus. Dieser Uebelstand wurde beseitigt durch Aufstellung eines flachen, unten mit Draht-

gaze geschlossenen Körbchens innerhalb des Calorimeters, das oberflächlich in die Flüssigkeit tauchte, um deren Temperatur wirklich anzunehmen, und, sowie die Metallstücke hineingefallen waren, durch eine einfache Vorrichtung zum Untersinken gebracht werden konnte. In der halben Höhe des Calorimeters wurde das Körbchen durch einen Widerhalt aufgefangen, und nun durch den Turbinenrührer der Flüssigkeitsstrom von *unten nach oben* durch die Zwischenräume zwischen den Metallstücken hindurchgetrieben. Etwas tiefer befand sich das Gefäss des Thermometers, welches bei dieser Einrichtung nur von *der* Flüssigkeit bespült wurde, die von den heissen Metallstücken aus den Weg nach oben und dann durch das Turbinenrohr hinab zurückgelegt hatte. Auf diese Weise gab das Thermometer sehr nahe die mittlere Temperatur der Calorimeterflüssigkeit an; dies hätte nicht stattgefunden, wenn der Flüssigkeitsstrom von den Metallstücken direct abwärts zu dem nur wenig tieferen Thermometer gegangen wäre. In der That zeigte das Thermometer bei der letzteren Anordnung einen ganz unregelmässigen Verlauf, zuerst ein Emporschiessen bis weit über die Mischungstemperatur und dann ein ungleichförmiges Fallen, — bei der ersteren Anordnung verhielt es sich ganz der Theorie gemäss.

Einige Versuche, bei denen das Calorimeter in derselben Weise, wie zum Auffangen der erhitzten Körper, unter den Hahn geschoben, der Hahn aber nicht geöffnet wurde, ergaben, dass während des kaum eine Secunde dauernden Aufenthaltes des Calorimeters unterhalb des erhitzten Hahnes keine sicher nachweisbare Erwärmung des ersteren durch Strahlung stattfand.

Bei Aufzählung der kleinen Kunstgriffe, durch welche die Genauigkeit und Bequemlichkeit der Beobachtung gefördert wurde[1]), will ich die Lupe nicht übergehen, die zur Ablesung der Thermometer diente; sie ist in dieser Anordnung schon viele Jahre in dem Laboratorium in Königsberg und Göttingen im Gebrauch, aber, wie ich mich überzeugt habe, sonst sehr wenig bekannt. Ihr Zweck ist, die Parallelaxe nahe

---

1) Ein Theil derselben ist schon bei den von Hrn. Sella im hiesigen physikalischen Institut angestellten Beobachtungen zur Anwendung gekommen (vgl. Gött. Nachr. 1891. p. 311).

vollständig zu vermeiden; die dazu getroffene Einrichtung gibt die Fig. 2. Der Meniskus des Quecksilberfadens wird in die Mitte zwischen die beiden Drähte *d d* gebracht, das Knöpfchen *k* jederzeit *demselben* Ende, z. B. dem Gefäss des Thermometers, zugewandt.

Das im Calorimeter befindliche Thermometer war in 1/10 Grad getheilt und gestattete die Schätzung von 0,005°; es war durch sorgfältige Vergleichung mit einem in der physikalischen Reichsanstalt geprüften berichtigt. Das Thermometer, welches zur Bestimmung der Temperatur der erhitzten Körper im Hahne diente, war nur in Grade getheilt, und gestattete die Schätzung von 0,05°; seine Angabe wurde durch mehrmalige Vergleichung mit dem aus dem Barometerstande berechneten Siedepunkt corrigirt.

Die untersuchten Metalle sind dieselben, über deren Herkunft und Reinheit in einer früheren Arbeit[1]) berichtet ist; aus den, früher benutzten, unmittelbar benachbarten Partien der Gussstücke wurden kleine, nahezu würfelförmige Stücke von ca. (7 mm)³ Inhalt ausgeschnitten und die Kanten mit der Feile leicht gerundet.

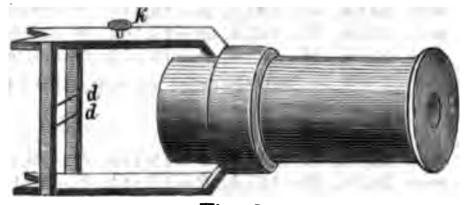


Fig. 2.

In den folgenden Beobachtungstafeln bezeichnet *m* die Masse des untersuchten Körpers, *M* den Wasserwerth des gefüllten Calorimeters mit Rührer, Körbchen und Thermometer. ϑ ist die Anfangstemperatur des Calorimeters, Θ der erhitzten Körper, ϑ' die bereits corrigirte Mischungstemperatur; aus diesen Zahlen ist nach der Formel

$$m\,c\,(\vartheta' - \vartheta) = M\,C(\Theta - \vartheta')$$

c d. h. c_p berechnet. Wegen der noch immer vorhandenen Unsicherheit über den Werth der specifischen Wärme des Wassers habe ich c durch deren mittleren Werth bei der Temperatur $(\vartheta + \vartheta')/2$ ausgedrückt. Die gefundenen Resultate besitzen eine Sicherheit von wenigen pro Mille.

1) W. Voigt, Gött. Abh. **38.** 1892; Wied. Ann. **48.** p. 675. 1893.

Aluminium.

$m = 25,05,\ M = 127,6,\ \vartheta = 16,710,\ \Theta = 99,60,\ \vartheta' = 20,040,\ c = 0,2132.\ C$
$m = 25,05,\ M = 111,8,\ \vartheta = 16,405,\ \Theta = 99,35,\ \vartheta' = 20,205,\ c = 0,2143.\ C$
$m = 16,40,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,990,\ \Theta = 99,60,\ \vartheta' = 20,190,\ c = 0,2156.\ C$
$m = 24,24,\ M = 127,6,\ \vartheta = 16,285,\ \Theta = 99,65,\ \vartheta' = 19,505,\ c = 0,2148.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,2145 \pm 0,0008).\ C_{18,4}.$

Bronze.

$m = 69,67,\ M = 127,6,\ \vartheta = 18,250,\ \Theta = 99,50,\ \vartheta' = 21,940,\ c = 0,0871.\ C$
$m = 55,25,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,750,\ \Theta = 99,50,\ \vartheta' = 18,815,\ c = 0,0877.\ C$
$m = 69,67,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,265,\ \Theta = 99,60,\ \vartheta' = 19,100,\ c = 0,0873.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,08737 \pm 0,00012).\ C_{18,2}.$

Kadmium.

$m = 58,68,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,095,\ \Theta = 98,80,\ \vartheta' = 19,095,\ c = 0,0546.\ C$
$m = 58,68,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,970,\ \Theta = 98,80,\ \vartheta' = 18,020,\ c = 0,0552.\ C$
$m = 58,68,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,885,\ \Theta = 99,20,\ \vartheta' = 17,400,\ c = 0,0549.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0549 \pm 0,0001).\ C_{17,2}.$

Eisen.

$m = 55,04,\ M = 127,6,\ \vartheta = 18,440,\ \Theta = 98,80,\ \vartheta' = 22,265,\ c = 0,1159.\ C$
$m = 55,04,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,165,\ \Theta = 98,80,\ \vartheta' = 21,070,\ c = 0,1165.\ C$
$m = 55,04,\ M = 127,6,\ \vartheta = 16,570,\ \Theta = 98,90,\ \vartheta' = 20,470,\ c = 0,1153.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,1159 \pm 0,0002).\ C_{19,2}.$

Gold.

$m = 22,75,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,710,\ \Theta = 99,15,\ \vartheta' = 16,150,\ c = 0,0297.\ C$
$m = 36,36,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,185,\ \Theta = 99,15,\ \vartheta' = 17,880,\ c = 0,0300.\ C$
$m = 36,36,\ M = 127,6,\ \vartheta = 18,165,\ \Theta = 98,80,\ \vartheta' = 18,865,\ c = 0,0307.\ C$
$m = 36,36,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,990,\ \Theta = 98,80,\ \vartheta' = 18,690,\ c = 0,0307.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0303 \pm 0,0002).\ C_{17,6}.$

Kupfer.

$m = 98,40,\ M = 111,52,\ \vartheta = 14,380,\ \Theta = 99,10,\ \vartheta' = 20,730,\ c = 0,0918.\ C$
$m = 101,92,\ M = 111,52,\ \vartheta = 15,585,\ \Theta = 99,40,\ \vartheta' = 22.075,\ c = 0,0918.\ C$
$m = 90,25,\ M = 136,50,\ \vartheta = 16\,040,\ \Theta = 99,25,\ \vartheta' = 20,850,\ c = 0,0928.\ C$
$m = 92,52,\ M = 111,52,\ \vartheta = 16,050,\ \Theta = 99,40,\ \vartheta' = 22,005,\ c = 0,0928.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0923 \pm 0,0002).\ C_{18,7}.$

Magnesium.

$m = 10,84,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,885,\ \Theta = 99,45,\ \vartheta' = 19,570,\ c = 0,248.\ C$
$m = 10,84,\ M = 127,6,\ \vartheta = 13,920,\ \Theta = 99,25,\ \vartheta' = 15,695,\ c = 0,250.\ C$
$m = 10,84,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,905,\ \Theta = 99,25,\ \vartheta' = 17,585,\ c = 0,242.\ C$
$m = 10,84,\ M = 127,6,\ \vartheta = 17,625,\ \Theta = 99,30,\ \vartheta' = 19,285,\ c = 0,246.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,246 \pm 0,001).\ C_{17,2}.$

Messing.

$m = 72,93,\ M = 127,6,\ \vartheta = 16,200,\ \Theta = 99,50,\ \vartheta' = 20,370,\ c = 0,0922.\ C$
$m = 72,93,\ M = 127,6,\ \vartheta = 16,555,\ \Theta = 99,50,\ \vartheta' = 20,675,\ c = 0,0915.\ C$
$m = 72,93,\ M = 127,6,\ \vartheta = 15,865,\ \Theta = 99,60,\ \vartheta' = 20,020,\ c = 0,0914.\ C$

Mittelwerth: $c_p = (0,0917 \pm 0,0002).\ C_{18,2}.$

Nickel.

$m=56,57$, $M=111,52$, $\vartheta=15,355$, $\Theta=99,35$, $\vartheta'=19,710$, $c=0,1078$. C
$m=56,57$, $M=136,5$, $\vartheta=16,895$, $\Theta=99,25$, $\vartheta'=20,450$, $c=0,1089$. C
$m=53,38$, $M=127,6$, $\vartheta=18,255$, $\Theta=99,60$, $\vartheta'=21,785$, $c=0,1085$. C
Mittelwerth: $c_p=(0,1084\pm0,0002)$. $C_{18,7}$.

Stahl (LS 84 R).

$m=50,75$, $M=127,6$, $\vartheta=17,730$, $\Theta=98,90$, $\vartheta'=21,240$, $c=0,1137$. C
$m=46,35$, $M=127,6$, $\vartheta=16,710$, $\Theta=98,80$, $\vartheta'=19,975$, $c=0,1140$. C
Mittelwerth: $c_p=(0,1138\pm0,0001)$. $C_{18,9}$.

Stahl (LS 84 E).

$m=48,68$, $M=127,6$, $\vartheta=18,070$, $\Theta=99,50$, $\vartheta'=21,420$, $c=0,1125$. C
$m=48,68$, $M=127,6$, $\vartheta=16,220$, $\Theta=99,50$, $\vartheta'=19,655$, $c=0,1128$. C
Mittelwerth: $c_p=(0,1126\pm0,0001)$. $C_{18,8}$.

Wismuth.

$m=55,50$, $M=127,6$, $\vartheta=13,825$, $\Theta=99,05$, $\vartheta'=14,950$, $c=0,0808$. C
$m=55,50$, $M=127,6$, $\vartheta=16,490$, $\Theta=99,15$, $\vartheta'=17,550$, $c=0,0299$. C
$m=55,50$, $M=127,6$, $\vartheta=17,790$, $\Theta=99,10$, $\vartheta'=18,840$, $c=0,0301$. C
$m=55,50$, $M=127,6$, $\vartheta=16,300$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=17,400$, $c=0,0309$. C
Mittelwerth: $c_p=(9,0304\pm0,0002)$. $C_{16,6}$.

Zink.

$m=44,06$, $M=127,1$, $\vartheta=15,250$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=17,835$, $c=0,0915_2$. C
$m=44,06$, $M=127,6$, $\vartheta=16,120$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=18,665$, $c=0,0914_1$. C
$m=44,06$, $M=127,6$, $\vartheta=28,005$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=20,505$, $c=0,0918_7$. C
Mittelwerth: $c_p=(0,09160\pm0,00009)$. $C_{17,7}$.

Zinn.

$m=51,47$, $M=127,6$, $\vartheta=16,115$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=17,925$, $c=0,0551_7$. C
$m=51,47$, $M=127,6$, $\vartheta=17,290$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=19,075$, $c=0,0551_7$. C
$m=51,47$, $M=127,6$, $\vartheta=17,650$, $\Theta=99,30$, $\vartheta'=19,420$, $c=0,0551_1$. C
Mittelwerth: $c_p=(0,05515\pm0,00001)$. $C_{17,9}$.

Die im Vorstehenden gewonnenen Werthe von c_p können nun in Verbindung mit anderen schon früher bestimmten Constanten derselben Metalle zu einigen wichtigen Folgerungen dienen.

Bezeichnet man nämlich die Dichte durch s, die specifische Wärme bei constantem Volumen durch c_v, den Coefficienten der lineären thermischen Dilatation mit α, denjenigen des thermischen Druckes (in absolutem Maasse ausgedrückt) mit ϱ und versteht unter A das mechanische Wärmeäquivalent, unter T die absolute Temperatur, so gilt

$$(1) \qquad c_v = c_p - \frac{3\varrho\alpha T}{As}$$

$$(2)\qquad \varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1}{1 - \frac{3\varrho\alpha T}{A\varepsilon c_p}} = 1 + \frac{3\varrho\alpha T}{A\varepsilon c_p};$$

der letzte Werth ist nur ein angenäherter, der aber in unserem Falle unbedenklich zu benutzen ist.

Weiter hat noch ein Interesse der Coefficient der Temperaturänderung, welche bei adiabatischer Spannung oder Deformation auftritt.

Bezeichnet man nämlich die erregten Gesammtspannungen mit $\Xi_x \ldots \Xi_y$, die hervorgebrachten Deformationsgrössen mit $x_x \ldots x_y$, so gilt für diese Temperaturänderung

$$(3)\qquad \vartheta = \frac{\alpha T}{A\varepsilon c_p}(\Xi_x + H_y + Z_z) = \mu(\Xi_x + H_y + Z_z)$$

$$(4)\qquad \vartheta = \frac{-\varrho T}{A\varepsilon c_v}(x_x + y_y + z_z) = -\nu(x_x + y_y + z_z).$$

Ferner finden sich die adiabatischen Elasticitätsconstanten γ und Elasticitätsmoduln σ aus den früher bestimmten isothermischen c resp. s nach den Formeln:

$$(5)\qquad \gamma = c + \frac{\varrho^2 T}{A\varepsilon c_v}, \quad \gamma_1 = c_1 + \frac{\varrho^2 T}{A\varepsilon c_v}, \quad \gamma_2 = c_2,$$

$$(6)\qquad \sigma = s - \frac{\alpha^2 T}{A\varepsilon c_p}, \quad \sigma_1 = s_1 - \frac{\alpha^2 T}{A\varepsilon c_p}, \quad \sigma_2 = s_2;$$

der Unterschied zwischen c_p und c_v ist in ihnen zu ignoriren.

Hieraus folgen endlich die Werthe der Geschwindigkeit für die Fortpflanzung longitudinaler und transversaler Wellen

$$(7)\qquad \omega_\lambda = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}, \qquad \omega_\tau = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\varepsilon}}.$$

Die Formeln (1) bis (6) enthalten sämmtlich das mechanische Wärmeäquivalent A mit c_p oder c_v, also nach Einsetzen der oben gefundenen Werthe mit C multiplicirt; infolgedessen werden die durch sie gegebenen Folgerungen zum grössten Theil von der Unsicherheit der specifischen Wärme C des Wassers nicht berührt. Denn die von Hrn. Rowland[1]) angestellten Beobachtungen zur Bestimmung von A liefern direct

1) Rowland, Proc. Amer. Acad. (2) 7. p. 75. 1880.

das Product AC für verschiedene Temperaturen; die mittlere Wassertemperatur, auf welche sich die vorstehenden Messungen beziehen, ist etwa 18°, man kann für ihre weitere Verwendung nach jenen Beobachtungen rund

$$AC = 418 \,.\, 10^5$$

setzen.

Die Dichten ε sind für die zu machenden Anwendungen an Stücken der benutzten Metalle zum Theil von Hrn. Drude, zum Theil von mir besonders bestimmt; ihre Sicherheit beträgt einen kleinen Bruchtheil eines pro Mille.

Die Werthe von α und ϱ sind der vorigen Arbeit[1]) entnommen, nur ist ϱ von dem dort angegebenen q durch Beziehung auf absolute Einheiten unterschieden.

	ε	$\alpha.10^{+6}$	$\varrho.10^{-6}$	c_p/C_{18}	c_v/C_{18}	$\varkappa$	$\mu.10^{+12}$	ν
Al	2,676	23,06	32,9	0,2145	0,2084	1,0295	291	413
Br[2])	8,731	17,75	46,8	0,0874	0,0853	1,0237	169	445
Cd	8,665	24,7	?	0,0549	?	?	377	?
Fe	7,188	11,61	27,0	0,1159	0,1150	1,0081	101	235
Au	19,28	14,14	31,1	0,0303	0,0298	1,0162	176	384
Cu	8,860	17,09	24,8	0,0923	0,0918	1,0114	152	221
Mg	1,741	26,05	21,5	0,246	0,239	1,0285	442	364
Me[2])	8,438	18,65	33,3	0,0917	0,0901	1,0177	175	313
Ni	8,795	13,15	66,0	0,1084	0,1063	1,0198	100	502
Ag	10,493	19,25	40,1	(0,0559)	0,0543	1,0288	238	496
StR[2])	7,822	11,47	49,0	0,1138	0,1122	1,0138	93,5	401
Bi	10,05	13,67	10,0	0,0304	0,0301	1,0098	325	289
Zn	7,212	25,1	74,5	0,0916	0,0860	1,063	276	817
Sn	7,328	22,2	?	0,05515	?	?	398	?

Zu dieser Zusammenstellung ist zu bemerken, dass Kadmium und Zinn eine einigermaassen zuverlässige Bestimmung von ϱ nicht gestatteten und daher bei Berechnung derjenigen Constanten, welche dessen Kenntniss voraussetzten, ausfallen mussten. Für das von mir benutzte Silber konnte ich c_p nicht bestimmen, weil der von der Herstellung der früher beobachteten Stäbe übrige Rest des Gusses bereits zurückgegeben war, die Stäbe aber für andere Untersuchungen erhalten bleiben sollten. Der oben eingesetzte Werth ist von Bunsen[3]) gegeben.

Für die zweite Tabelle sind die Werthe der Elasticitätsmoduln s, s_2 und der Elasticitätsconstanten c, c_2 an denselben

1) W. Voigt, Wied. Ann. **49.** p. 396. 1893.
2) Br bedeutet Bronze, Me Messing, St Stahl.
3) R. Bunsen, Pogg. Ann. **141.** p. 25. 1870.

Metallen früher bestimmt[1]; $c_1 = c - 2c_2$ und $s_1 = s - \frac{1}{2}s_2$ sind aus ihnen sofort zu bilden.

Die Unterschiede der adiabatischen und der isothermischen Module und Constanten sind nur sehr klein, meist unterhalb der Grenze der noch angebbaren Genauigkeit derselben liegend. Darum konnten die Geschwindigkeiten ω_λ und ω_τ auch unbedenklich mit den isothermischen statt mit den adiabatischen Constanten berechnet werden.

	$s.10^{+12}$	$s_2.10^{+12}$	$(s-\sigma).10^{+15}$	$c.10^{-12}$	$c_2.10^{-12}$	$(\gamma-c).10^{-9}$	$\omega_\lambda.10^{-5}$	$\omega_\tau.10^{-5}$
Al	1,55	8,95	6,72	0,811	0,252	13,5	5,50	3,07
Br	0,968	2,51	8,00	1,41	0,40	20,8	4,02	2,14
Cd	1,44	4,16	9,80	2,88	0,24	?	5,19	1,66
Fe	0,795	1,955	1,18	1,46	0,51	6,4	4,51	2,66
Au	1,845	8,58	2,48	1,11	0,280	11,9	2,40	1,20
Cu	0,940	2,182	2,59	1,11	0,468	5,5	3,53	2,30
Mg	2,89	5,96	11,5	0,498	0,167	7,8	5,35	3,10
Me	1,11	2,76	8,26	1,08	0,36	10,5	3,58	2,07
Ni	0,501	1,80	1,82	2,69	0,76	32,9	5,53	2,94
Ag	1,31	8,44	4,58	1,08	0,29	20,0	3,21	1,66
St R	0,499	1,26	1,07	2,47	0,79	19,7	5,62	3,18
Bi	8,20	8,25	4,48	0,41	0,12	2,4	2,02	1,09
Zn	0,989	2,68	6,92	1,49	0,38	60,8	4,55	2,30
Sn	1,89	5,91	8,85	?	?	?	?	?

Es mag schliesslich nochmals darauf hingewieseu werden, dass alle diese Zahlen sich auf dieselben gegossenen und mechanischer Bearbeitung so wenig, als möglich, ausgesetzten Metalle beziehen, die Anwendung auf gezogene Drähte oder gewalzte Bleche, also nicht mit Strenge, gestatten. Damit hängt zusammen, dass sie von den vereinzelt schon früher bestimmten Werthen mehr oder weniger abweichen.

Göttingen, Anfang März 1893.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 48. p. 707. 1893.

9. ***Bestimmung der Elasticitätsconstanten für das chlorsaure Natron; von W. Voigt.***

(Aus den Gött. Nachrichten Nr. 6 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Die Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse des chlorsauren Natrons bietet ein besonderes Interesse wegen der tetartoëdrischen Krystallform und den damit zusammenhängenden electrischen Eigenschaften dieses Minerales; denn es ist, wie ich schon früher mehrfach betont habe, ein Zusammenhang zwischen dem electrischen und dem elastischen Verhalten im hohen Grade wahrscheinlich.

Das Material für die Beobachtungen ist von Hrn. Goldbach in Kehl geliefert worden; es war vielleicht schon ungewöhnlich vollkommen, denn die einzelnen Krystalle hatten bis 25 mm Kantenlänge; sie besassen indessen nur kleine von Fortwachsungserscheinungen völlig freie Bereiche und gestatteten daher auch nur die Herstellung einer sehr geringen Zahl von Stäbchen für die Messung. Und diese kleine Zahl ist noch durch die Schwierigkeit der Bearbeitung des äusserst spröden Materials reducirt worden, sodass schliesslich nur drei Stäbchen der Messung unterzogen werden konnten; zwei mit der Längsrichtung (L) und den Querdimensionen (B und D) parallel Würfelnormalen (W I und II), und eines mit der Längs- und Dickenrichtung parallel einer Granatoëdernormalen (G).

Die für die Berechnung in Betracht kommenden Formeln sind folgende:

Der Biegungswiderstand E oder der Biegungsmodul E, und der Drillungswiderstand T oder der Drillungsmodul T ergeben sich aus den Dimensionen L, B, D, aus der Belastung P, deren Hebelarm R und aus der gemessenen Biegung η und dem gemessenen Drillungswinkel τ nach den Formeln:

$$(1) \qquad E = \frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{P L}{4 B D^3 \eta},$$

$$(2) \qquad T = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{3 P R L}{B D^3 \tau \left(1 - 0{,}630 \cdot \frac{D}{B}\right)}.$$

Aus ihnen folgen leicht die allgemeinen Elasticitätsmoduln s_{11}, s_{12} und s_{44}, da

(3) $$E_w = s_{11}, \quad E_s = \tfrac{1}{4}(2(s_{11} + s_{12}) + s_{44}), \quad T_w = s_{44};$$

und aus diesen berechnen sich die Elasticitätsconstanten nach den Formeln:

(4) $$c_{11} = \frac{s_{11} + s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2\, s_{12})}, \quad c_{12} = \frac{-\, s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2\, s_{12})}, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}}.$$

Der Berechnung ist, wie bei den früheren Bestimmungen, das Gewicht eines Grammes als Kraft-, das Millimeter als Längeneinheit zu Grunde gelegt.

Dimensionen.

Breiten und Dicken sind von Hrn. Dr. Pockels mit dem früher benutzten Sphärometer gemessen und nach den Formeln:

$$D = D_0 + \delta_1\, \alpha + \delta_2\, \alpha^2$$
$$B = B_0 + \beta_1\, \alpha + \beta_2\, \alpha^2$$

berechnet worden.[1]) Sie sind im Folgenden in Einheiten des Sphärometers (= 1/992,6 mm) angegeben.

W. Nr. 1. $D = 1000 + \delta$. $B = 4900 + \delta$.

δ beob.	27,8	44,9	51,8	50,7	41,8	β beob.	−46,5	+14	48	65	65
δ ber.	28,4	44,4	52,0	51,2	42,0	β ber.	−45	+12	49	66	64

$\delta_0 = 52{,}0$, $\delta_1 = 3{,}4$, $\delta_2 = -\,4{,}2$. $\beta_0 = 12$, $\beta_1 = 27{,}4$, $\beta_2 = -\,9{,}8$.

W. Nr. 2. $D = 1100 + \delta$. $B = 4900 + \beta$.

δ beob.	46,2	73,1	89,8	101,2	100,6	β beob.	47	52	44	20	−35
δ ber.	46,2	72,8	90,8	100,2	101,0	β ber.	45	55	45	16	−33

$\delta_0 = 90{,}8$, $\delta_1 = 13{,}7$, $\delta_2 = -4{,}3$. $\beta_0 = 45$, $\beta_1 = 19{,}6$, $\beta_2 = -\,9{,}8$.

G. $D = 1000 + \delta$. $B = 4000 + b$.

δ beob.	10,8	18,1	19,4	16,6	7,2	β beob.	407	414	399	398	379
δ ber.	10,8	18,0	19,8	16,2	7,2	β ber.	408	409	405	395	379

$\delta_0 = 19{,}8$, $\delta_1 = 0{,}87$, $\delta_2 = -2{,}7$. $\beta_0 = 405$, $\beta_1 = 7{,}2$, $\beta_2 = -\,2{,}8$.

Biegungen.

Die Dimensionen, welche in früher angegebener Weise aus den vorstehenden Zahlen abgeleitet sind, sind in Millimetern, die Biegungen in Theilen der beobachteten Scala (= 0,0002954 mm), die Belastungen in Grammen angegeben; η_p' bezeichnet die Eindrückung der Lagerschneiden, die durch Combinationen von zwei Beobachtungen desselben Stäbchens bei verschiedener Länge erhalten wird und von den direct gemessenen η_p in Abzug zu bringen ist.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **31.** p. 475. 1887.

W. I. $L = 14{,}07$, $B = 4{,}98$, $D = 1{,}058$, $P = 60$.
1. Lage $\eta = 8{,}6$ 8,7 8,7 8,8
2. Lage $\eta = 8{,}6$ 8,9 8,7
$L = 22{,}7$
1. Lage $\eta = 25{,}2$ 25,1 25,3
2. Lage $\eta = 25{,}2$ 25,2 25,1
$\eta_{60} = 25{,}20$, $\eta_{60}' = 2{,}90$. $E = \mathbf{4{,}15_3 . 10^6}$.

W. II. $L = 14{,}07$, $B = 5{,}014$, $D = 1{,}198$, $P = 80$.
1. Lage $\eta = 8{,}5$ 8,6 8,5
2. Lage $\eta = 8{,}7$ 8,6 8,4
$L = 22{,}7$
1. Lage $\eta = 23{,}6$ 23,8 23,6
2. Lage $\eta = 23{,}5$ 23,4 23,5
$\eta_{80} = 23{,}57$, $\eta_{80}' = 3{,}16$. $E = \mathbf{4{,}14_2 . 10^6}$.
Mittelwerth $E_w = \mathbf{4{,}14_7 . 10^{+6}}$, $\mathrm{E}_w = \mathbf{0{,}241_2 . 10^{-6}}$.

G. $L = 14{,}07$, $B = 4{,}98_4$, $D = 1{,}059$, $P = 60$.
1. Lage $\eta = 13{,}5$ 13,7 13,6
2. Lage $\eta = 13{,}3$ 13,1 13,1
$L = 22{,}07$
1. Lage $\eta = 39{,}8$ 40,1 40,0
2. Lage $\eta = 39{,}4$ 39,4 39,3
$\eta_{60} = 39{,}7$, $\eta_{60}' = 4{,}2$.
$E_g = \mathbf{2{,}58_1 . 10^{+6}}$, $\mathrm{E}_g = \mathbf{0{,}387_5 . 10^{-6}}$.

Drillungen.

Die beobachteten Drehungen sind in Theilen der Scala (σ), welche gleich 1,0037 mm waren, angegeben; aus ihnen folgt der Drehungswinkel τ durch Division mit dem Abstand $A = 5173$ der Scala von den Spiegeln. Die Axenreibung (ϱ) ist in früher erörterte Weise eliminirt. G bezeichnet das Gewicht der Waagschale, welches mit ϱ zusammen aus der Berechnung verschwindet; das Symbol lR resp. rR bedeutet, dass die Messung an der linken oder rechten Rolle des Apparates vorgenommen ist. Der mittlere Werth von R ist 36,80 mm.

W. Nr. 1. $L = 12{,}40$, $B = 4{,}975$, $D = 1{,}057$.
rR. $G + 10$, $\sigma = 34{,}7$ 34,6 34,8 34,6 34,6 $\varrho = 0{,}9$
G, $\sigma = 12{,}1$ 12,0 12,1 12,0 $\varrho = 0{,}8$
lR. $G + 10$, $\sigma = 34{,}6$ 34,7 34,7 34,7 34,6 $\varrho = 1{,}1$
G, $\sigma = 11{,}9$ 11,9 11,7 11,8 $\varrho = 1{,}3$
$\sigma_{10} = 22{,}72$, $T = \mathbf{1{,}22_3 . 10^{+6}}$.

W. Nr. 2. $L = 16{,}50$, $B = 4{,}977$, $D = 1{,}190$.
lR. $G + 10$, $\sigma = 44{,}4$ 44,4 44,4 44,3 $\varrho = 2{,}0$
G, $\sigma = 22{,}1$ 22,3 22,3 22,4 22,3 $\varrho = 2{,}0$
R. $G + 10$, $\sigma = 42{,}6$ 42,6 42,6 42,9 42,6 $\varrho = 1{,}6$
G, $\sigma = 21{,}2$ 21,1 21,2 21,3 $\varrho = 1{,}6$
$\sigma_{10} = 21{,}80$, $T = \mathbf{1{,}21_2 . 10^{+6}}$.
Mittelwerth $T_w = \mathbf{1{,}21_8 . 10^{+6}}$, $\mathrm{T}_w = \mathbf{0{,}821 . 10^{-6}}$.

Die erhaltenen Zahlen stimmen so gut überein, als überhaupt zu erwarten, die Resultate haben also eine gewisse Zuverlässigkeit.

Folgerungen.

Aus den gefundenen E und T ergeben sich sogleich die Werthe der Elasticitätsmoduln

$$s_{11} = 0{,}241_2 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{12} = 0{,}123_3 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{44} = 0{,}821 \,.\, 10^{-6}$$

und aus ihnen erhält man die Elasticitätsconstanten

$$c_{11} = 6{,}33 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{12} = -2{,}14 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{44} = 1{,}218 \,.\, 10^{+6}.$$

Diese Resultate sind sehr bemerkenswerth, besonders wenn man sie mit denjenigen vergleicht, welche für das dem chlorsauren Natron nachstehende Steinsalz gefunden sind. Hier ergab sich

$$s_{11} = 0{,}238 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{12} = -0{,}052 \,.\, 10^{-6}, \quad s_{44} = 0{,}773 \,.\, 10^{-6}.$$

$$c_{11} = 4{,}77 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{12} = +1{,}32 \,.\, 10^{+6}, \quad c_{44} = 1{,}29 \,.\, 10^{+6}.$$

Es haben also s_{12} und c_{12} in beiden Fällen entgegengesetzte Vorzeichen.

Dies hat wichtige Folgen. Der Modul s_{12} ist das Maass der Querdilatation eines Cylinders, dessen Axe in eine Würfelnormale fällt, bei longitudinalem Zug; ein *negativer* Werth von s_{12} gibt eine Quercontraction — wie sie fast überall stattfindet und als nahezu selbstverständlich betrachtet zu werden pflegt — ein *positiver* aber eine Querdilatation als Begleitung der Längsdilatation. Eine solche war bisher einzig am Pyrit bei gleicher Orientirung aufgefunden[1]) und wegen ihrer Absonderlichkeit dort nicht allzusehr betont; es schien denkbar, dass sie nur scheinbar infolge des nicht ganz vollkommenen Materials aufgetreten wäre. Nach diesem neuen Resultate ist es aber als sichergestellt zu betrachten, *dass in einigen Fällen die Längsdehnung eines Cylinders eine Vergrösserung des Querschnittes zur Folge hat.*

Was die Werthe der Elasticitätsconstanten angeht, so soll nach der Theorie dann

$$c_{11} = 3\, c_{12}$$

sein, wenn die kleinsten Theile keine Polarität besitzen.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 651. 1888.

Diese Relation ist bei Steinsalz sehr nahezu erfüllt; beim chlorsauren Natron findet sich der denkbar stärkste Widerspruch damit, denn c_{11} und c_{12} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Man wird also dem chlorsauren Natron Molecüle mit sehr starker Polarität beilegen müssen, und dies steht in guter Uebereinstimmung mit der starken piëzoelectrischen Erregbarkeit, welche dieses Mineral zeigt.

Es hat ein gewisses Interesse, zu untersuchen, wie sich nach der früher gegebenen[1]) und mehrfach durch die Erfahrung bestätigten Theorie *dichtes* (quasi-isotropes) chlorsaures Natron verhalten müsste. Nach den abgeleiteten Formeln sind für solches die Elasticitätsconstanten c und c_1 gegeben durch

$$c = \tfrac{1}{5}(3\,c_{11} + 2\,c_{12} + 4\,c_{44}), \qquad c_1 = \tfrac{1}{5}(c_{11} + 4\,c_{12} - 2\,c_{44});$$

und es berechnet sich aus den oben gefunden c_{hk}:

$$c = 3{,}92\,.\,10^{+6}, \qquad c_1 = -\,0{,}93\,.\,10^{+6}.$$

Nun ist der Werth des Moduls s_1 der Querdilatation für isotrope Substanzen

$$s_1 = -\,\frac{c_1}{(c - c_1)(c + 2\,c_1)},$$

und hieraus folgt sofort, dass das singuläre Verhalten des chlorsauren Natrons auch im *dichten* Vorkommen erhalten bleiben, also auch ein Cylinder aus diesem Material bei Längsdehnung eine Vergrösserung des Querschnittes zeigen müsste.

Göttingen, Anfang März 1893.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **38.** p. 579. 1889.

10. *Ueber die Reflexion und die Resonanz der Hertz'schen electrischen Schwingungen; von L. Zehnder.*

(Aus den Ber. d. Naturf. Ges. zu Freiburg i. B. mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

1. Vor zwei Jahren ist von Hrn. Prof. Hagenbach und mir eine Arbeit über: „Die Natur der Funken bei den Hertz'schen electrischen Schwingungen" veröffentlicht worden [1]), welche offenbar in anderer Weise ausgelegt wird, als es meinen Anschauungen entspricht; ich möchte deshalb diesen meinen Anschauungen in Folgendem etwas präcisere Fassung geben und gleichzeitig Hrn. Hertz meinerseits entgegenkommen, welcher unsere Erklärungen der Reflexion und der Resonanz unter der Annahme, dass Partialentladungen in seinen primären Leitern die wirksamen electrischen Schwingungen liefern, abwartet. [2])

In jener Arbeit berichteten wir über einen seinerzeit von Hrn. Hagenbach vorgenommenen Versuch, die Blechtafel, welche bei den Hertz'schen Spiegelversuchen den Strahl electrischer Kraft abschneiden soll, nicht nur in der „Querstellung", wie von Hrn. Hertz angegeben, sondern auch in der „Längsstellung" — nämlich in der durch die Fokallinien beider Spiegel gelegten Ebene — zwischen diesen Spiegeln aufzustellen, wodurch gleichfalls die Funken in der secundären Funkenstrecke zum Verschwinden gebracht werden konnten. Weil überdies Anfang und Schluss unserer Arbeit so redigirt sind, dass es den Anschein haben möchte, als wären die Verfasser Gegner der Faraday-Maxwell'schen Theorie, so kann die Vermuthung Platz greifen, es sei der erwähnte Hagenbach'sche Versuch ganz direct als Einwand unsererseits gegen diese Theorie zu betrachten, und in diesem Sinne hat vielleicht Hr. Hertz die Veröffentlichung jenes Versuches aufgefasst. [3]) Ich möchte mich aber meinerseits gegen diese Auffassung verwahren, denn jene auf die Faraday-Maxwell'sche Theorie bezüglichen Stellen sind aus einem Compromiss unserer beiden völlig heterogenen Anschauungen hervorge-

1) Hagenbach u. Zehnder, Verh. d. Basl. nat. Ges. (2) **9.** p. 509; Wied. Ann. **43.** p. 610; Arch. de Genève **26.** p. 21; Exner's Rep. **27.** p. 496. 1891.

2) Hertz, Unters. üb. d. Ausbreit. d. el. Kraft p. 18. Leipzig 1892.

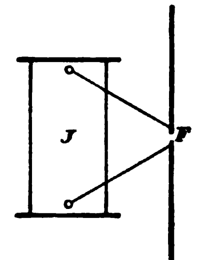
3) Hertz, l. c. p. 18 u. p. 292.

gangen, und insbesondere habe ich schon lange vor der Inangriffnahme unserer gemeinschaftlichen Arbeit die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Schwingungen im Luftraume als durch die bedeutenden Untersuchungen des Hrn. Hertz erwiesen betrachtet; auch habe ich vor der ersten Veröffentlichung unserer mehr erwähnten Arbeit jene Störungen der secundären Funken durch die längsgestellte Blechtafel als Interferenzwirkungen bezeichnet.

2. Nach meiner Auffassung liegt aber der Schwerpunkt unserer Arbeit in der experimentellen Untersuchung von electrischen Vorgängen, welche sich während der Primärfunken im secundären Leiter abspielen. Wir haben dabei gefunden, dass die beiden secundären Leiterhälften nicht regelmässig abwechselnd in gleicher Weise positive und negative Ladungen erhalten, sondern dass sie nach einer gewissen Gesetzmässigkeit eine ausgesprochene Einseitigkeit, eine electrische „Polarität“ erkennen lassen, welche die entgegengesetzte Richtung annimmt, wenn die Richtung der Entladungen im primären Leiter die entgegengesetzte wird. Diese Polarität vermag ich heute so wenig wie damals aus den Hertz'schen Vorstellungen über seine wirksamen primären Funken zu deuten, während aus der Annahme einseitig gerichteter Partialentladungen, wie wir sie in unserer Arbeit aufgestellt haben, nothwendiger Weise auf gewisse Einseitigkeiten bei den im secundären Leiter durch Inductionswirkungen zu Stande kommenden electrischen Bewegungen geschlossen werden muss.

3. Aber nicht nur diese bei unseren Versuchen gefundene Polarität, sondern auch die Hertz'schen Grundversuche selbst und vielleicht sogar alle Versuche mit Hertz'schen electrischen Schwingungen lassen sich in einfacher Weise mit Partialentladungen erklären, wenn man noch die weitere naheliegende Annahme macht, die Zeit vom Entstehen eines ersten Partialfunkens bis zum Entstehen eines zweiten solchen sei — für den experimentell ausprobirten Abstand beider primären Leiterhälften — gleich der von Hrn. Hertz als Schwingungsdauer seines Leiters bezeichneten Zeit, und jene Zeit werde durch das Verschwinden jenes ersten Partialfunkens nahezu halbirt. Denkt man sich nämlich Hertz'sche primäre Leiter linear ausgeführt, mit Stromzuführung unmittelbar neben der Funken-

strecke F, so ist klar, dass bei der Ladung der Leiter die Electricitäten in der Richtung von der Funkenstrecke zu den Enden der Leiter, bei der Entladung in umgekehrtem Sinne strömen müssen, und es wird, wenn nur die Zufuhr der Electricitäten vom Inductorium her eine genügend reichliche ist, ihre Ausgleichung durch Entladung in der Funkenstrecke kaum wesentlich schneller vor sich gehen, als der Ladungsvorgang, sodass also die Bewegung der Electricitäten im primären Leiter im einen Sinne ungefähr ebenso lange andauern wird, als diejenige im anderen Sinne. Die in solcher Weise durch Partialentladungen gegebene Schwingungsdauer der electrischen Bewegungen im primären Leiter ist aber theilweise abhängig nicht nur von der während jedes Inductionsstromes veränderlichen, also mehr oder weniger reichlichen Zufuhr der Electricität durch das Inductorium, sondern auch von der grösseren oder geringeren Leitungsfähigkeit der Funkenstrecke während der Entladung [1]); sie wird somit ihrerseits im Verlaufe jeder zwischen den primären Leiterhälften zu Stande kommenden Gesammtentladung etwas veränderlich sein.



4. Fassen wir die electrischen Schwingungen im Hertz'schen primären Leiter als Partialentladungen von der von mir eben angenommenen Beschaffenheit auf, so haben wir die Reflexion solcher electrischer Schwingungen an Drahtenden und im Luftraume an Drahtgittern oder an ebenen metallischen Wänden mit ihren stehenden Wellen, die Concentration der von einer Linie ausgehenden Strahlen electrischer Kraft durch entsprechende parabolische Cylinderspiegel, sodann die Polarisation und Brechung electrischer Strahlen ganz so zu erklären, wie alles dies von Hrn. Hertz selber schon erklärt worden ist. Ein Unterschied besteht nur in der Deutung des Beobachtungsergebnisses, dass die auftretenden Knoten niemals scharf ausgebildet sind, sondern in bekannter Weise von Knoten zu Knoten an Schärfe verlieren. Abgesehen von dem selbstverständlichen Einfluss der Amplitudenverminderung infolge des Reflexionsvorganges wird dieses Resultat von Hrn. Hertz einer starken Dämpfung

1) Vgl. Hagenbach u. Zehnder, Wied. Ann. 43. p. 614 u. 615. 1891.

im primären Leiter zugeschrieben, während ich dasselbe aus unserer Hypothese der Partialentladungen durch die in 3. erwähnte Veränderlichkeit der Schwingungsdauer der einzelnen aufeinanderfolgenden zu einer Gesammtentladung gehörenden Partialentladungen erklären möchte, der zufolge sich Wellen von etwas ungleicher Wellenlänge übereinander lagern.

5. In anderer Beziehung will mir aber — ungeachtet der verschiedenen Ansichten über die Natur der Hertz'schen electrischen Schwingungen im primären Leiter — die Schlussweise des Hrn. Hertz bei der Discussion der Lage der Knoten und Bäuche der im Luftraume beobachteten stehenden Wellen nicht recht einleuchten. In seiner Arbeit: „Ueber electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion"[1]) schreibt Hr. Hertz nämlich auf p. 614 über die Lage der Knoten bei einer reflectirenden Metallwand: „Wäre die Wand vollkommen leitend, so müsste sich in ihrer Fläche selber ein Knotenpunkt ausbilden. Denn im Innern und an der Grenze eines vollkommenen Leiters kann die electrische Kraft stets nur verschwindend klein sein. Nun kann unsere Wand nicht als vollkommen leitend gelten. Denn zum Theil ist sie nicht einmal metallisch, und soweit sie metallisch ist, ist sie nicht sehr ausgedehnt" etc. Darnach glaubt also wohl Hr. Hertz, dass bei einer vollkommen leitenden, möglicher Weise auch bei einer ganz metallischen reflectirenden Wand von unendlicher Grösse der Knoten in der Wand liegen müsste. Diese Annahme scheint mir aber nicht stichhaltig. Denn durch die an der Wand ankommenden Schwingungen electrischer Kraft e_1 werden in der Wand selbst electrische Schwingungen, Ströme i gleicher Periode, inducirt, und von diesen gehen diejenigen secundären Schwingungen electrischer Kräfte e_2 aus, welche sich mit jenen ankommenden electrischen Kräften e_1 zu stehenden Wellen vor der Wand zusammensetzen. Damit sich nun in der Wand selbst ein Knoten ausbilde, müsste durch diesen Reflexionsvorgang die Phase der Schwingungen der electrischen Kraft um eine halbe Wellenlänge geändert werden, was wohl im allgemeinen nicht der Fall ist. Denn es würde die Phase der in der Wand inducirten electrischen Schwingungen, der Ströme i, unter Annahme der Anwendbarkeit des Ohm'schen

1) Hertz, Wied. Ann. 34. p. 609. 1888.

Gesetzes, gleich der Phase der inducirenden eben aus dem Dielectricum in die Wand eintretenden Schwingungen electrischer Kraft sein. Die von jenen electrischen Schwingungen (i) ausgehenden secundären electrischen Kräfte e_2 sind aber gegeben durch $-di/dt$; sie zeigen nur eine Viertelwellenlänge Phasenänderung gegen i und gegen e_1 als Folge des Reflexionsvorganges, und setzen wir dieselben mit den primären electrischen Kräften zusammen, so ergeben sich vor der reflectirenden Wand stehende Wellen, deren erster Knoten um $^3/_8$ Wellenlängen von der Wand absteht, sodass scheinbar ein Knoten um $^1/_8$ Wellenlänge hinter der Wand liegen wird.

Nehmen wir aber an, das Ohm'sche Gesetz sei für diese schnellen electrischen Schwingungen nicht mehr streng gültig, so müssen wir auf eine Verzögerung der in der Wand inducirten electrischen Schwingungen schliessen, und dementsprechend würde der dadurch hervorgerufenen Phasenänderung zufolge der scheinbare Knoten noch weiter hinter die Wand zu liegen kommen. Andererseits sind unsere wirklichen metallischen Wände nicht unendlich gross, an ihren Rändern kommen Ladungen zu Stande, und demnach werden die in solchen (im Verhältniss zur Wellenlänge der electrischen Schwingungen nicht sehr ausgedehnten) Wänden inducirten electrischen Schwingungen ein entsprechendes Voreilen[1]) zeigen können, in welchem Falle der hinter der Wand liegende scheinbare Knoten sich gegen die Wand hin bewegen wird.[2])

6. Mit diesen Folgerungen scheinen die thatsächlichen Beobachtungen übereinzustimmen, denn Hr. Hertz selber hat bei seinen Messungen stehender electrischer Wellen im Luftraume einen scheinbaren Knoten etwa $^1/_{14}$ Wellenlänge hinter

1) Vgl. Trouton, Phil. Mag. (5) **32.** p. 85. 1891.

2) Das Resultat des in 1. erwähnten Hagenbach'schen Versuches, dass die Funken im secundären Leiter auch zum Verschwinden gebracht werden können durch eine leitende Wand, welche in der „Längsstellung" zwischen die beiden Spiegel geschoben wird, möchte ich im wesentlichen gleichfalls aus einer Phasenänderung herleiten, welche die in jener Wand entstehenden und sich in ihr fortpflanzenden gegen die in der Luft selbst sich weiter bewegenden Schwingungen electrischer Kräfte erhalten, sodass zwischen beiden gegen den secundären Spiegel forteilenden Wellensystemen Interferenzen zu Stande kommen, welche die secundären Funken mehr oder weniger zu stören vermögen.

der Wand gefunden[1]), als er eine der unendlich grossen nahezu gleichwerthige Wand, nämlich ein Zinkblech von 4 m Höhe und 2 m Breite verwendete, welches Blech er „durch Drähte mit den (zahlreich an der Wand sich hinziehenden) Gasleitungen und mit einer nahen Wasserleitung in Verbindung gesetzt und wobei er insbesondere dafür Sorge getragen hat, dass an dem oberen und unteren Ende des Bleches die sich daselbst etwa ansammelnde Electricität möglichst frei abfliessen konnte“.[2]) Mit einer kleineren Wand von nur 3 m Höhe haben die Hrn. Sarasin und de la Rive die Knoten annähernd in der Wand erhalten[3]); und endlich erwähne ich Untersuchungen von Hrn. Trouton[4]), welcher eine Abhängigkeit der Knotenlage von den Dimensionen der reflectirenden Wand gefunden und eingehender untersucht hat.

7. Bei metallischen Wänden von endlichen Dimensionen treten an den entsprechenden Rändern der Blechtafeln während der electrischen Schwingungen periodisch sich ändernde Ladungen auf, und die angesammelten Electricitäten gleichen sich zum Theil auf den Rückflächen solcher Wände aus, sodass sich die electrischen Schwingungen, theilweise wenigstens, um die Ränder herum auf jene Rückflächen fortpflanzen. In diesem Sinne sind auch grosse Wände für electrische Schwingungen doch nicht völlig undurchlässig.

Die Thatsache der theilweisen Durchlässigkeit eines aus parallelen Drähten gebildeten Gitters auch für electrische Schwingungen, welche der Drahtrichtung parallel sind, ist leicht zu verstehen, und sie liess sich bei der von mir kürzlich beschriebenen objectiven Darstellung der Hertz'schen Spiegelversuche[5]) nachweisen, da meine Entladungsröhre in der Focallinie des secundären Spiegels trotz des Zwischenstellens eines solchen Drahtgitters zwischen beide Spiegel doch während des primären Funkenspieles aufleuchtete, wenn nur der Abstand der beiden Spiegel nicht ein so grosser war, dass schon bei geringer Vermehrung desselben das Funken-

---

1) Hertz, Wied. Ann. **34.** p. 619. 1888.
2) Hertz, l. c. p. 611.
3) Sarasin u. de la Rive, Compt. rend. **112.** p. 658. 1891.
4) Trouton, Phil. Mag. (5) **32.** p. 80. 1891.
5) Zehnder, Wied. Ann. **47.** p. 77. 1892.

spiel in der secundären Funkenstrecke der Röhre versagte. Aber auch eine Blechtafel ist in ähnlicher Weise durchlässig. Ich verdeckte nämlich den primären Spiegel durch eine dicht an denselben herangeschobene Blechtafel von der Höhe des Spiegels und von einer so grossen Breite, dass die Tafel auf beiden Seiten den Spiegel um mehr als 20 cm überragte, während der secundäre Spiegel in der gewöhnlichen Anordnung dem primären in einiger Entfernung gegenüberstand. Obgleich ich nun primären und secundären Spiegel, sowie die Blechtafel durch verschiedene Drahtleitungen, welche in fliessendes Leitungswasser tauchten, vollkommen zur Erde ableitete und damit electrostatische Wirkungen abschnitt, wurde meine leicht ansprechende im secundären Spiegel befindliche Entladungsröhre durch das Funkenspiel im primären Leiter doch zum Aufleuchten gebracht, und es unterblieb dies erst, als ich die Verbindungen der secundären Leiterhälften mit der secundären Funkenstrecke der Entladungsröhre löste. So leicht ansprechend war eine von diesen letzteren, dass dieselbe sogar dann im Innern des secundären Spiegels während des primären Funkenspieles aufleuchtete, wenn nur primärer und secundärer Spiegel nahe aneinander gestellt wurden, ihre Oeffnungen nach derselben Richtung gekehrt, ohne dass eine leitende Wand den Strahl electrischer Kraft aus dem primären in den secundären Spiegel reflectirte.[1])

8. Unsere bisherigen Betrachtungen über die Reflexion electrischer Schwingungen liessen sich durchführen, ohne dass es nöthig war, sich der Hertz'schen oder der von mir in 3. erläuterten Auffassung der Natur der Hertz'schen electrischen Schwingungen im primären Leiter anzuschliessen. Hält man aber die primären Schwingungen für Partialentladungen und bezweifelt man damit mehr oder weniger die Möglichkeit des Zustandekommens von electrischen Schwingungen in den Hertz'schen Leitern in dem von Hrn. Hertz angenommenen und von der Theorie als möglich bezeichneten Sinne, dann ist man wohl consequenterweise genöthigt, für die von Hrn. Hertz experimentell constatirte Thatsache, dass gewissen Dimensions-

1) Bei weiter voneinander abstehenden Spiegeln leuchtete eine solche empfindlich eingestellte Röhre zwar nicht mehr ohne jede Reflexion, aber doch schon bei der Reflexion durch den menschlichen Körper auf.

verhältnissen zwischen seinen primären und secundären Leitern ein Maximum der Wirkung der electrischen Schwingungen im primären auf die electrischen Bewegungen im secundären Leiter entspricht, welche Erscheinungen derselbe als electrische *Resonanz* bezeichnete, eine neue Erklärung zu geben. Ich möchte deshalb im Folgenden zu zeigen versuchen, dass sich das Auftreten einer solchen Maximalwirkung auch unter der Annahme von Partialentladungen im primären Leiter verstehen lässt, wenn man die secundären Leiter als ungeschlossene Leiter auffasst, wie sie ja den thatsächlichen Verhältnissen bei den Hertz'schen Versuchen stets entsprechen.

Von Partialentladungen, welche, wie ich in 3. erläutert habe, genügend rasch und in annähernd gleichen Intervallen aufeinander folgen, werden mehr oder weniger periodisch und gleichmässig sich ändernde electromotorische Kräfte in ihrer Richtung regelmässig miteinander abwechselnd — in positiver und negativer Richtung wirkend — in den Raum hinausgesandt. Trifft eine solche erste electromotorische Kraft zum Beispiel einen aus zwei gleichen Hälften bestehenden dem primären parallel gestellten geradlinigen secundären Leiter, so bewirkt dieselbe in beiden Leiterhälften eine Electricitätsvertheilung, welche mit der electromotorischen Kraft (ihr etwas nacheilend) zu- und abnehmen wird. Nach Aufhören dieser electromotorischen Kraft sucht sich im secundären Leiter der frühere Zustand wieder vollständig herzustellen. Ist also durch die erste electromotorische Kraft in der Funkenstrecke dieses Leiters ein Funke eingeleitet und dadurch eine gewisse Electricitätsmenge aus seiner einen Hälfte in die andere übergeführt worden, so strömen nach der Abnahme jener electromotorischen Kraft die Electricitäten zur Funkenstrecke zurück, suchen sich in ihr wiederum auszugleichen. Auf die erste folgt sodann die zweite entgegengesetzt gerichtete electromotorische Kraft. Sind nun die Längen der secundären Leiterhälften gerade so ausprobirt, dass diese zweite electromotorische Kraft in demjenigen Augenblicke an der secundären Funkenstrecke die grösstmögliche Potentialdifferenz hervorbringt, in welchem durch das Zurückströmen der, durch jene erste electromotorische Kraft geschiedenen, Electricitäten gleichfalls die grösstmögliche Potentialdifferenz an der nämlichen Funken-

strecke erzeugt wird, dann addiren sich diese Potentialdifferenzen, sodass wir ein Maximum derselben und demnach ein Maximum des gesammten Funkenspieles erhalten; denn ganz ähnlich werden nun die dritte electromotorische Kraft mit der zweiten, die vierte mit der dritten zusammenwirken etc. — Sind die secundären Leiter nicht geradlinig, sondern kreisrund oder rechteckig geformt, so werden doch in analoger Weise wie angegeben bei gewissen Dimensionsverhältnissen in ihnen Maximalwirkungen zu Stande kommen, sie werden auf electrische Schwingungen von bestimmter Periode am leichtesten ansprechen, auch wenn die in ihnen inducirten electrischen Bewegungen, ohne von langsam absterbenden electrischen Schwingungen gefolgt zu werden, aufhören, sobald einmal die sie inducirenden electrischen Bewegungen im primären Leiter — die Partialentladungen — verschwunden sind.

9. Mit zwei Folgerungen aus der Annahme von Partialentladungen, dass nämlich secundäre Leiter bei gewissen ihnen eigenthümlichen Schwingungsdauern auf electrische Impulse am leichtesten ansprechen, und dass die so wenig scharf ausgebildeten Knoten stehender electrischer Wellen (4.) doch secundäre Leiter noch ansprechen lassen, haben wir diejenigen Grundlagen gewonnen, auf deren Basis die Hrn. Hertz, Bjerknes und Poincaré die von den Hrn. Sarasin und de la Rive gefundene Erscheinung der multiplen Resonanz so gedeutet haben[1]), wie sie auch mittels der Partialentladungen zu deuten ist.

Indem ich glaube, dass die übrigen Versuche mit Hertz'schen electrischen Schwingungen unter der Annahme von Partialentladungen sich gleichfalls erklären lassen, möchte ich nochmals hervorheben, dass diese meine Auffassung der Reflexion und Resonanz electrischer Schwingungen mit den experimentellen Resultaten unserer Basler Versuche, welche eine electrische Polarität im secundären Leiter ergaben, in bester Uebereinstimmung steht, während mir diese Resultate mit der Anschauungsweise des Hrn. Hertz über die Natur seiner schnellen electrischen Schwingungen nicht vereinbar erscheinen.

Freiburg i. B., Januar 1893.

---

1) Hertz, Ueb. d. Ausbr. d. el. Kr. p. 17 u. 18. Leipzig 1892.

11. *Ueber die Eigenschaften der Lösungen, welche Amine mit Säuren bilden; von D. Konowalow.*

I.

Das electrische Leitungsvermögen.

In der letzten Zeit hat man viele Regelmässigkeiten gefunden, welche Lösungen, namentlich verdünnte, als Gemenge, ähnlich den Gasgemengen, betrachten lassen. Das Bestehen solcher Regelmässigkeiten erleichtert das Auffinden der Beziehungen zwischen verschiedenen Eigenschaften der Lösungen, gibt jedoch keinen Aufschluss über den Chemismus derselben. Es ist klar, dass Lösungen einen intermediären Zustand zwischen Gasgemengen und bestimmten chemischen Verbindungen darstellen und, wenngleich sie gewisse Eigenschaften der Gasgemenge besitzen, so lassen sie oft auch deutliche Zeichen des Bestehens bestimmter chemischer Verbindung erkennen. Diese Eigenthümlichkeit der Lösungen stellt ihren Hauptwerth für zukünftige Theorien der chemischen Affinität dar. Es ist anzunehmen, dass wir bestimmte chemische Verbindungen in Lösungen in einem ähnlichen Zustande vorfinden werden, wie ihn Gase oder Flüssigkeiten in der Nähe des kritischen Zustandes vorstellen.

In der Absicht, Material für das Studium des Chemismus der Lösungen zu sammeln, habe ich mir die Untersuchung solcher Mischungen zur Aufgabe gestellt, welche alle Eigenschaften der Lösungen besitzen und zu gleicher Zeit sich durch die Fähigkeit, einfache chemische Verbindungen zu bilden, auszeichnen. Solchen Forderungen entsprechen Lösungen, welche Amine mit Säuren bilden. Ammoniak und Amine bilden mit Säuren einfache Salze, welche sich sowohl im Ueberschuss von Basen als auch von Säuren lösen. Solche Lösungen können mehrere Verbindungen der Base mit der Säure geben. Manchmal aber mischen sich Amine mit Säuren in allen Verhältnissen und geben Lösungen, welche gar keine Verbindungen nach bestimmten Verhältnissen ausscheiden. In solchen Fällen hat man allmähliche Uebergänge zwischen Lösungen und bestimmten

chemischen Verbindungen. So bildet zum Beispiel Anilin mit Ameisensäure (wie überhaupt mit starken Säuren) ein krystallinisches Salz, mit Essigsäure mischt es sich aber in allen Verhältnissen und bildet Lösungen, welche bei Zimmertemperatur gar keine krystallinische Verbindungen ausscheiden und nur, je nach den Mischungsverhältnissen, durch mehr oder weniger bedeutende Zähigkeit sich auszeichnen. Der Chemismus solcher Lösungen äussert sich auch deutlich im bedeutenden Wärmeeffect der Vermischung. Geht man aber zu den nächsten Homologen der Essigsäure über, so sieht man auch diese Aeusserung chemischer Affinität beim Mischen mit Anilin schwächer und schwächer werden. Durch das Studium der Eigenschaften dieser Mischungen kann man also den Chemismus der Lösungen Schritt für Schritt verfolgen.

Die nachstehende Mittheilung bezieht sich auf die Leitfähigkeit dieser Lösungen. Nach F. Kohlrausch leitet ungemischt bei Zimmertemperatur keine Flüssigkeit electrolytisch. Worin besteht nun die Aenderung, welche die gelöste Flüssigkeit erleidet und welche ihr diese merkwürdige Eigenschaft mittheilt? Eine ganz bestimmte Antwort darauf gibt die viel discutirte Theorie der electrolytischen Dissociation. Die Schlussfolgerungen dieser Theorie werden aber nur durch die Annahme ermöglicht, dass ein Electrolyt in einer Lösung Ionendissociation auf dieselbe Art erleidet, wie es im Vacuum geschehen würde. Etwaige chemische Wirkung zwischen dem Electrolyten und dem ihn lösenden Medium bleibt unberücksichtigt. Es sind aber gerade die gut leitenden Lösungen, welche sich durch deutliche Merkmale des Chemismus auszeichnen. Die besten Leiter zweiter Klasse sind Lösungen von Schwefelsäure in Wasser, und es ist schwer, in diesen Lösungen die Möglichkeit chemischer Verbindungen von Wasser und Schwefelsäure auszuschliessen. Nach den bisherigen Untersuchungen besitzt namentlich Wasser im hohen Grade die Eigenschaft, dem gelösten Electrolyten Leitfähigkeit mitzutheilen, zu gleicher Zeit beobachtet man bei keinem anderen Lösungsmittel die Fähigkeit, so zahlreiche bestimmte Verbindungen zu bilden, wie es im Falle von Mischungen von Wasser und Electrolyten ist.

Bei der Untersuchung der Leitfähigkeit der von mir aus-

gewählten Lösungen habe ich mir die Aufgabe gestellt zu prüfen, in welchem Maasse die Schlussfolgerungen der Dissociationstheorie sich auf diese Lösungen anwenden lassen und welche Beziehungen zwischen Leitfähigkeit und Neigung zur Bildung bestimmter chemischer Verbindungen in diesen Fällen bestehen.

Die *Untersuchungsmethode* war die von F. Kohlrausch[1]), wobei Gefässe angewandt wurden von der Form, wie sie Arrhenius angegeben. Die obere Platinplatte war durchbohrt und die Thermometerkugel befand sich zwischen dem Electroden. Ein an dem Deckel befestigter Gummiring bildete einen luftdichten Verschluss, welcher vermittels des ganzen Electrodensystems die Mischung der Lösung zu bewirken erlaubte. Die Herstellung der Mischungen geschah im Electrodengefässe, indem eine Menge Säure (selten Amin) in demselben verdünnt wurde. Abgemessen wurden bestimmte Quantitäten von Säure oder Amin vermittels Büretten. Da diese Methode infolge der durch grosse Zähigkeit der von mir benutzten Amine bedingten Benetzung der Bürettenwandung bedeutende Fehler geben würde, so construirte ich, um dieselben zu vermeiden, folgende Bürette: Der Apparat (Fig. 1) bestand aus einer Bürette *B* mit einem Dreiweghahn (*c*) und einem an dieselbe angelötheten Gefässe (*D*), bestimmt zur Aufnahme der betreffenden Flüssigkeit. Nachdem der ganze Apparat mit Quecksilber angefüllt, wurde die Ausflussröhre *a* des Gefässes *D* in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht. Durch geeignete Stellung des Hahnes *c* wurde das Ausfliessen des Quecksilbers aus dem Gefässe *D* erreicht und füllte sich dasselbe infolgedessen mit der betreffenden Flüssigkeit. Das Ausfliessen der Amine aus dem Bürettengefässe erreichte ich

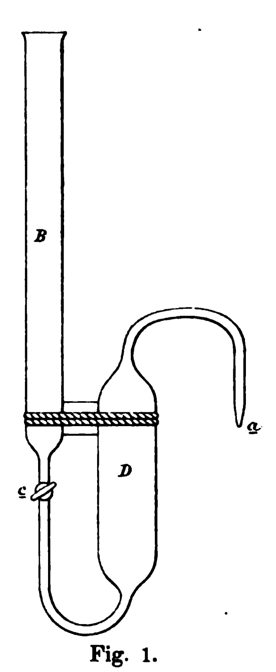


Fig. 1.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 11. p. 653. 1886.

durch Verdrängen desselben vermittels Quecksilbers, dessen Volumen genau (bis zu 0,01 Proc.) an der Bürette abgelesen wurde.

Das Material war: Anilin, *o*-Toluidin (1,2), Methylanilin, Dimethylanilin, Essig-, Propion- und Buttersäure. Sämmtliche Stoffe waren von Kahlbaum bezogen. Die Amine wurden mit Aetzkali getrocknet und unter vermindertem Drucke destillirt; Säuren wurden kurze Zeit mit Phosphorsäureanhydrid geschüttelt und fractionirt. Essigsäure und Dimethylanilin habe ich ausserdem mehrmals krystallisirt und Essigsäure mit dem Schmelzpunkt 16,7°, Dimethylanilin — 2,3° erhalten.

Resultate: In den nachstehenden Tabellen bedeuten: P_a die Quantitäten des Amins, welche 100 Gewichtstheile Lösung enthalten und K die mit 10^8 multiplicirte Leitfähigkeit der Lösungen in Quecksilbereinheiten. Alle Zahlen beziehen sich auf 21°. Nur bei den Mischungen von Anilin und Essigsäure ist ausserdem eine Reihe Bestimmungen bei 17° ausgeführt worden. Die Differenz der Zahlen für die Temperaturen von 21° und 17°, dividirt durch 5, ist als Temperaturcoefficient für diese Mischungen beigefügt.

I. Anilin und Essigsäure. Leitungsfähigkeit.

P	K_{21}	K_{16}	$\alpha = \frac{K_{21} - K_{16}}{5}$	$\frac{100\,\alpha}{K_{16}}$
4,00	2,67	—	—	—
11,36	19,11	16,10	0,60	3,72
15,82	24,80	20,80	1,02	4,88
20,60	27,05	21,60	1,09	5,00
24,03	26,94	—	—	—
24,48	26,91	21,26	1,13	5,31
27,12	26,60	20,65	1,19	5,76
29,10	26,22	20,22	1,20	5,94
31,24	25,63	19,56	1,21	6,18
32,80	25,34	19,19	1,23	6,40
33,58	25,07	—	—	—
33,91	24,89	—	—	—
35,01	24,72	18,72	1,20	6,41
37,33	24,39	18,56	1,17	6,30
40,60	23,89	—	—	—
41,92	23,66	18,17	1,10	6,05
45,64	23,15	—	—	—
48,76	22,76	17,53	1,04	5,93
49,94	22,64	—	—	—
54,40	21,37	16,83	0,91	5,40
57,15	20,25	16,17	0,81	5,01

P	K_{21}	K_{16}	$\alpha = \frac{K_{21} - K_{16}}{5}$	$\frac{100\,\alpha}{K_{16}}$
59,41	19,20	—	—	—
60,42	18,62	—	—	—
64,04	16,52	13,75	0,55	4,00
68,14	13,15	—	—	—
72,75	8,54	7,74	0,16	2,06
74,50	6,84	6,28	0,11	1,75
78,80	3,54	3,45	0,02	0,58
81,80	1,93	—	—	—
82,30	1,66	1,66	0	0
82,65	1,47	1,49	−0,004	−0,27
84,70	0,81	0,85	−0,008	−0,94
87,10	0,39	0,41	−0,004	−0,98
90,00	0,13	—	—	—
92,05	0,06	—	—	—
93,57	0,04	—	—	—
95,23	0,02	—	—	—

II. Methylanilin und Essigsäure.

P_a	K_{21}	P_a	K_{21}	P_a	K_{21}
9,72	14,03	35,02	25,72	72,01	2,91
16,41	25,37	38,98	24,08	73,93	2,05
18,06	26,91	43,84	21,30	76,14	1,41
20,39	28,16	50,26	17,33	78,18	0,94
22,30	28,63	54,17	14,34	80,21	0,56
23,03	28,77	61,17	9,39	82,71	0,29
25,17	28,75	62,91	8,03	83,13	0,26
28,06	28,35	65,69	6,35	85,26	0,13
31,77	27,22	68,10	4,82	91,70	0,01

III. *o*-Toluidin und Essigsäure.

P_a	K_{21}	P_a	K_{21}	P_a	K_{21}
14,89	16,09	30,66	16,62	54,30	9,61
16,22	17,04	35,55	15,10	58,36	8,01
16,50	17,18	37,30	14,64	62,21	6,29
18,73	18,10	41,81	13,40	65,66	4,55
20,89	18,40	44,45	12,77	69,43	2,82
22,57	18,44	48,26	11,59	72,82	1,74
24,20	18,29	49,00	11,37	75,93	0,92
27,17	17,63	50,08	11,04	78,05	0,54
29,27	17,00	52,22	10,34	80,63	0,25

IV. Dimethylanilin und Essigsäure.

P_a	K_{21}	P_a	K_{21}
12,46	17,27	24,37	21,48
13,86	18,92	27,00	20,10
16,18	20,87	39,04	12,90
16,98	21,32	55,06	4,00
18.25	21,84	61,17	1,87
21,61	22,08	66,76	0,74
21,76	22,06	72,19	0,24
22,41	21,98	79,80	0,03
23,00	21,84	85,00	<0,01

V. Anilin und Propionsäure.

P_a	K_{21^0}
14.32	0,66
22,30	3,56
29,68	5,98
36,46	6,73
42,61	6,35
49,40	4,99
55,51	3,40
60,76	2,05
65,90	1,07
70,49	0,53

VI. Anilin und Buttersäure.

P_a	K_{21^0}
15,65	0,06
27,10	0,67
36,80	1,03
44,73	0,86
51,35	0,61
58,30	0,33
62,00	0,22
70,96	0,08
76,50	0,04

Fig. 2 gibt die graphische Darstellung der oben angeführten Resultate. Als Abscissen sind die Procentgehalte des Amins der Lösung, als Ordinaten die electrischen Leitungsvermögen derselben eingetragen. Vor allem fallen die bedeutenden Verschiedenheiten zwischen den einzelnen Curven ins Auge. Besonders gross sind diese Verschiedenheiten für diejenigen Lösungen, welche aus den analogsten Paaren der untersuchten Flüssigkeiten gebildet wurden. *Die Curven der Lösungen von Anilin und Essig-, Propion- und Buttersäure sind nicht nur in ihrem Aussehen sehr verschieden, sondern unterscheiden sich auch ganz besonders durch ihren Abstand von der Abscissenaxe.* Das maximale Leitungsvermögen beträgt für Lösungen von Anilin und Essigsäure 27.05, Anilin und Propionsäure 6,9. Anilin und Buttersäure 1.05 Proc. Bedeutend geringere Unterschiede im Werthe des maximalen Leitungsvermögens zeigen Lösungen, welche aus Essigsäure und verschiedenen Aminen (Anilin, Toluidin, Methylanilin, Dimethylanilin) bestehen und

die Curven des Leitungsvermögens unterscheiden sich in diesen Fällen vornehmlich durch ihre Form.

Es scheint also, dass das electrische Leitungsvermögen der untersuchten Lösungen durch einen eigenthümlichen Einfluss der Säure bedingt wird. Dieser Einfluss ist demjenigen ähnlich, wie ihn das Wasser auf die gelösten Electrolyte ausübt und dadurch das Leitungsvermögen hervorruft. Zugleich erscheint der Umstand bemerkenswerth, dass die untersuchten Amine, obwohl sie in wässerigen Lösungen fast vollständig Nichtleiter sind, in Essigsäure gelöst dagegen bedeutendes

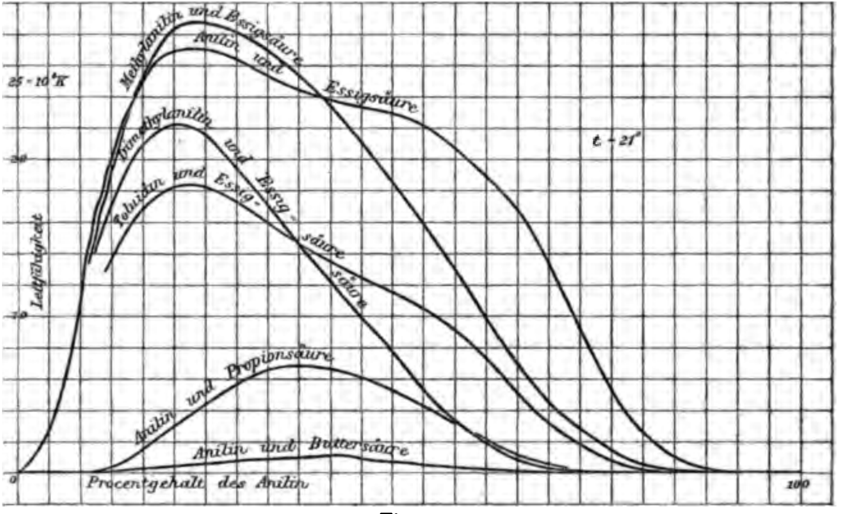


Fig. 2.

Leitungsvermögen besitzen. Den Grund dafür könnte man zu allererst in der Bildung einfacher Salze (d. i. Salze, die durch Vereinigung je eines Molecüls Amin und Säure entstehen) in diesen Lösungen erkennen, doch steht eine solche Voraussetzung nicht im Einklange mit den beobachteten Erscheinungen. Bei Zimmertemperatur besitzen Salze kein Leitungsvermögen. Zwar sind alle in dieser Hinsicht untersuchten Salze bei gewöhnlicher Temperatur feste Körper, während ich mit Flüssigkeiten zu thun hatte. Doch sind auch flüssige, salzähnliche Verbindungen (z. B. $SnCl_4$, N_2SO_4) bei gewöhnlicher Temperatur Nichtleiter. Andererseits entspricht in keinem der von mir untersuchten Fälle das maximale Leitungsvermögen einem

Verhältniss von einem Molecül Säure auf ein Molecül Amin, sondern ist stets nach der Seite der Lösungen mit grösserem Säuregehalt verschoben. Lösungen von Buttersäure und Anilin, deren Leitungsvermögenscurve die grösste Symmetrie von allen Curven aufweist, zeichnen sich zu gleicher Zeit durch einen unbedeutenden Werth des maximalen Leitungsvermögens aus. Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure zeigen dagegen den geringsten Grad der Symmetrie ihrer Curven. In diesem Falle lassen sich ganz bedeutende Unterschiede im Leitungsvermögen beobachten, je nachdem die Lösungen einen Ueberschuss von Säure, resp. Amin enthalten. Lösungen, enthaltend auf ein Molecül Dimethylanilin ein Molecül Säure, besitzen ein geringes Leitungsvermögen, 0,74, bei zwei Molecülen Dimethylanilin wird das Leitungsvermögen schon verschwindend klein, 0,08, während bei einem Ueberschusse von Säure das Leitungsvermögen den Werth von 22,1 erreicht.

Sollte man daher in den von mir untersuchten Lösungen die Bildung einfacher Salze der Amine zulassen, so muss auch angenommen werden, dass diese einfachen Salze infolge einer eigenartigen Einwirkung der Säure auf dieselben Leitungsfähigkeit erhalten. Diese Einwirkung kann in der electrolytischen Dissociation der neutralen Salze unter dem Einfluss des Ueberschusses von Säure bestehen. Bedeutend einfacher erscheint jedoch die Annahme, dass namentlich die sauren Salze electrolytisch leiten und dass in Fällen, wo solche Salze sich bilden können, Lösungen als Leiter erscheinen. Die Fähigkeit von Essigsäure, saure Salze zu bilden, ist allgemein bekannt. Es ist auch wohl anzunehmen, dass diese Fähigkeit, wenn auch in verschiedenem Maasse, anderen Säuren dieser Reihe zukommt. Die verschiedene Stabilität solcher Verbindungen muss auch grosse Verschiedenheiten im Leitungsvermögen dieser Lösungen hervorrufen. In jedem Falle muss Leitungsvermögen zu beobachten sein in Lösungen, welche einen Ueberschuss an Säure enthalten. Im Einklange mit solcher Voraussetzung stehen die oben angeführten Resultate. Die Curven des Leitungsvermögens zeigen, trotz ihrer Verschiedenheit, doch folgende allgemeine Merkmale: In allen Lösungen besass die Säure das geringere Moleculargewicht und Volumen. Es wurde schon darauf hingewiesen, dass die Curven nach der

Seite der Lösungen mit einem Ueberschusse der Säure verschoben sind. *Diese Asymmetrie der Curven des Leitungsvermögens ist um so grösser, je relativ geringer das Moleculargewicht und Volumen der Säure ist.* Wird also das electrische Leitungsvermögen durch Bildung saurer Salze bedingt, so muss man schliessen, dass ein relativ geringes Moleculargewicht und Volumen der Säure eine günstige Bedingung für das Entstehen eben dieser sauren Salze ist. Eine solche günstige Bedingung für die Bildung complicirter Verbindungen finden wir auch deutlich im Falle von Wasser, eines Körpers, der sich durch geringes Moleculargewicht und Volumen auszeichnet. Nirgends beobachtet man zahlreichere und mannigfaltigere complicirte Verbindungen, wie im Falle des Wassers.

Auf die Bildung bestimmter Verbindungen in den untersuchten Lösungen weist der Verlauf des mittleren Theiles der Curve des Leitungsvermögens der Lösungen von Anilin und Essigsäure hin. Die Curve zeigt drei scharf ausgeprägte Krümmungen, Lösungen von ungefähr folgender Zusammensetzung entsprechend: 20,5 Proc. (Maximum); 34 Proc. und 51 Proc. Anilin. Setzen wir den Anilingehalt dieser Lösungen gleich 1, so wird der Gehalt an Essigsäure gleich 3,88, 1,94 und 0,97 sein. Diese Zahlen stehen in einem einfachen Verhältniss untereinander, denn sie verhalten sich wie 4:2:1 und lassen folglich das Grundmerkmal chemischer Verbindungen erkennen. Und wirklich stimmt die Zusammensetzung dieser Lösungen sehr nahe überein mit der von den Formeln:

$$6\,H_4C_2O_2 + C_6H_5\,.\,NH_2$$
$$3\,H_4C_2O_2 + C_6H_5\,.\,NH_2$$
$$3\,H_4C_2O_2 + 2\,C_6H_5\,.\,NH_2$$

verlangten.

Die übrigen angeführten Curven lassen keine so scharf ausgesprochenen Krümmungen erkennen. Wie schon früher darauf hingewiesen, stehen eben Lösungen von Anilin und Essigsäure von allen untersuchten Flüssigkeitspaaren bestimmten chemischen Verbindungen am nächsten.

Verdünnte Lösungen sind von besonderer Bedeutung für die electrolytische Dissociationstheorie. Dieser Theorie gemäss muss in erster Linie mit Abnahme der Concentration der Lösung das specifische Leitungsvermögen (das Leitungsvermögen

getheilt durch den Gehalt des Stoffes in der Volumeneinheit der Lösung) wachsen.

Einer solchen Forderung kann nur eine convexe Form des Anfanges der Curve entsprechen, welche die Abhängigkeit des Leitungsvermögens von der Concentration der Lösung ausdrückt. Wie die Tabelle (A) zeigt, sind die Curven für die Lösungen *in Aminen* concav. Zwar ist der Gehalt in Gewichtseinheiten ausgedrückt, jedoch infolge der nahen Werthe der specifischen Gewichte der untersuchten Flüssigkeiten behalten die Curven auch für Volumenprocente dieselbe Form. Augenscheinlich erscheint auch die Curve für Lösungen von Anilin *in Propionsäure* concav. Um beurtheilen zu können, in welchem Maasse diese Eigenthümlichkeit der Curven des Leitungsvermögens auch in anderen Fällen von Lösungen *in Säuren* hervortritt, habe ich Lösungen von Anilin und Dimethylanilin im Ueberschusse von Essigsäure genau untersucht. Die erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle mitgetheilt. Ausser dem Werthe des electrischen Leitungsvermögens 10^8 (K_{21}), sind noch gegeben: μ — das specifische Leitungsvermögen, d. i. 10^8 (K / P_a) und Δ der Zuwachs des electrischen Leitungsvermögens, einem Procent entsprechend, d. i. $10^8 (K^2 - K^1 / p^2 - p_1)$. Diese letztere Grösse stellt den annähernden Werth des Differentialquotienten (dk / dp) dar.

VII. Anilin und Essigsäure.

P_a	K_{21^0}	μ	Δ
0,31	0,02	0,07	—
0,63	0,05	0,09	0,10
1,87	0,43	0,23	0,30
2,66	1,04	0,39	0,77
3,52	2,04	0,58	1,13
4,80	4,21	0,88	1,69
6,07	7,12	1,17	2,28
6,97	9,23	1,33	2,48
8,00	11,89	1,48	2,45
9,06	14,47	1,60	2,43
10,55	17,71	1,68	2,17
11,42	19,41	1,70	1,95
12,33	21,09	1,69	1,73
13,94	23,03	1,66	1,42
15,72	25,05	1,59	0,98
17,47	26,07	1,49	0,70
19,25	26,74	1,38	0,38
20,55	27,07	1,32	0,25
21,66	27,01	1,25	−0,07

VIII. Dimethylanilin und Essigsäure.

P_a	K_{210}	μ	Δ
0,55	0,06	0,11	—
1,04	0.15	0,15	0,18
2,01	0,53	0,26	0,38
2,97	1,25	0,42	0,75
3,90	2,41	0,62	1,26
4,83	3,87	0,80	1,56
5,72	5,51	0,96	1,73
7,47	9,20	1,24	2,11
9,15	12,79	1,40	2,09

Wie aus der Tabelle ersichtlich, nimmt der Werth des specifischen Leitungsvermögens auch in diesen Fällen mit steigender Concentration der Lösung zu. Die Zunahme von μ beginnt mit Lösungen, welche ein ganz unbedeutendes Leitungsvermögen derselben Ordnung zeigen, wie das des gut gereinigten Wassers. Jedoch beobachtet man einen so unbedeutenden Werth des Leitungsvermögens noch in Lösungen, welche einen nicht ganz geringen Gehalt an Amin besitzen, die also noch sehr weit vom Zustande unendlicher Verdünnung entfernt sind. Auch in diesen Fällen, wie in Lösungen, welche einen Ueberschuss an Amin enthalten, haben wir dieselbe Erscheinung, dass nämlich bei genügendem Ueberschusse des Lösungsmittels, jedoch bei noch nicht unendlicher Verdünnung, das electrische Leitungsvermögen verschwindend klein wird. Lösungen, welche einen Ueberschuss an Amin enthalten, lassen diese Erscheinung nur bedeutend schärfer hervortreten, besonders scharf in Lösungen von Essigsäure in Dimethylanilin. Bei einem Verhältniss von Dimethylanilin zur Säure wie 2 : 1 wird in diesem Falle das Leitungsvermögen verschwindend klein. Folglich erhöht ein Ueberschuss des Lösungsmittels in den von mir untersuchten Fällen im allgemeinen nicht die Activität des gelösten Stoffes, wie es die Theorie der electrolytischen Dissociation verlangt. Vielmehr wird durch einen Ueberschuss jene eigenartige Einwirkung des Lösungsmittels gleichsam erschöpft, welche das electrische Leitungsvermögen der Lösung bedingte, und die Lösung hört auf Leiter zu sein, noch bevor die Verdünnung unendlich gross geworden. Die beschriebene Erscheinung bildet keine ausschliessliche Eigen-

thümlichkeit der von mir untersuchten Lösungen. In wässerigen Lösungen scheint diese Erscheinung ein allgemeines, charakteristisches Merkmal von Lösungen mit geringem Wassergehalt zu sein. So erscheint die Curve des Leitungsvermögens von Lösungen von Wasser in Essigsäure concav und bei einem Wassergehalt, der noch einige Procente beträgt, wird das electrische Leitungsvermögen verschwindend klein.[1])

Als gutes Beispiel für dieselben Beziehungen können Lösungen von Wasser in Dichloressigsäure, die in meinem Laboratorium von Hrn. Isaposhnikow untersucht wurden, dienen, wie aus folgender Tabelle hervorgeht, wo P_w den Procentgehalt des Wassers dieser Lösung und 10^8 (k) das electrische Leitungsvermögen bei 17,5° bezeichnet:

P_w — 1,044; 3,65; 8,22; 11,96; 15,88; 20,47;
10^8 (K) — 0,02; 0,22; 2,03; 6,56; 16,16; 37,17.

Diese Eigenthümlichkeit von Lösungen von Wasser im Ueberschusse eines Electrolyten könnte man dadurch erklären, dass das Wasser selbst Nichtleiter ist und eine electrolytische Dissociation nur im geringen Maasse erleidet. In den von mir untersuchten Fällen lässt sich aber diese Eigenthümlichkeit sowohl für Lösungen, enthaltend die eine oder die andere der Componenten im Ueberschusse, beobachten.

Charakteristisch für Lösungen, welche einen Ueberschuss an Wasser enthalten, ist das beständige Wachsen des specifischen Leitungsvermögens, die beständige Zunahme der Activität des gelösten Körpers zugleich mit abnehmender Concentration. Hier entspricht nicht nur die Form der Curve den Forderungen der electrolytischen Dissociationstheorie, in vielen Fällen lässt sich auch die Abhängigkeit zwischen der Concentration und dem electrischen Leitungsvermögen hinreichend durch Gleichungen der gewöhnlichen Dissociationstheorie ausdrücken, wie es die Hrn. van't Hoff, Reichert und Ostwald gezeigt haben. Es stehen jedoch die Forderungen dieser Theorie im Widerspruche mit den Erscheinungen, die wir für den Fall anderer Lösungsmittel als Wasser beobachten. Andererseits kann die Anwendbarkeit dieser Theorie ausschliesslich nur in Bezug auf wässerige Lösungen wohl kaum

1) Untersuchungen von F. Kohlrausch.

als gewichtiges Beweismittel für die Theorie dienen, in Anbetracht eben der ausschliesslichen Eigenschaften des Lösungsmittels — des Wassers — selbst. Die oben angegebenen Resultate geben Grund zur Annahme, dass die Eigenthümlichkeit wässeriger Lösungen vor allem durch das geringe Moleculargewicht und Volumen des Wassers bedingt sei. In den von mir untersuchten Fällen erscheint der convexe Theil der Curven nach der Seite der Flüssigkeit mit geringerem Moleculargewicht und Volumen verschoben. In den wässerigen Lösungen ist dieser convexe Theil selbst in sehr verdünnten Lösungen zu erkennen, wie es auch für ein Lösungsmittel von sehr geringem Moleculargewicht und Volumen nach dem Obigen sein musste.

Während nun obige Resultate mit den Forderungen der electrolytischen Dissociationstheorie nicht übereinstimmen, äussern sie ähnliche Merkmale chemischer Verbindung, wie sie für Lösungen mittlerer Concentration angedeutet waren. Wie aus der Tabelle VII zu sehen, stellen μ und $\varDelta$ Maxima dar, welche eine Aenderung im Verlauf der Curve des Leitungsvermögens erkennen lassen. Diese Maxima entsprechen Lösungen von ungefähr folgender Zusammensetzung: 6—7 Proc. (Maximum $\varDelta$) und 11,5 Proc. (Maximum μ). Setzen wir auch hier die Menge von Anilin als Einheit, so finden wir den Gehalt an Essigsäure gleich 7,7 und etwa 15 Proc. Beide Zahlen setzen die oben angeführte Reihe von Zahlen, welche den Krümmungen des mittleren Theiles der Curve des Leitungsvermögens entsprechen, fort. Vollständig erscheint die Reihe dieser Zahlen wie folgt:

0,97; 1,94; 3,88; 7,70; 15.

Zu den obengenannten Formeln können wir folglich noch folgende hinzufügen: $A + 12K$ und $A + 24K$.

Oefter schon ist die nahe Uebereinstimmung mit einfachen Molecularformeln der Zusammensetzung der Lösungen bemerkt worden, welche hervorragenden Punkten im Verlaufe einer Curve ihrer Eigenschaften entsprechen. Eigenthümlich in dem hier beschriebenen Falle ist der Umstand, dass wir in ein und derselben Curve eine ganze Reihe solcher Punkte haben und dass die Zusammensetzung der ihnen entsprechenden Lösungen einer einfachen multiplen Proportion entspricht. In dem gegebenen Falle kommt der Chemismus der Lösung in der einfachsten Form zum Ausdruck.

Einfluss des Wassers auf die Leitfähigkeit der untersuchten Lösungen. Es fragt sich nun, in welchem Maasse die erhaltenen Resultate sich auf die wasserfreien Stoffe beziehen und ob nicht die beobachtete Leitfähigkeit durch unvermeidliche Spuren von Wasser bedingt sei. Um diese Frage beantworten zu können, habe ich die Leitfähigkeit einiger Lösungen von Anilin und Essigsäure vor und nach Zusatz kleiner Wassermengen bestimmt. Es erwies sich dabei, dass ein Zusatz von etwa $^1/_{10}$ Proc. Wasser in Lösungen mit nicht zu geringem Säuregehalt keine merkliche Veränderung der Leitfähigkeit hervorruft.

Einfluss der Zeit. Bekanntlich kann Anilin mit Säuren Anilide bilden und so war eine Aenderung der Leitfähigkeit dieser Lösungen mit der Zeit zu erwarten. Die Reaction verläuft aber bei Zimmertemperatur sehr langsam. Und in der That behielten die Lösungen ihre Leitfähigkeit im Verlaufe von 24 Stunden unverändert. Nach Verlauf von 6 Monaten fand ich die Leitfähigkeit um ungefähr 30 Proc. verringert und liessen sich dann in den Lösungen grössere Mengen von Acetanilid nachweisen.

Gefrierpunkte von Lösungen.

Untersucht wurden Lösungen von Anilin in Essigsäure. Für eine jede Reihe von Bestimmungen wurden ungefähr 180 g Essigsäure verwandt, wobei ich das Anilin nach und nach hinzufügte. Die Ueberkaltung der Lösung betrug 1,5°. Das Gefrieren wurde durch Einwerfen eines Krystalls Essigsäure hervorgerufen. Von dem Einflusse der äusseren Temperatur war der Gefrierapparat durch ein grosses Doppelgefäss mit Wasser geschützt, dessen Temperatur von der des Gefrierpunktes der Lösung sich um 0,1 — 0,2° unterschied. Der Gefrierpunkt einiger Lösungen wurde am nächsten Tage nochmals bestimmt; die beiden gefundenen Werthe stimmten gut überein. Folglich ändert sich der Gefrierpunkt dieser Lösungen innerhalb 24 Stunden nicht merklich, wie es auch für das electrische Leitungsvermögen stattfindet.

Die Resultate sind in folgender Tabelle mitgetheilt, wo p den Anilingehalt auf 100 g Säure, D die Temperaturerniedrigung des Gefrierpunktes und $E = (D / P)$ den Erniedrigungscoefficienten bezeichnet.

X. Anilin in Essigsäure.

1. Serie. Gefriertemperatur der Säure 16,54°.			2. Serie Gefriertemperatur der Säure 16,70°.		
p	D	E	p	D	E
0,966	0,364	0,376	0,956	0,364	0,381
1,950	0,722	0,370	1,994	0,760	0,381
2,881	1,082	0,375	2,932	1,108	0,378
3,836	1,424	0,371	3,906	1,472	0,377
5,762	2,160	0,375	5,219	1,968	0,377
7,840	3,024	0,385	6,580	2,518	0,382
9,820	3,958	0,403	7,811	3,052	0,391
11,781	5,014	0,425	11,715	5,068	0,433

Die zwei angeführten Reihen der Beobachtungen wurden mit Säure von verschiedener Gefriertemperatur gemacht und unterscheiden sich die Zahlen um ein Geringes. Je höher der Gefrierpunkt, je geringer der Wassergehalt der Säure, um so grösser sind die Werthe der Temperaturerniedrigung. Der allgemeine Gang der Zahlen bleibt jedoch ein und derselbe. In verdünnten Lösungen ist der Werth der Temperaturerniedrigung D fast proportional dem Gewichte des gelösten Anilin p und der Erniedrigungscoefficient $E = (D / P)$ fast constant, bis p ungefähr gleich 6,5 wird. Für die moleculare Erniedrigung erhalten wir in verdünnten Lösungen den beinahe normalen Werth von 35,4. Bemerkenswerth ist, dass, obwohl wir hier in der Lösung einen Körper haben, der ohne Zweifel chemische Verbindungen mit dem Lösungsstoffe bilden kann, die moleculare Temperaturerniedrigung nichtsdestoweniger constant und nahe gleich der normalen erscheint. Bei wachsender Concentration, wenn der Anilingehalt 6,5 auf 100 g Säure übersteigt, nimmt der Erniedrigungscoefficient (D / p) rasch zu, sodass die moleculare Erniedrigung in concentrirteren Lösungen grösser als 39[1]) wird. Der Wendepunkt im Gange der Gefrierpunktserniedrigungen entspricht einer Lösung von nahe derselben Concentration, der die Veränderung im Gange des electrischen Leitungsvermögens entsprach (siehe oben).

Auf den ersten Blick scheint diese Zunahme der Molecularerniedrigung zu Gunsten der electrolytischen Dissociations-

1) Der normale Werth der Molecularerniedrigung für Lösungen in Essigsäure nach Raoult.

theorie zu sprechen. In der That zeigt gerade in Lösungen mit bedeutender Leitfähigkeit Anilin eine grössere Molecularerniedrigung als normal. Jedoch nimmt E mit Zunahme der Concentration fortwährend zu, während nach der electrolytischen Dissociationstheorie das Entgegengesetzte eintreten müsste. Es scheint also, dass auch hier ein Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit und der Grösse der Molecularerniedrigung bestehe, auf den zuerst schon Arrhenius, gestützt auf die Theorie der electrolytischen Dissociation, hingewiesen, doch lässt in den von mir untersuchten Fällen sich der Zusammenhang nicht durch diese Theorie erklären. Einen analogen Verlauf der Gefrierpunktserniedrigung lassen auch wässerige Lösungen von Ammoniak erkennen. Auch hier ist die Molecularerniedrigung in verdünnter Lösung beinahe normal, mit steigender Concentration wird sie schliesslich grösser als normal.

Schlussfolgerungen: 1. Lösungen, gebildet von Aminen und organischen Säuren, sind Leiter ungefähr derselben Ordnung, wie Lösungen organischer Säuren in Wasser.

2. Bei einer grossen Verdünnung, jedoch bei noch nicht unendlicher, wird das Leitungsvermögen der Lösungen verschwindend klein.

3. Die Curven, welche das electrische Leitungsvermögen dieser Lösungen in Abhängigkeit vom Procentgehalt ausdrücken, sind nicht symmetrisch. Sie sind nach der Seite der Flüssigkeit mit geringerem Moleculargewicht und Volumen verschoben, und das um so mehr, je grösser der Unterschied in den Moleculargewichten und Volumina ist.

4. Die Anfänge dieser Curven sind concav, entgegen den Forderungen der electrolytischen Dissociationstheorie. Die Concavität ist um so grösser, je grösser das Gewicht und das Volumen der Molecüle des gelösten Körpers im Vergleich mit der des Lösungsmittels ist.

5. Das eigenartige Verhalten der wässerigen Lösungen scheint vor allem durch das geringe Moleculargewicht und Volumen des Wassers bedingt zu sein.

6. Die Curven des electrischen Leitungsvermögens der Lösungen von Anilin und Essigsäure weisen eine Reihe von Wendepunkten auf, Lösungen entsprechend, deren Zusammensetzung einfachen multiplen Proportionen genügt.

7. Das Leitungsvermögen der Flüssigkeiten bei gewöhnlicher Temperatur wird durch chemische Affinität zwischen dem gelösten Electrolyt und dem Ueberschusse des Lösungsmittels hervorgerufen. Der eigenthümliche Zustand der sich dabei bildenden instabilen Verbindungen begünstigt den chemischen Umtausch, ohne den eine electrolytische Leitung nicht möglich ist.

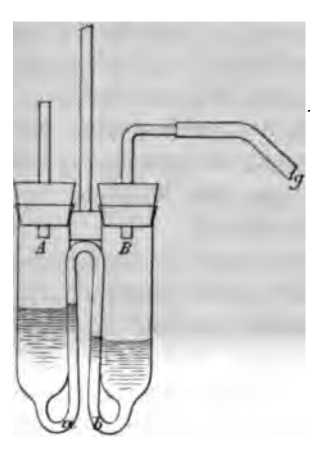
II.

Wärmeerscheinungen.

Das Ziel nachfolgender Untersuchung ist die Bestimmung der Wärmemengen, welche beim Mischen in verschiedenen Gewichtsverhältnissen von Aminen (Anilin, Dimethilanilin) mit Säuren (Essig-, Butter- und Propionsäure) frei werden. Die Untersuchungen wurden bei Zimmertemperatur gemacht. In der Absicht, die Abhängigkeit der erhaltenen Werthe von der Temperatur zu verfolgen, sind ferner die specifischen Wärmen der erhaltenen Mischungen in den Intervallen von 0^0—20^0 und 40^0—20^0 bestimmt worden. Mit Hülfe der erhaltenen Werthe der specifischen Wärme sind die Wärmetönungen des Mischens bei drei Temperaturen: 0^0, 20^0 und 40^0 berechnet.

Untersuchungsmethode: Die gewöhnliche Bestimmungsmethode der Vermischungswärmen auf Grund unmittelbarer Messung der Temperatur der Flüssigkeiten vor und nach erfolgtem Mischen konnte in dem gegebenen Falle nicht mit Erfolg angewandt werden. Denn vor allem erfordert diese Methode bedeutende Flüssigkeitsmengen. Bei geringen Flüssigkeitsmengen sind die unvermeidlichen Fehler in der Bestimmung des Wasserwerthes des Gefässes und des Thermometers von grossem Einfluss auf die Endresultate. Sodann hängt der Grad der Genauigkeit der Endresultate von dem Genauigkeitsgrade der Bestimmung der specifischen Wärme der erhaltenen Mischung ab und lässt sich letzterer Werth bei geringen Flüssigkeitsmengen nicht hinreichend genau genug bestimmen. In Anbetracht dessen gab ich den Vorzug der Methode des Wärmeaustausches zwischen den sich mischenden Flüssigkeiten und dem Wasser des Calorimeters, dessen Gesammtwasserwerth genau bekannt war. Zu diesem Zwecke construirte ich folgenden Apparat (vgl. Figur a. f. S.). Zwei dünnwandige Glascylinder *A* und *B*, von denen ein jeder etwa 60 ccm fasst,

stehen miteinander in Verbindung vermittels einer dünnen Glasröhre *a b*, welche, vom Boden eines jeden der Cylinder ausgehend, sich nach ober hin fortsetzt. Ein jeder Cylinder wurde mit dem gewünschten Quantum der untersuchten Flüssigkeiten beschickt, genau gewogen und darauf der ganze Apparat in das Calorimeterwasser versenkt. Nachdem der Gang des Thermometers im Calorimeter regelmässig und langsam geworden, liessen sich die Flüssigkeiten leicht durch Verdrängen der einen Flüssigkeit aus einem der Cylinder durch Luft vermischen. Letzteres wurde mit Hülfe einer kleinen Glasglocke erreicht, welche durch einen Gummischlauch *g* mit einem der Cylinder in Verbindung stand und in Quecksilber getaucht wurde. Durch wiederholtes Eintauchen und Herausziehen der Glocke aus dem Quecksilber wurden die Flüssigkeiten zum Vermischen gebracht und beim Durchlaufen durch die Glasröhre *a b* gab die Lösung rasch ihre Wärme an das Calorimeterwasser ab. Das Gesammtgewicht beider Flüssigkeiten betrug ungefähr 45 g. Das Calorimetergefäss aus Platin fasste ungefähr 500 g Wasser. Die Temperatur wurde genau bis 0,001° abgelesen. Die Temperatur des Calorimeterwassers stieg im allgemeinen nach dem Mischen nicht weniger als 0,6°, nur in seltenen Fällen betrug der Temperaturanstieg 0,3° und selbst 0,2°. Der Wasserwerth der erhaltenen Lösung machte ungefähr 5 Proc. des Gesammtwasserwerthes des Calorimeters aus und hatte infolgedessen eine Ungenauigkeit in der Bestimmung des Werthes der specifischen Wärme der Lösung keinen wesentlichen Einfluss auf die Resultate.



In der Absicht, die Abhängigkeit zwischen Wärmetönung und Temperatur zu untersuchen, wurden Bestimmungen der specifischen Wärme der erhaltenen Lösungen in den Intervallen von 0° bis zur Zimmertemperatur und zwischen letzterer und 40° gemacht. Zu diesem Zwecke wurde die Lösung in einem Platingefäss in das Calorimeter getaucht. Vor dem

Eintauchen des Gefässes wurde aus dem letzteren das Thermometer entfernt und nach Beendigung des Experimentes das Gefäss mitsammt der Lösung gewogen. Um den Wärmeaustausch zu beschleunigen, war im Gefässe ein Rührer aus Platin angebracht, mit dessen Hülfe die Lösung in rasche Bewegung versetzt wurde. Letzterer Umstand war im gegebenen Falle von grosser Bedeutung, denn ich hatte mit sehr zähen Lösungen zu thun, welche ihre Wärme nur langsam abgaben. Die Beobachtungen sind unter meiner Leitung von den Hrn. Boerling, Brandenburger und Suhanow gemacht.

Auflösungswärme.

Die weiter unten folgenden Tabellen geben unter dem Buchstaben q in kleinen Calorien die Wärmetönungen, welche

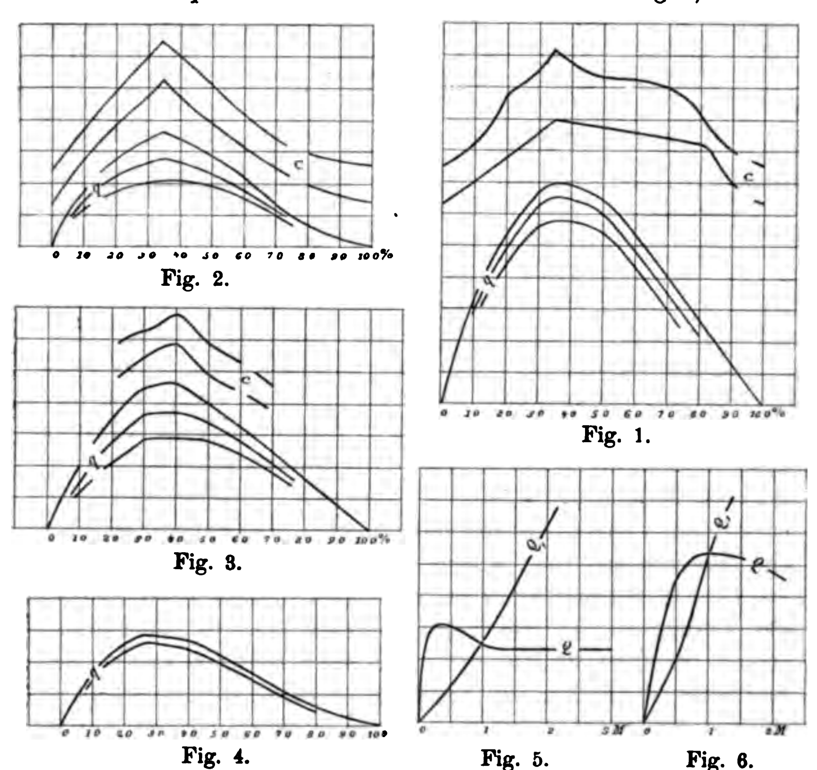


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 1. Fig. 5. Fig. 6.

bei der Bildung eines Grammes der Lösung frei werden; P_a bezeichnet den Procentgehalt der Lösung an Amin. Dieselben

Resultate sind auf Fig. 1 bis 4 in Form von Curven wiedergegeben, wobei als Abscissen der Amingehalt der Lösung, als Ordinaten die Wärmetönungen eingetragen sind.

I. Anilin und Essigsäure
Fig. 1.

P_a	Wärmetönung der Bildung 1 proc. Lösung q		
	0°	20°	40°
16,68	—	10,85	10,09
20,42	13,50	12,76	11,62
28,33	16,19	15,15	13,68
33,89	17,28	16,00	14,23
40,20	—	15,97	—
44,67	17,01	15,74	14,13
60,54	13,13	12,02	10,62
76,15	7,84	6,86	5,82
82,67	5,67	4,86	4,32
90,76	2,58	2,36	2,15

II. Anilin und Buttersäure
Fig. 2.

P_a	q		
	0°	20°	40°
21,17	7,08	5,75	4,50
26,30	7,94	6,40	4,84
34,85	9,03	7,07	5,13
40,72	8,51	6,75	5,05
51,06	7,21	6,00	4,77
66,65	4,22	3,64	3,08

III. Anilin und Propionsäure
Fig. 3.

P_a	q		
	0°	20°	40°
19,89	—	6,92	—
24,88	10,06	8,15	6,34
30,08	11,08	9,00	7,12
31,40	11,18	9,10	7,20
35,62	11,36	9,18	7,22
40,12	11,47	9,25	7,18
45,23	10,80	8,91	7,08
46,51	—	8,84	7,01
54,83	9,29	7,66	6,09

IV. Dimethylanilin und Essigsäure Fig. 4.

P_a	q	
	0°	20°
15,05	5,48	5,16
19,84	6,46	5,94
25,90	7,23	6,63
34,01	7,07	6,36
40,42	6,87	6,11
54,77	5,12	4,50
67,26	3,27	2,87
80,00	1,92	1,60

Beim Vermischen der untersuchten Flüssigkeitspaare ist ein Freiwerden von Wärme zu beobachten. Die Curven, welche die Wärmetönung in Abhängigkeit vom Procentgehalt der Lösung ausdrücken, liegen oberhalb der Abscissenaxe und zeigen in allen Fällen ein mehr oder weniger scharf ausgeprägtes Maximum. *In keinem Falle entspricht das Maximum einem Verhältniss von je einem Molecül Säure zu einem Molecül Amin und ist immer nach der Seite der Lösungen mit grösserem Säuregehalt verschoben.* Sollte man annehmen, dass diese Erscheinung durch Bildung saurer Salze der Amine in der Lösung

bedingt wird, so muss vor allem klar gemacht werden, in welchem Maasse die Lage der Maxima überhaupt einfachen Molecularformeln entspricht.

In einigen Fällen ist das Maximum sehr scharf ausgeprägt und übersteigt der mögliche Fehler in der Zusammensetzung der Lösung, welche dem Maximum entspricht, bei graphischer Bestimmung nicht Bruchtheile eines Procentes; in anderen Fällen ist die Lage des Maximums nur undeutlich ausgedrückt. Sichere Schlussfolgerungen können daher nur auf dem Wege des Vergleiches der Lage des Maximum für alle untersuchte Flüssigkeitspaare bei verschiedener Temperatur erhalten werden.

Betrachten wir die Curven für die Temperatur von 20°, so sehen wir in den Lösungen von Anilin und Essigsäure ein scharf ausgeprägtes Maximum der Vermischungswärme bei 34 Proc. Einer Lösung von ungefähr gleicher Zusammensetzung entspricht auch das Maximum der Lösungen von Anilin und Buttersäure. Im ersten Falle wird die Zusammensetzung der Lösung durch die Formel $A + 3K$, im zweiten durch $A + 2K$ wiedergegeben.[1]) In beiden Fällen haben die dem Maximum entsprechenden Lösungen einen fast gleichen Amingehalt und kommen sie zu gleicher Zeit zwei verschiedenen einfachen Molecularformeln nahe.

Sollte diese nahe Uebereinstimmung der beiden Lösungen mit einfachen Molecularformeln bloss eine zufällige sein, so hätten wir für Lösungen von Anilin und Propionsäure ebenfalls ein Maximum bei einem Gehalt von ungefähr 34—35 Proc. Anilin zu erwarten. Es erweist sich, dass die Curve dieser Lösungen zwei deutliche Krümmungen zeigt, von denen die eine einer Lösung von 29 Proc., die zweite einer Lösung von 39 Proc. Anilingehalt entspricht. Die Zusammensetzung der ersteren Lösung kommt der Formel $3K + A$, die der zweiten $2K + A$ nahe. Eine solche Eigenthümlichkeit der Curve legt offenbar Zeugniss für eine nicht zufällige Uebereinstimmung der „hervorragenden“ Punkte der Curven mit einfachen Molecularformeln ab.

Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure weisen ein Maximum entsprechend 25 Proc. Dimethylanilin auf und die Curve zeigt ausserdem in diesem Falle noch eine deutliche

1) Einfachheitshalber werden weiter unten immer ein Molecül des Amin durch A und das der Säure durch K bezeichnet werden.

Krümmung bei einem Gehalt von ungefähr 40 Proc. Dimethylanilin. Die Zusammensetzung der ersteren Lösung entspricht der Formel $A + 6K$, die der zweiten — $A + 3K$. Wie im Falle von Anilin und Propionsäure entsprechen auch hier beide Krümmungen einfachen Moleculformeln.

In allen Fällen nehmen die Werthe der Wärmetönungen mit steigender Temperatur ab. Zu gleicher Zeit ändert sich auch die Form der Curven. Die bedeutendste Abnahme der Auflösungswärme mit steigender Temperatur zeigen Lösungen von Anilin und Buttersäure. Bei einem Temperaturanstieg von 0° bis 40° fällt in diesem Falle die Wärmetönung der Vermischung um etwa 45 Proc. Zugleich verliert die Curve das bei 0° sehr scharf ausgeprägte Maximum und verläuft bei 40° flach und ohne auffallende Eigenthümlichkeiten. Ein gleiches Verschwinden der Curvenkrümmungen mit steigender Temperatur beobachten wir auch in den übrigen Fällen, es entstehen aber dabei andere Krümmungen an Stelle der verschwindenden, oder werden letztere schärfer ausgeprägt. In den Curven für Lösungen von Anilin und Propionsäure verschwindet bei 40° vollständig das Maximum, das 39 Proc. Anilin ($2K + A$) entsprach und bei 0° scharf ausgeprägt war; an Stelle dessen tritt eine deutliche Krümmung bei 29 Proc. Anilin ($3K + A$) hervor. In Lösungen von Anilin und Essigsäure verschwindet bei 40° das Maximum bei $3K + A$ und zeigt sich eine Krümmung bei einem Gehalt von ungefähr 20 Proc. Anilin ($6K + A$). In der Curve für Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure wird die bei 0° scharf ausgeprägte Krümmung entsprechend $A + 3K$ bei 20° undeutlich und tritt zu gleicher Zeit das Maximum bei 25 Proc. Amin ($6K + A$) schärfer hervor.

Die oben angedeuteten Verschiebungen „hervorragender“ Punkte der Curven mit steigender Temperatur entsprechen Verschiebungen, welche von der Ungleichheit der Moleculargewichte und Volumina der die Lösung bildenden Flüssigkeiten abhängen. Die allergrösste Symmetrie zeigt die Curve von Buttersäure mit einem Maximum bei einer Zusammensetzung der Lösung gleich $A + 2K$; am allerwenigsten symmetrisch erscheint die Curve der Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure mit einem Maximum bei $6K + A$. *Das Maxi-*

mum der Wärmetönung nähert sich stets der Flüssigkeit mit geringerem Moleculargewicht und Volumen, und zwar um so mehr, je grösser der Unterschied. Mit steigender Temperatur werden, wie oben gezeigt, die Krümmungen der Curven flacher, welche Lösungen mit geringerem Säuregehalt entsprechen und erscheinen inmitten von Lösungen mit grösserem Säuregehalt. *In einem jeden Falle ruft die Erhöhung der Temperatur eine Verschiebung der „hervorragenden" Punkte der Curven nach der Seite der Flüssigkeiten mit geringerem Moleculargewicht und Volumen hervor.* Die Temperaturerhöhung entspricht in diesen Fällen gleichsam einer Zunahme im Unterschiede der Gewichte und der Volumina der Molecüle. Ungeachtet der mannigfaltigen Formen der Curven zeigt sich also eine gewisse Einfachheit in ihren gegenseitigen Beziehungen. Die chemische Affinität, welche zwischen den Aminen und Säuren wirksam ist, führt in diesen von mir untersuchten Fällen zur Bildung von Lösungen in unbestimmten Gewichtsverhältnissen. Wenn in den oben beschriebenen Eigenthümlichkeiten der Curven die Wirkung der Affinität ihren Ausdruck findet, so verdienen etwaige Merkmale der Einfachheit ihrer gegenseitigen Beziehungen insofern Beachtung, dass sie zum Verständniss des Chemismus, namentlich in seiner schwächsten Form, beitragen könnten.

Was die Werthe der Wärmetönungen selbst anbetrifft, so sind sie, wie aus den angeführten Daten zu sehen, im allgemeinen unbedeutend. Die Temperatursteigerung beim Mischen dieser Flüssigkeiten hat den kleinsten Werth für Lösungen von Anilin und Buttersäure, in diesem Falle übersteigt nach den oben angegebenen Daten dieselbe kaum 10°. Einen solchen Werth beobachtet man auch beim Mischen von Flüssigkeiten, für die eine mögliche Bildung bestimmter Verbindungen nicht angenommen wird, z. B. beobachteten Bussy und Buignet beim Mischen von 50 Volumina Aether mit 50 Volumina Chloroform einen Temperaturanstieg von 14,4°.[1])

Die specifische Wärme der Lösungen.

Auf folgenden Tabellen V, VI, VII, VIII sind die Werthe der specifischen Wärme der Lösungen angeführt und in Form von Curven auf Fig. 5 u. 6 wiedergegeben. Um sie bequemer

---

1) Bussy u. Buignet, Ann. de Chim. et de Phys. (4) **4.** p. 5. 1865.

mit den Werthen der Wärmetönungen vergleichen zu können, sind sie über den Curven der Wärmetönung aufgetragen, wobei der Maassstab für die specifischen Wärmen um 100mal vergrössert ist und der Nullpunkt der Ordinatenaxe einer Wärmecapacität von 0,425 resp. 0,300 Lösungen von Anilin und Essigsäure entspricht.

V. Anilin und Essigsäure
Fig. 1.

P_a	Specifische Wärme c	
	0°—20°	20°—40°
0	0,458	0,487
16,68	—	0,525
20,43	0,496	0,547
28,33	0,511	0,556
33,89	0,523	0,577
44,67	0,522	0,569
60,54	0,515	0,558
76,15	0,510	0,542
82,67	0,501	0,517
90,76	0,472	0,500
100	0,461	0,490

VII. Anilin und Propionsäure
Fig. 3.

P_a	Specifische Wärme c	
	0°—20°	20°—40°
0	0,458	0,487
24,89	0,554	0,578
30,09	0,563	0,582
35,62	0,568	0,586
40,12	0,570	0,592
45,23	0,554	0,580
54,83	0,541	0,567
100	0,461	0,490

VI. Anilin und Buttersäure
Fig. 2.

P_a	Specifische Wärme c	
	0°—20°	20°—40°
0	0,458	0,487
21,17	0,525	0,550
26,30	0,536	0,566
34,87	0,557	0,585
40,71	0,537	0,573
51,06	0,520	0,550
66,65	0,489	0,517
100,00	0,461	0,490

VIII. Dimethylanilin und Essigsäure.

P_a	Spec. Wärme c
	0°—20°
0	0,458
25,90	0,472
40,42	0,470
54,77	0,454
67,26	0,435
80,00	0,423
100,00	0,394

Die specifische Wärme der untersuchten Lösungen übersteigt das arithmetische Mittel der specifischen Wärme der Bestandtheile. Die Curven der specifischen Wärme weisen Maxima auf, deren Lage mit der Lage der maximalen Wärmetönungen übereinstimmt. Ausserdem beobachten wir auch hier mit steigender Temperatur ähnliche Aenderungen in der Gestalt der Curven, wie sie für die Curven der Wärmetönungen

beschrieben. So zeigt die Curve der Wärmecapacitäten zwischen 0°—20° der Lösungen von Anilin und Essigsäure ausser dem Maximum $3K + A$ noch eine deutlich ausgeprägte Wölbung, elche einer Lösung mit einem Gehalt an Anilin von ungefähr 82 Proc. $(K + 3A)$ entspricht. Diese Wölbung verschwindet zwischen 40°—20°, die Curve wird in diesem Theile concav; zu gleicher Zeit tritt eine neue Wölbung bei einer Zusammensetzung der Lösung von ungefähr 20 Proc. Anilin $(6K + A)$ hervor.

Im allgemeinen haben die Curven der specifischen Wärme und der Wärmetönungen Aehnlichkeit mit Wellen. Mit Veränderung der Temperatur ändert sich ihr Aussehen und es treten an verschiedenen Stellen gleichsam Kämme auf, die mit Temperaturänderung von neuem verschwinden. Doch ist das Auftreten dieser Wellenkämme kein zufälliges, sondern scheint einfachen Molecularverhältnissen zu entsprechen.

Verdünnung der Lösungen. Die oben angeführten Daten legen Zeugniss ab von einer ungleichen Einwirkung eines Ueberschusses von Amin, resp. Säure auf die Lösung. Noch deutlicher tritt diese Erscheinung in den Wärmetönungen bei Verdünnung dieser Lösungen hervor. Die Werthe der Verdünnungswärmen können aus den obigen Zahlen erhalten werden, indem man die Wärmetönung für die Mischungen berechnet, welche eine constante Menge Amin, resp. Säure enthalten. In den nachstehenden Tabellen sind die Wärmetönungen angegeben, welche beim Mischen eines Moleculargewichtes Amin, resp. Säure mit verschiedenen Mengen des anderen Bestandtheiles erhalten werden. M_a und M_s bedeutet die Anzahl der Molecüle Amin, resp. Säure, Q die Wärmetönung bei 20° in grossen Calorien.

IX. Anilin und Essigsäure.

M_a	Q	M_s	Q_1
0,129	0,781	0,158	0,242
0,166	0,962	0,325	0,547
0,255	1,269	0,485	0,838
0,331	1,452	1,011	1,846
0,521	1,706	1,920	3,276
0,989	1,828	3,024	4,390
2,059	1,725	3,921	4,973
3,077	1,682	6,039	5,810
6,335	1,532	7,742	6,049

X. Anilin und Propionsäure.

M_a	Q	M_s	Q_1
0,197	0,639	1,034	1,299
0,263	0,803	1,445	1,768
0,342	0,952	1,522	1,832
0,440	1,055	1,875	2,144
0,533	1,143	2,271	2,397
0,692	1,222	2,745	2,695
0,966	1,255	2,921	2,782
—	—	3,794	3,046
—	—	5,062	3,235

XI. Dimethylanilin und Essigsäure Fig. 5.

M_a	Q	M_s	Q_1
0,088	0,364	0,504	0,242
0,122	0.445	0,980	0.515
0,173	0,537	1,666	0,994
0,255	0,578	2,973	1,829
0,336	0,615	3,913	2,262
0,601	0,597	5,771	3,096
1,019	0,515	8,149	3,621
1,984	0,480	11,384	4,148

XII. Anilin und Buttersäure Fig. 6.

M_a	Q	M_s	Q_1
0,253	0,642	0,528	0,519
0,338	0,764	1,013	1,114
0,506	0.955	1,539	1,542
0,649	1,001	1,975	1,887
0,987	1,079	2,962	2,263
1,890	0,960	3,936	2,526

Auf der Abscissenaxe ist die Anzahl der Molecüle, als Ordinaten sind die Wärmetönungen eingetragen.

Das Aussehen der Curven ist sehr verschieden, je nachdem wir Säure durch Amin verdünnen oder umgekehrt. Bei fortwährendem Hinzufügen von Säure zu Amin steigt die ausgeschiedene Wärmemenge continuirlich: *die Verdünnungswärme der Lösung durch Säure ist stets positiv.*

Bei fortwährendem Hinzufügen von Amin zur Säure wächst der Werth der freiwerdenden Wärmemenge nur bis zu einer gewissen Grenze, jenseits welcher eine Abnahme derselben beginnt. *Beim Verdünnen einer Lösung durch Amine wird bis zu einer bestimmten Grenze Wärme frei, jenseits welcher eine Wärmeabsorption eintritt.* Diese Grenze ist bei Lösungen von Anilin in allen drei untersuchten Säuren gleich und liegt bei einem Verhältniss von ungefähr einem Molecül Anilin zu einem Molecül Säure. In Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure tritt eine Wärmeabsorption beim Verdünnen der Lösung durch Dimethylanilin schon dann ein, wenn das Verhältniss der Anzahl der Molecüle von Säure zu Dimethylanilin kleiner als 3:1 wird. Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure zeigen noch folgendes bemerkenswerthe Verhalten. Die Wärmeabsorption beim Verdünnen durch Dimethylanilin findet nur bis zu einem Verhältniss von ungefähr je einem Molecül Säure und Amin statt, bei weiterer Verdünnung der Lösung durch Amin wird die Wärmetönung fast gleich Null.

Die Lösungswärme und das electrische Leitungsvermögen der Lösungen. Die Resultate, die ich bei der Untersuchung des electrischen Leitungsvermögens der beschriebenen Lösungen erhalten, führten mich zu der Annahme, dass die Fähigkeit dieser Lösungen electrolytisch zu leiten von einer chemischen

Einwirkung zwischen den Aminen und einem Ueberschusse von Säure abhängt. Die Annahme solcher Einwirkung wurde auch durch die Wärmeerscheinungen veranlasst. Wenn also beide Erscheinungen von ein und derselben Ursache abhängen, so muss zwischen ihnen eine Beziehung bestehen. Es ist nicht anzunehmen, dass diese Beziehung eine einfache sein könnte, ich will mich deshalb nur darauf beschränken, auf einige allgemeine Merkmale hinzuweisen.

Wenn wir von Lösungen von Anilin in Essigsäure zu Lösungen von Anilin in Buttersäure übergehen, so bemerken wir eine Abnahme der Wärmetönung und zugleich damit eine Abnahme des electrischen Leitungsvermögens, jedoch nimmt letzteres rascher ab. Die vorwiegende Bedeutung der Flüssigkeit mit geringerem Moleculargewicht ist sowohl in den Wärmeerscheinungen, als auch in den Erscheinungen des electrischen Leitungsvermögens zu erkennen. In beiden Fällen sind die Curven nicht symmetrisch und nimmt der Grad der Asymmetrie beim Uebergange von Lösungen von Anilin in Essigsäure zu Lösungen in Buttersäure ab, jedoch ist auch in diesem Falle diese Abnahme eine raschere für die Curven des Leitungsvermögens. Das relativ grössere Moleculargewicht und Volumen des Lösungsmittels hat einen grösseren Einfluss auf das Leitungsvermögen, als auf die Wärmeerscheinungen. Man muss jedoch in Betracht ziehen, dass ein grosses Molecularvolumen der Bewegung der Massentheile ein Hinderniss bietet und folglich den Widerstand der Lösung nothwendigerweise erhöht.

Am allerwenigsten symmetrisch erscheinen in beiden Fällen die Curven der Lösungen von Dimethylanilin in Essigsäure. Diese beiden Flüssigkeiten sind einer näheren Besprechung werth. Hier tritt der Unterschied zwischen den Lösungen, welche einen Ueberschuss an Säure, und solchen, welche einen Ueberschuss an Amin enthalten, am schärfsten hervor. Das electrische Leitungsvermögen ist hier nur solchen Lösungen eigen, die mehr als ein Molecül Säure auf ein Molecül Amin enthalten. Bei einem grösseren Amingehalt der Lösung dagegen sinkt das Leitungsvermögen rasch bis zu verschwindend kleinen Grössen.

Die Wärmetönungen weisen auf die Fähigkeit des Dimethylanilins, mit Essigsäure complicirtere Verbindungen zu bilden, hin. Selbst bei einem sehr grossen Ueberschuss von Säure ist die chemische Energie der Bildung solcher Verbindungen noch nicht erschöpft, und ein weiteres Hinzufügen von

Essigsäure ruft ein Freiwerden von Wärme hervor. Das Entgegengesetzte tritt, wie oben angegeben, beim Hinzufügen von Dimethylanilin zu diesen Lösungen ein. Die Wärmeabsorption beim Verdünnen der Lösungen durch Dimethylanilin kann eben durch den Zerfall solcher zusammengesetzter Verbindungen erklärt werden. Nach erfolgtem Zerfall dieser Verbindungen wird die Wärmetönung des Verdünnens gleich Null. Bei der Bildung der Lösungen von solcher Zusammensetzung wird Wärme frei, doch hängt die Wärmemenge nicht von der relativen Masse des Amins ab. Bei verschiedenen Mengen Amin bildet sich in dem gegebenen Falle in der Lösung gleichsam ein und dieselbe Verbindungsform, wobei der gesammte Ueberschuss des Amins gleichsam als sogenanntes „indifferentes“ Lösungsmittel erscheint. Jedenfalls lässt sich die Fähigkeit von Essigsäure mit Dimethylanilin höhere Verbindungsformen zu bilden, nicht in den Wärmeerscheinungen erkennen. Lösungen von Dimethylanilin und Essigsäure geben uns also die Möglichkeit an ein und demselben Flüssigkeitspaar die Beziehungen zwischen electrischem Leitungsvermögen und den Erscheinungen des Chemismus zu verfolgen, denn *das electrische Leitungsvermögen ist hier nur solchen Lösungen eigen, welche in solchen Gewichtsverhältnissen gebildet sind, wo die chemische Energie der die Lösung bildenden Körper nicht erschöpft ist; electrisches Leitungsvermögen lässt sich dagegen nicht beobachten, wenn deutliche Anzeichen chemischer Verbindung zwischen dem gelösten Stoffe und dem Ueberschusse des Lösungsmittels fehlen.*

Berichtigungen.

Bd. 48 (Silberstein) p. 270 ist an Stelle von $\overline{m}$ der „scheinbaren Massenzunahme“, $\frac{2}{5} R^2 \omega^2 . \overline{m}$ zu setzen.

Bd. 49 (R. Zsigmondy) p. 532 1. Abs. 1. Z. v. o. st. Beobachtung l. Beachtung.
„ 533 2. „ 2. „ „ „ „ der gelösten Eisen l. des g. E.
„ 533 3. „ 3. „ „ „ „ des l. das.
„ 536 2. „ 6. „ „ „ „ Thonerde l. Borsäure.
„ 537 4. „ 2. „ „ „ „ vollkommene l. vollkommen.

Bd. 49. (W. Voigt) p. 396 Z. 3 v. u. lies $E\,10^{1/2}\gamma^{7/2}/\varepsilon^{7/2}$ statt $E/(\varepsilon/\gamma)^7$.
„ 397 „ 4 „ „ „ 3,5 statt 2,8.
„ 399 „ 18 „ „ „ 38,3 u. 8,20 statt 39,3 u. 8,40.
„ 399 „ 10 „ „ „ $10^{1/2}(\gamma/\varepsilon)^{7/2}$ statt $(\gamma/\varepsilon)^{7/2}$.

Der Factor $10^{1/2}$ hat keine besondere Bedeutung und ist nur durch einen Zufall in den numerischen Werthen, deren *relative* Grösse allein in Betracht kommt, stehen geblieben.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



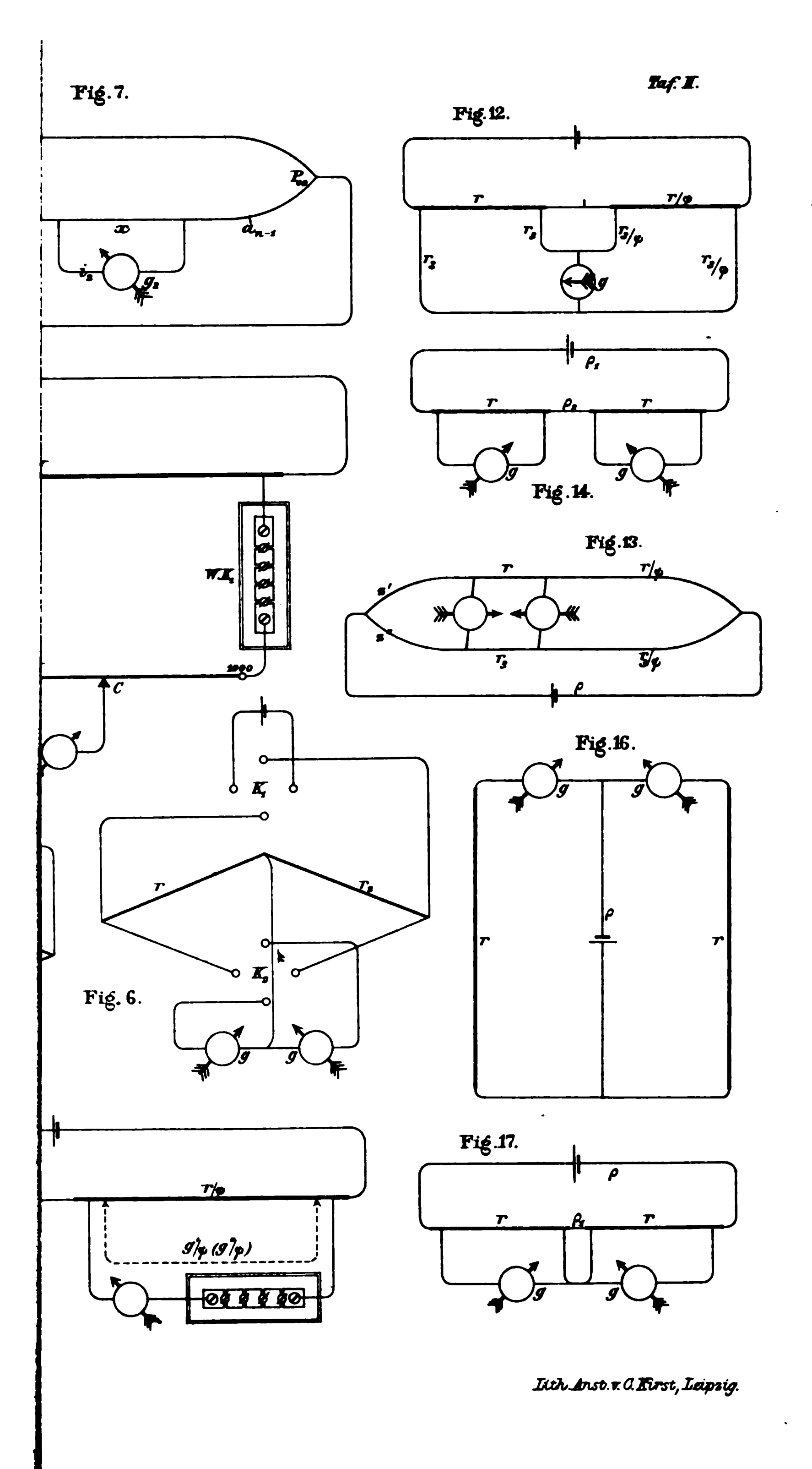
Fig. 4.

Vertikalkomponente.

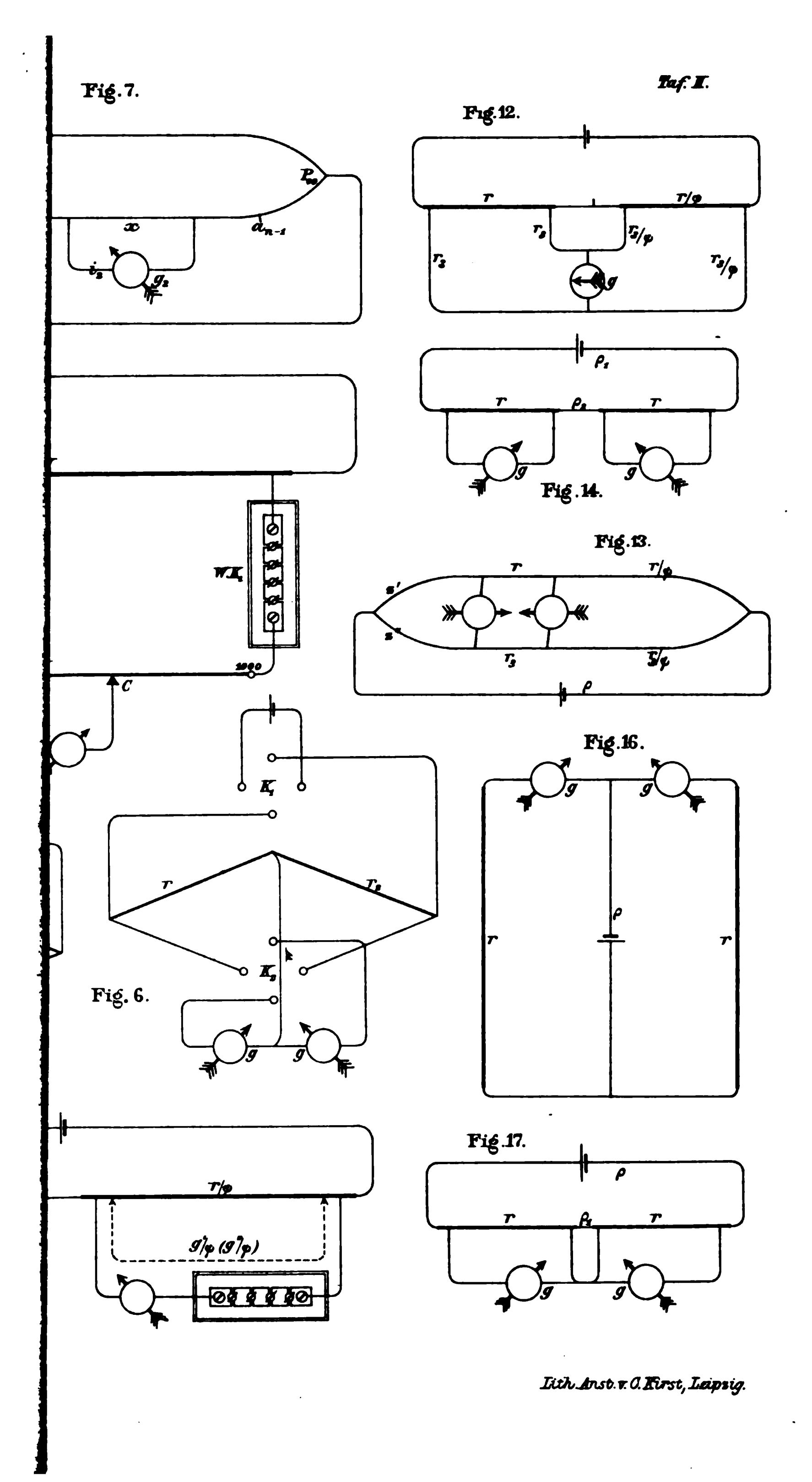
Fig. 6.

Horizontalkomponente.

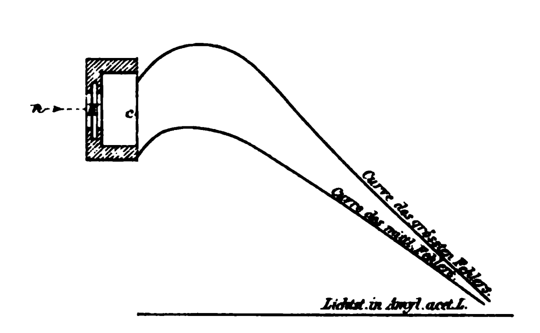
Fig. 14.

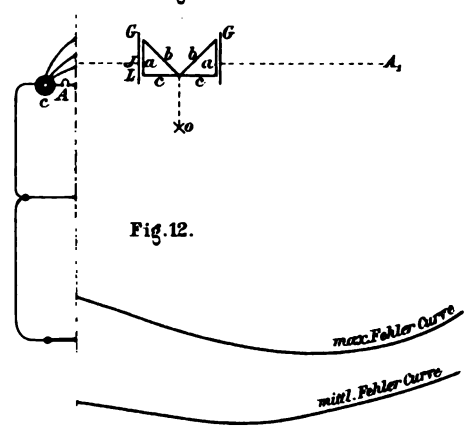


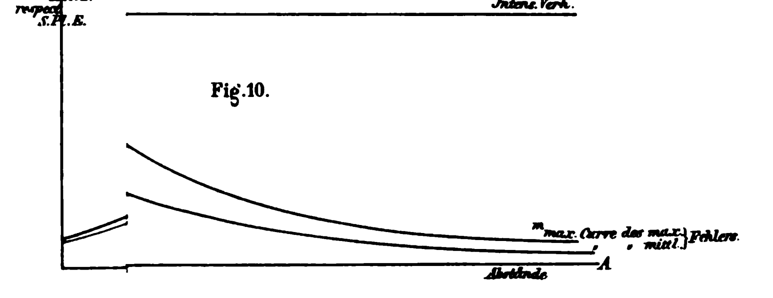
Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.



Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.







Lith. C. Kirst, Leipzig.



Referate erwähnt, während die Titel der in den „Annalen“ veröffentlichten Arbeiten zur Herstellung einer vollständigen physikalischen Bibliographie in das Inhaltsverzeichnis aufgenommen sind.

Die Annalen und Beiblätter zusammen genügen somit vollkommen, um die physikalische Forschung aller Kulturvölker im einzelnen zu verfolgen; nur für specielle Fälle, wo Quellenstudien erforderlich sind, werden die Originalarbeiten = die dann ebensowenig durch eine Übersetzung wie durch ein Referat vertreten werden können = unentbehrlich bleiben und müssen in den Bibliotheken aufgesucht werden. — Die vorherige Konsultierung der Beiblätter wird aber auch in diesen Fällen viel Mühe und Zeit ersparen.

Die Beiblätter sind also nicht nur für Physiker, sondern für jede Bibliothek ein ausserordentlich wichtiges bibliographisches Hilfsmittel, für denjenigen aber, dem die wissenschaftlichen Zeitschriften nicht immer zur Hand sind, geradezu unentbehrlich.

Abonnements auf den Jahrgang von 12 Heften zu 20 M. nimmt jede Buchhandlung, die Post und die Verlagsbuchhandlung entgegen.

Probehefte stehen auf Wunsch zur Verfügung.

Die Bände 1—16 sind noch zu haben. Ladenpreis 252 M.

Hochachtungsvoll

Leipzig, im Februar 1893

Johann Ambrosius Barth
(Arthur Meiner)

1 Namenregister der Beiblätter zu den Annalen der Physik. [illegible]

1 Beiblätter zu den Annalen der Physik, [illegible]

1 Beiblätter zu den Annalen der Physik. [illegible] Heft 1.

PROSPECTUS.

JAHRBUCH DER CHEMIE.

BERICHT

ÜBER DIE

WICHTIGSTEN FORTSCHRITTE DER REINEN

UND

ANGEWANDTEN CHEMIE

UNTER MITWIRKUNG

VON

H. BECKURTS-Braunschweig, R. BENEDIKT-Wien, C. A. BISCHOFF-Riga, E. F. DÜRRE-Aachen, J. M. EDER-Wien, C. HÄUSSERMANN-Stuttgart, G. KRÜSS-München, M. MÄRCKER-Halle, W. NERNST-Göttingen, F. RÖHMANN-Breslau.

HERAUSGEGEBEN

VON

RICHARD MEYER

BRAUNSCHWEIG.

II. JAHRGANG. 1892.

gr. 8. In Leinen geb. Preis 12 ℳ. In Halbfranz geb. 13 ℳ. 50 ₰

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Indem die Unterzeichneten sich anschicken, das „Jahrbuch der Chemie“ zum zweiten Male dem chemischen Leserkreise zu übergeben, glauben sie die bei seiner Herausgabe maafsgebenden Gesichtspunkte dadurch am besten klarstellen zu können, dafs sie nachstehend aus dem Vorworte des ersten Jahrganges die Hauptpunkte zum Abdruck bringen:

„Wie auf allen Wissensgebieten, so schreitet auch in der „Chemie die Specialisirung unaufhaltsam und unablässig fort. „In diesem Processe liegt ohne Zweifel einerseits die Stärke „unserer Zeit — andererseits aber hat die Erscheinung auch eine „Kehrseite, welche von allen ernsteren Naturen schmerzlich „empfunden wird: der einzelne, auch der tüchtige Fachmann, „ist genötigt, sich in die Aufgaben seines eigensten Specialgebietes „mehr und mehr zu versenken und er mufs es geschehen lassen, „wenn ihm darüber der weitere Blick für das grofse Ganze ver„loren geht. Die Ueberfülle des täglich herandrängenden Stoffes „bringt es mit sich, dafs schon die gröfste Anstrengung erforder„lich ist, um neben der eigenen Tagesarbeit das zu verfolgen, „was der Fleifs der auf dem gleichen Gebiete thätigen Fach„genossen zu Tage fördert. Wie soll es möglich sein, nur einiger„maafsen theilzunehmen an den Errungenschaften auf den anderen „Arbeitsfeldern der Chemie?

„Solchen Erwägungen entsprang der Plan zu dem Jahrbuch „der Chemie, dessen erster Jahrgang hiermit dem chemischen „Publicum übergeben wird. Derselbe soll den Gesammtfortschritt „der chemischen Wissenschaft und Technik, wie er sich im Laufe „eines Jahres vollzogen hat, sowie überhaupt bedeutende Er„scheinungen im chemischen Leben, welche sich über das Tages„interesse erheben, in regelmäfsig wiederkehrenden, zusammen„h[illegible] Berichten zur Darstellung bringen.

„Wenn [illegible] Jahrbuch [illegible] Zweck erfüllen soll, so „darf es [illegible] sein, und nicht allzusehr ins Ein„zelne [illegible] Repertorium sein, in welchem die „Ein[illegible] kurz aufgezählt und mehr oder weniger „[illegible] sind, seine Aufgabe ist es „[illegible] Gesammtbilde „[illegible] oder von vorn herein „[illegible] Jahresberichten soll das „J[illegible] nicht zum Nach„s[illegible] Lecture.

„[illegible] skizzirt wurden, [illegible] Es war daher nöthig, [illegible] den, deren jeder [illegible] Wissenschaft er[illegible] Grade beherrscht. [illegible] auf demselben n.

„geeigneter Form und Auswahl auch dem fernstehenden Fach-„genossen zur Anschauung zu bringen.

„Bis dat qui cito dat! Es wurde deshalb keine Anstrengung „gescheut, um das Jahrbuch dem Leserkreise so schnell als irgend „möglich zugänglich zu machen; und es ist in der That ge-„lungen, diesen ersten Jahrgang bereits wenige Monate nach dem „Schlusse des Berichtsjahres in den Buchhandel zu bringen. „Dieses Ziel wird auch für die folgenden Jahrgänge mit aller „Energie im Auge behalten werden, ebenso wie die bestimmte „Absicht besteht, das Jahrbuch in seinem Umfange nicht an-„wachsen zu lassen. Mögen es denn die Fachgenossen freundlich „aufnehmen, und möchte es dem Jahrbuch der Chemie vergönnt „sein, dem Fortschritte unserer Wissenschaft, wenn auch in in-„directer und bescheidener Weise, zu dienen."

Das in diesen Zeilen enthaltene Programm ist auch dasjenige des zweiten Jahrganges. Seine Durchführung wurde durch den Umstand sehr erleichtert, dafs die bewährten Mitarbeiter dem Werke treu geblieben sind. Besonderer Werth wurde auch diesmal auf das frühzeitige Erscheinen und die Einhaltung des mäfsigen Umfanges gelegt. Letzterer konnte gewahrt werden, trotzdem der Inhalt gegen den ersten Jahrgang mehrfach erweitert wurde: die Technologie des Wassers und der Brennstoffe, diejenige des Glases, der keramischen Industrien und der Cemente, sowie die chemische Technologie der Spinnfasern, welche im ersten Jahrgange noch nicht behandelt werden konnten, haben diesmal eine entsprechende Berücksichtigung gefunden.

Indem wir schliefslich auf die nachstehende Zusammenstellung der, für die einzelnen Abschnitte gewonnenen Bearbeiter verweisen, geben wir uns der Hoffnung hin, das Jahrbuch möge auch bei seinem zweiten Erscheinen eine freundliche Aufnahme finden.

Braunschweig, im Mai 1893.

Die Verleger: **Friedr. Vieweg & Sohn.**

Der Herausgeber: **Prof. Dr. Richard Meyer.**

Verzeichnis der Mitarbeiter.

Professor Dr. H. Beckurts-Braunschweig: Pharmaceutische Chemie; Chemie der Nahrungs- und Genufsmittel.

Professor Dr. R. Benedikt-Wien: Technologie der Fette.

Professor Dr. C. A. Bischoff-Riga: Organische Chemie.

Professor Dr. E. F. Dürre-Aachen: Metallurgie.

Professor Dr. J. M. Eder und E. Valenta-Wien: Photographie.

Professor Dr. C. Häussermann-Stuttgart: Anorganisch-chem. Technik; Explosivstoffe.

Professor Dr. G. Krüss-München: Anorganische Chemie.

Professor Dr. M. Märcker, Geh. Reg.-Rath, L. Bühring und H. Kirchhoff-Halle a. d. S.: Agriculturchemie; Technologie der Kohlehydrate und Gährungsgewerbe.

Professor Dr. Richard Meyer-Braunschweig: Theer- und Farbenchemie; Chemische Technologie der Spinnfasern.

Professor Dr. W. Nernst-Göttingen: Physikalische Chemie.

Dr. F. Röhmann-Breslau: Physiologische Chemie.

PROSPECTUS.

PHYSIKALISCHES

PRAKTIKUM

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG

DER

PHYSIKALISCH-CHEMISCHEN METHODEN

VON

EILHARD WIEDEMANN

UND

HERMANN EBERT.

ZWEITE VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE.

Mit 280 Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 9 ℳ. In Leinen geb. 10 ℳ.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1893.

Das „Physikalische Praktikum“ von E. Wiedemann und H. Ebert soll hauptsächlich den Bedürfnissen der Anfänger und insbesondere denen der Studirenden der Chemie Rechnung tragen. Um diesen Zweck zu erreichen, sind einmal solche Aufgaben aufgenommen, welche den Studirenden in die Methoden und Gesetze der Physik überhaupt einführen, sodann ist ein besonderes Gewicht auf die physikalisch-chemischen Methoden gelegt worden, deren Kenntniss für den Chemiker unumgänglich nöthig, für den Physiker höchst wünschenswerth ist. Die Angaben über die einzelnen Messungsmethoden sind so ausführlich angegeben, dass diejenigen, die nach den in dem Buche gegebenen Vorschriften arbeiten, auch ohne besondere Anleitung befriedigende Resultate erhalten können. Es schien dies besonders auch im Interesse der in der Praxis thätigen Chemiker zu liegen, die mehr und mehr zur Anwendung von physikalisch-chemischen Methoden genöthigt werden.

Einem jeden Abschnitt ist eine Einleitung vorausgeschickt, in welcher die allgemeinen Gesetze, die darin zur Anwendung kommen, erörtert, und die physikalischen Grössen, die gemessen werden sollen, sowie die physikalisch-chemischen Constanten, die sich aus ihnen ableiten, definirt sind. Besondere Uebungen sind zum Theil Wiederholungen der Vorlesungsversuche; sie sollen dazu dienen, obige Gesetze fester einzuprägen und diejenigen Gesichtspunkte hervorzuheben, welche bei der Construction der Messapparate und bei den angewandten Methoden in Frage kommen. Dadurch wird es ermöglicht, auch ohne Zuhülfenahme eines besonderen Lehrbuches sich auf die auszuführenden Messungen vorzubereiten.

Die Uebungen selbst sind qualitative oder quantitative. Im letzteren Falle wird gezeigt, wie aus den einzelnen Beobachtungsdaten sich diejenigen Grössen ableiten, welche in den entsprechenden Formeln enthalten sind. Die Berechnung ist so geführt, dass nicht einfach die erhaltenen Werthe in die Formel eingesetzt werden, sondern dass auch der Gedankengang, welcher zu derselben geführt hat, angegeben ist. Fast stets ist die Berechnung an einem Zahlenbeispiele erläutert.

Um den Praktikanten ferner mit den allgemeineren Resultaten der physikalischen Chemie bekannt zu machen, sind die Beispiele für die Uebungen so ausgewählt, dass dieselben schon an den bei ihnen erhaltenen Werthen hervortreten. Auch sind möglichst die zugehörigen theoretischen Betrachtungen beigefügt.

Ein Abschnitt „Gebraucht wird" enthält alle für eine Uebung erforderlichen Gegenstände zusammengestellt.

Die Verfasser haben sich bemüht, die Apparate in einfachen, dafür aber möglichst übersichtlichen Constructionen zu verwenden; sie sind dann auch zu Demonstrationsapparaten geeignet und ihre Beschaffung ist weniger gut dotirten Instituten möglich; die hier zum Gebrauche derselben gegebenen Vorschriften dürften namentlich auch für Lehrer von Nutzen sein.

Die sämmtlichen mitgetheilten Aufgaben können innerhalb zweier bis dreier Semester bei zwei- bis dreistündiger wöchentlicher Arbeit erledigt werden. Bei beschränkter Zeit lässt sich leicht eine Auswahl treffen, die es dem Praktikanten ermöglicht, sich in einem Semester eine Uebersicht zu verschaffen. Die erst später von demselben auszuführenden Uebungen sind in dem Inhalt durch einen * bezeichnet.

Die Reichhaltigkeit der behandelten Gegenstände ist aus beifolgendem Inhalte zu ersehen.

INHALT.

A. Allgemeine Physik.

B. Wärme.

C. Optik.

D. Elektricitätslehre.

Geschlossen am 1. Juli 1893.

1893. № 8.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE

BAND 49. HEFT 4.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT FÜNFUNDACHTZIGSTEN BANDES
VIERTES HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. UND E. WIEDEMANN.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG, 1893.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)

Inhalt.

Die geehrten Herren Mitarbeiter erlaubt sich die Redaction der Annalen ergebenst zu ersuchen:

1) Die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten;
2) die **Zeichnungen** in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen), sowie, da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, recht genau die Stelle des Manuscriptes anzugeben, wo sie hingehören;
3) **Citate** am Rande oder unten auf den Seiten der Manuscripte (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen;
4) falls ausnahmsweise mehr als die 50 von der Verlagsbuchhandlung kostenfrei gelieferten **Sonderabdrücke** gewünscht werden, dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite gefälligst bemerken, alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mittheilungen aber an die Verlagsbuchhandlung richten zu wollen.

Mit zwei Beilagen von **Friedrich Vieweg & Sohn** in **Braunschweig** und je einer Beilage von **Ed. Liesegang's Verlag** in **Düsseldorf** und **Johann Ambrosius Barth** (Arthur Meiner) in **Leipzig**.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 01053 7465